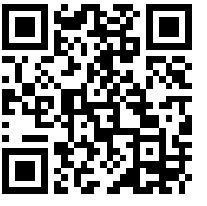
This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com



Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

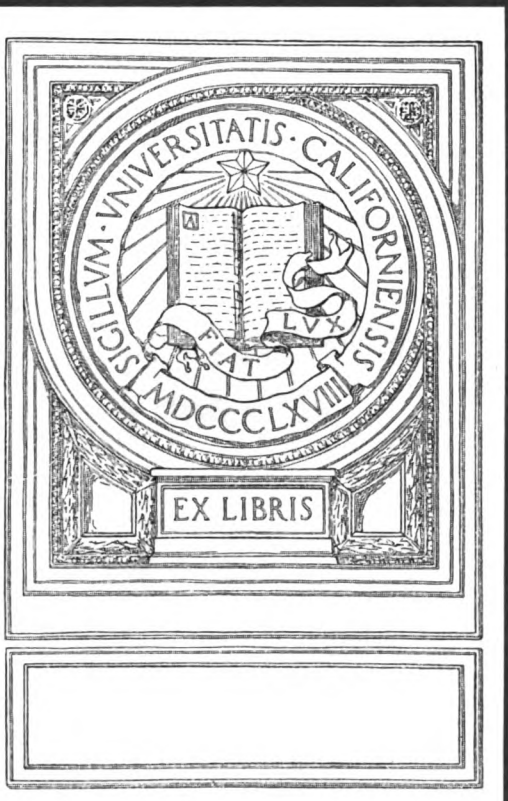
+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`



Digitized by Google

Digitized by Google

IL BOLLETTINO DI MATEMATICA

Digitized by Google

L'Editore adempiuti i doveri
eserciterà i diritti sanciti dalle Leggi

Bologna — Tipografia Cuppini — Via Castiglione 6ª — 1928

Digitized by Google

IL BOLLETTINO DI MATEMATICA

GIORNALE SCIENTIFICO-DIDATTICO

PER L'INCREMENTO DEGLI STUDI MATEMATICI NELLE SCUOLE MEDIE

DIRETTO DA

ALBERTO CONTI, PROF. NEL R. LICEO MICHELANGIOLO DI FIRENZE

CON UNA

SEZIONE STORICO-BIBLIOGRAFICA

PUBBLICATA PER CURA DI

GINO LORIA, PROF. NELLA R. UNIVERSITÀ DI GENOVA

UNIV. OF
CALIFORNIA

ANNO XXIV DALLA FONDAZIONE - ANNO VII NUOVA SERIE - 1928

(ANNO VI DELL'ERA FASCISTA)

.... Volgere i progressi della Scienza a beneficio de la Scuola.

FRATTINI

STAMPATO A BOLOGNA

DALLA TIPOGRAFIA CUPPINI

Via Castiglione, 6a

1928

Digitized by Google

QA1
P36
v.24-25

UNIV. OF
CALIFORNIA

Digitized by Google

La figura di Alessandro Volta, un secolo dopo

Conferenza del Prof. LUIGI VOLTA

(Direttore dell'Osservatorio Astronomico di Pino Torinese) (*)

Venire dinnanzi a un uditorio così eletto, nella coltissima Firenze, di cui il Podestà si chiama Antonio Garbasso e vi tiene cattedra di fisica, a parlare di Alessandro Volta sul tramonto dell'anno centenario, dopo tante e tra esse magnifiche commemorazioni, non è compito facile.

Mentre ringrazio il Direttorio del Gruppo Nazionale Fascista della Scuola dell'onore fattomi, procurerò di sopperire alla debolezza che mi viene dal non essere un fisico, coll'amore e la conoscenza delle cose voltiane che mi vengono dal sangue. Per la prima delle ragioni, e per' rispetto a chi mi ascolta, non mi inoltrerò troppo nel terreno strettamente scientifico; per il secondo dei motivi confido di poter almeno tentare — senza appassionata parzialità — un'illustrazione della figura del grande scienziato nostro, quale oggi si può e si deve vedere, a tanta distanza di tempo.

La prima meraviglia della vita di Lui è la sua stessa vocazione. Uno fra gli ultimi figli di genitori patrizi, ma

(*) (*N. d. D.*) Questa Conferenza fu tenuta a Firenze il 4 dicembre 1927 per iniziativa del Direttorio Provinciale fiorentino del Gruppo Nazionale Fascista della Scuola. La Conferenza suscitò un vero e proprio entusiasmo nel pubblico eletto, dinanzi al quale fu tenuta, e immediatamente fu espresso il desiderio che essa fosse presto pubblicata. Noi raccogliemmo questo desiderio procurandoci la cortese adesione del valoroso Conferenziere, al quale rinnoviamo i nostri ringraziamenti per il consenso che ci ha dato, e le nostre felicitazioni pel modo magnifico nel quale Egli ha commemorato il suo Grande Avo.

997136

Digitized by Google

non ricchi, dopo un' infanzia che ne fece temere tarde l' intelligenza e la parola, la sua fanciullezza invece già, vivida d' ingegno e fervida di studio, fu blandita e guidata dall' abile educazione gesuita pei campi letterarï. Tutte le condizioni di famiglia, di coltura, di ambiente intellettuale de' suoi primi anni, si può dire fossero agli antipodi dell' indirizzo scientifico. La vocazione voltiana per la scienza è adunque una prepotente voce interiore, è la fatalità stessa del genio, che affiora e sboccia pur in terreno arido o nemico.

Che se si volessero trovare le prime spinte esterne alle attitudini latenti del giovinetto, dovremmo citare due nomi: un sommo autore e un umile amico: il divino Lucrezio e il futuro canonico Gattoni, ottimo uomo, ma corrosivo cronista della sua città.

Il *De Rerum Natura*, come inspirò al Volta un poemetto giovenile scientifico latino, deve certamente ancor prima avergli rivelato il mondo della speculazione naturalistica attraverso l' estasi poetica e la musica del verso.

Il nostro Alessandro, respinte alfine le lusinghe del gesuita Bonesi, che lo voleva tra i suoi, e che gli predisse un avvenire obbrobrioso allorchè gli ebbe a sfuggire, passò, giovanetto sedicenne, coll' amico Gattoni, giorni lieti di vacanza a Gravedona sul lago di Como. Il Gattoni, cultore della fisica e appassionato sperimentatore e che ebbe poi il suo gabinetto nella torre presso il Liceo comasco, aiutò e incoraggiò il più giovane amico, sin che questi ebbe spiccato il suo volo sicuro.

Grande dev' esser stato l' entusiasmo del neofita e rapidi i suoi progressi nell' elettricità, se già a 18 anni egli corrispondeva col vecchio Nollet, principe degli elettrologi francesi e poco dopo coll' illustre Beccaria dell' Università torinese.

Uno dei primi documenti scientifici voltiani conosciuti è appunto una lettera a quest' ultimo, colla quale si apre il terzo volume dell'edizione nazionale, quello dell' Elettrostatica: in quella lettera leggiamo commossi una ingenua dichiarazione, che ha per noi tutto il sapore di una profezia; dichiara egli infatti *di aver genio per l' elettricità* e intende naturalmente di dire inclinazione.

Digitized by Google

Non voglio qui nemmeno abbozzare il quadro delle cognizioni elettriche allorquando il Volta entrò in lizza, nè riassumere la storia di quanto era stato compiuto in questo campo prima di lui: basti il dire che in fatto di teoria la confusione delle idee era grande e che fra di esse si contendevano il primato la ipotesi del fluido unico del Franklin e quella dei due fluidi del Symmer. Il Volta si accostò alla prima, così come fu in Italia sostenitore dei parafulmini frankliniani. In fatto di mezzi sperimentali, gli istrumenti principi erano la macchina elettrostatica e la bottiglia di Leida, inventata l'anno stesso della nascita del Volta, il 1745; ma gli esperimenti volgevano preferibilmente allo spettacoloso ed al giocoso e di siffatto andazzo non andarono immuni lo stesso Nollet e lo stesso Franklin: il primo stordisce colle scariche elettriche un'intera compagnia di guardie dinanzi al re; il secondo fa intervenire l'elettricità nei preparativi di un banchetto.

Rare le prove instituite con serietà d'intenti, per quanto ancora il Nollet tentasse di misurare la differenza di peso di un coniglio prima e dopo la sua elettrizzazione.

In un primo tempo il Volta, pur sperimentando e misurando, s'indugia volontieri in atteggiamenti filosofici: confida al Nollet il sogno di poter ricondurre nell'orbita delle forze newtoniane quelle elettriche; nelle prime pagine della sua prima memoria " *De vi attractiva ignis electrici* " accarezza lo stesso sogno, pensando alla possibile unità delle forze naturali: " *vires omnes ex uno eodemque principio consurgere* ". Atteggiamenti filosofici, di cui si può trovare l'inspirazione forse in Lucrezio, o forse in Epino, che pure aveva guardato al Newton per tentare la teoria matematica dell'elettricità, o forse infine nell'opera del Boscovich: " *Philosophiae naturalis redacta ad unicam legem virium in natura existentem* " del 1758, intesa ad una visione di sintesi scientifica e recentemente ristampata e ripresa in esame. Sull'ipotesi newtoniana trasportata nel campo dell'elettrostatica il fisico comasco ritornò, come vedremo, anche più tardi.

Colla sua prima memoria del 1769 ora citata egli tenta

Digitized by Google

una spiegazione sia del fenomeno di elettrizzazione per istrofinio, sia del fenomeno induttivo; demolisce nello spirito, se non ancora, per rispetto al maestro, nella forma, la teoria dell'*elettricità vindice* del Beccaria e pone infine, si può dire, le premesse e le basi di quasi tutta la sua futura attività semisecolare nel campo elettrostatico, la quale si svolgerà poi logica, serrata, condotta con una mirabile unità di pensiero.

Nella stessa memoria, considerando il contatto come il caso limite dello strofinio, avanza già timidamente l'ipotesi che da esso contatto debba generarsi elettricità, ipotesi che poi esplicitamente dichiarerà in una nota autografa quasi di certo contemporanea al condensatore, vale a dire dell'82, due lustri avanti l'inizio della polemica col Galvani.

Queste divinazioni del giovane ventiquattrenne furono rilevate dal prof. Massardi — il modesto quanto valente collaboratore nostro dell'edizione nazionale — il quale ha pure messo in luce meridiana come nel *De vi attractiva*, dall'esatta interpretazione del gioco dei dielettrici, risulti già tratteggiato il concetto di tensione elettrica, enunciato poi nettamente in una lettera del 1778 al Saussure e si scorgano i germi delle future scoperte dell'elettroforo e del condensatore.

Torna egli nel 71 sulle proprietà e sul comportamento dei coibenti, descrivendo in una seconda memoria una sua macchina elettrica a disco di carbone abbrustolito; nel 74 i suoi meriti scientifici, ormai riconosciuti, gli procurano la nomina a reggente delle scuole governative di Como.

L'anno successivo registra l'invenzione dell'elettroforo: un dielettrico interposto fra due armature, di cui l'una elettrizzata, l'altra a terra, si elettrizza e mantiene sulle facce opposte le cariche opposte; invertendo l'esperimento, il Volta elettrizza le armature per mezzo del coibente e crea l'elettroforo perpetuo, nel quale, com'egli stesso dice, ha stampato un'elettricità che non s'estingue più mai o, piuttosto, ch'egli insegna a rinvigorire; crea cioè lo schema delle macchine tutte a induzione, dal duplicatore del Belli a quella del Whimshurst.

Il conte di Firmian, governatore della Lombardia, che

Digitized by Google

segue e incoraggia i progressi del giovane scienziato, in quello stesso anno lo promuove professore di fisica nelle scuole comasche.

E tosto l'anno dopo, nel 1776, il Volta scopre il metano o gas delle paludi nei canneti del lago Maggiore. Nella confusione delle teorie chimiche del tempo, egli non giunge a definire esattamente la composizione chimica del nuovo gas, per quanto più tardi sarà uno dei primi ed accogliere la riforma radicale e geniale del Lavoisier. Ma quella scoperta, quasi contemporanea a quella dell'ossigeno (aria deflogisticata) e dell'idrogeno (aria infiammabile o metallica), generò la pistola elettrica, la lampada perpetua, che ebbe momenti di popolarità specialmente in Germania. l'accendilume elettrico e sopratutto l'eudiometro nel 1777 e tutta una serie di studi nei quali aerologia e chimica si alternano coll'ausilio di accorgimenti fornitigli dalla prediletta elettricità; studi che sono raccolti nel sesto volume dell'edizione nazionale.

Coll'eudiometro in particolare, ch'egli seppe ridurre un vero strumento di aerometria, si provò, per mezzo della scintilla elettrica, a combinare il metano e l'idrogeno coll'aria comune, cercando le proporzioni più opportune, in seguito tentò le stesse prove coll'idrogeno e coll'ossigeno, sfiorando, senza raggiungere, la sintesi dell'acqua, due anni prima del Cavendish: la conquista gli sfuggì per pura mancanza di mezzi: egli infatti non dispose della quantità di mercurio necessaria, come ebbe malinconicamente a confidare all'amico Landriani.

Pure del 77 è la famosa lettera al Padre Barletti, tante volte citata e riprodotta a prova che il Volta avesse sin d'allora adombrato il telegrafo. Si tratta della proposta di far sparare la sua pistola a Milano con una scarica, trasmessa da Como, della bottiglia di Leida attraverso una conduttura metallica — di cui si vede infatti nel disegno autografo la palificazione — e servendosi, per circuito di ritorno, del Naviglio. Bisogna dire per la verità che siffatti esperimenti di trasporto d'energia, piuttosto che di segnalazione a distanza, erano stati, non solo imaginati, ma realmente com-

Digitized by Google

piuti prima del Volta: dal Le Monnier e dal Franklin per esempio.

Secondo testimonianze assai serie però raccolte a Lazzate, una delle villeggiature voltiane, dall'on. Somajni, il grande fisico, nella sua vecchiaia, avrebbe esplicitamente predetto che grazie all'invenzione della pila si sarebbe parlato da Como a Milano.

L'aria infiammabile e l'eudiometro lo traggono l'autunno dell'80 nella vostra Firenze; a Pietramala, tra Bologna e Pistoia, saggia quelle esalazioni gassose; in Firenze mostra all'inglese Lord Cowper le esperienze eudiometriche, stringe relazione, fra gli altri, con Felice Fontana, direttore del Museo, e col Conte della Gherardesca.

Era questo il secondo dei parecchi viaggi compiuti dal Volta durante i fervidi cinque lustri dal 1777 al 1801; caratteristico e affatto moderno questo suo irrequieto desiderio di muoversi, di assorbire e diffondere, a volta a volta, cognizioni e ritrovati, di agitare nuove idee, fuori dal breve ambito del suo gabinetto.

In un periodo in cui i trasporti e quindi anche gli scambi intellettuali erano così lenti, le sue peregrinazioni, se furono una fatica facilmente superata dalla sua robustezza fisica, furono una ben feconda fatica per la sua opera scientifica.

Innumerevoli furono gli scienziati da lui per tal modo conosciuti, le amicizie strette di persona e continuate per corrispondenza, così come quelle stabilite invece da lungi dal commercio colturale e rallegrate e fatte poi più intime dalla voce viva: nominerò soltanto fra le più profonde e lungamente provate amicizie straniere del Volta quelle cogli svizzeri Senebier e Saussure, coll'olandese Van Marum, coll'inglese Priestley, col tedesco Lichtenberg.

Questo suo desiderio di viaggiare era secondato ora dal conte di Firmiam, ora dallo stesso Giuseppe II, come più tardi dal Bonaparte; altra prova delle agevolezze che il nostro fisico trovò sulla sua via.

Nel precedente viaggio del 1777 in Svizzera e in Germania, compiuto col comasco conte Giovio, egli s'incontra, per dire due soli nomi, coll'Haller e col Voltaire.

Digitized by Google

L'anno dopo della gita a Firenze, imprende la più lunga delle sue peregrinazioni, la quale dura ben tredici mesi; visita egli Svizzera, Germania, Belgio, Olanda; si ferma poi quattro mesi a Parigi, dove s'intrattiene col Franklin, col Buffon, col Lavoisier, col Laplace; tiene una conferenza a quel museo intorno appunto a' suoi studî aerologici di Pietramala e non sdegna infine di tornar scolaro, seguendo le lezioni del fisico Charles e del chimico Sage.

Passa poi in Inghilterra, dove vede il Priestley e il Watt — *il costruttore delle macchine a fuoco*, com'egli lo chiama in una lettera —: a Londra il Volta legge la sua celebre memoria sul condensatore.

Nell'estate-autunno dell'84, per quattro mesî percorre, collo Scarpa, Austria e Germania: nell'autunno dell'87 torna in Isvizzera: entusiasmato della vittoria dell'amico suo Saussure sul Monte Bianco, vittoria che inspirò lo stesso Pindemonte, offre allo scienziato alpinista un suo poemetto francese, ch'egli poi volge in versi italiani, non del tutto mediocri, se raccolsero una parca lode del severissimo Carducci.

L'ultimo viaggio del nostro elettricista si fu quello a cavaliere degli anni 800 e 801 per raccogliere gli allori della pila e partecipare poi col collega Brugnatelli ai Comizî di Lione: anche allora la sua assenza dalla patria durò quasi sei mesi.

Dopo questa digressione biografica, la quale del resto avrà servito a meglio lumeggiare la sua fisonomia di scienziato, torniamo addietro, a' suoi studi.

Nelle ancor slegate cognizioni di elettricità, fra l'incrociarsi delle ipotesi, nell'oscurità dei concetti fondamentali, il Volta stava portando ordine e chiarezza, e, ausilio prezioso, la misurazione.

Mentre non si sapeva esattamente quale grandezza elettrica si saggiasse cogli elettroscopi del Canton e dell'Henley, il Volta stabilisce con intuito e perspicuità i concetti di carica e di capacità e sovratutto di tensione: nessun più meritato omaggio adunque che quello di dare il suo nome all'unità di forza elettromotrice.

Digitized by Google

Citiamo qualche data fra le più memorabili: del 78 è la memoria sulla capacità dei conduttori, dove la teoria dell'induzione è svolta in modo perfetto e poi con esatta visione applicata alle nubi temporalesche.

In quell'anno egli sale, trentatreenne, la cattedra pavese, che doveva poi illustrare per circa sei lustri, portandovi l'ardore della gioventù, la facilità fascinatrice della parola il prestigio di abile e fecondo sperimentatore. Il gabinetto si arricchisce, gli scolari e gli uditori accorrono numerosi, talchè l'aula fu poi dovuta ingrandire.

Ma l'attività didattica non inaridice le indagini originali: le sue prove sperimentali elettrostatiche si moltiplicano e si affinano: egli crea nell'82 il condensatore, applica il condensatore agli elettroscopi, da lui perfezionati e ridotti a veri e proprï elettrometri, costruisce campioni di capacità. Colle sue misure di azioni elettrostatiche per mezzo della bilancia poi ritenta di provare la sua ipotesi sul comportamento newtoniano di esse, senza riuscirvi — vi riuscì invece il Coulomb ricorrendo alle azioni elementari e alla assai più delicata bilancia a torsione — e prelude all'elettrometro assoluto del Thompson.

Il decennio dall'82 al 91, precedente a quello epico della disputa galvaniana è il decennio della elettrometria, di cui il Volta è senza dubbio il fondatore: in quel decennio egli si foggiò le armi più formidabili, l'istrumentario più delicato per la lotta che l'aspettava.

È interessante notare che in questo stesso periodo la mente applicativa e il senso naturalistico del Volta lo trassero a saggiare idee, istrumenti e misure dell'elettrostatica nell'ambito pratico della meteorologia, a cimentare le sue teorie nel campo elettrico terreste.

E furono anche questi studï fecondi di meditazioni, di accorgimenti e di scoperte degni ancor oggi di ricordo: la sua ipotesi ad esempio sull'origine dell'elettricità atmosferica dall'evaporazione, le indagini sulle varie altre forme di produzione naturale di elettricità, l'applicazione della punta all'elettrometro condensatore e della fiamma come collettori della carica elettrica dell'aria, le teorie sulla grandine e sul

Digitized by Google

periodo dei temporali. Reciprocamente la sua attività nella meteorologia elettrica — illustrata specialmente nel vasto ciclo di lettere al Lichtenberg — è cagione od occasione di ulteriori avanzamenti nell'elettrometria.

Narrare qui ora anche una volta, e sopratutto dopo la magnifica sintesi fattane con dati nuovi e notizie curiose a Como dal Senatore Garbasso, la polemica fra il Volta e il Galvani sarebbe veramente superfluo. È una pagina di storia questa, su cui non occorre più ormai insistere, perchè ammessa senza discussione, seppure le scintille di quella battaglia cortese non sono spente ancora e ancora fervono discussioni e prove sulla teoria voltiana del contatto.

Basti adunque riassumerne le vicende salienti, tanto che non resti un'imperdonabile lacuna nel mio quadro. Il Volta ripete subito nel 1791, quasi incredulo, le stupefacenti esperienze del Galvani colle rane, ma si arrende tosto all'evidenza sperimentale, si entusiasma alla scoperta dell'anatomista bolognese e ne accoglie la spiegazione per mezzo dell'ipotesi dell'elettricità animale. Ma riprende ben presto a dubitare e al dubbio lo spinge il fatto che sia necessario un arco bimetallico perchè le contrazioni della rana si producano. Un anno dopo, cioè già nel 92, il Volta prende nettamente posizione contro la teoria galvanica e afferma la proprietà degli accoppiamenti di conduttori dissimili di *muovere*, com'egli dice, l'elettricità, contrappone cioè apertamente a quella dell'elettricità animale la teoria sua del contatto. Già in quell'anno, a prova della sua idea, perviene a costruire la coppia elettromotrice, pur nella forma tipica di quella che fu poi la pila a corona di tazze.

La disputa si fa sempre più ardente, l'attività del Volta sperimentatore e scrittore sempre più intensa. Egli saggia i conduttori più diversi, li classifica secondo le sue misure in due classi, li ordina in differenti specie entro quelle classi, moltiplica e varia esperienze e prove; ribatte alle ragioni e alle prove avversarie, rivolgendosi al Cavallo, al Tomaselli, al Vassalli Eandi, al Mocchetti, al Landriani, al Van Marum, al Gren, ora con brevi lettere, ora con ampie vivacissime memorie.

Digitized by Google

Nel 1797, invocando un'esperienza del dr. Eusebio Valli, ch'era riuscito a far convellere la rana senza interposizione di metallo alcuno, il Galvani mena gli ultimi vigorosi colpi al Volta, che risponde allora anonimo, difendendosi da maestro spiegando colla sua teoria anche questo esperimento, sia pure facendo lealmente qualche concessione.

Nel 98 muore il glorioso antagonista di Bologna; verso la fine del 99 il Volta compie quello ch'egli chiama e fu veramente " *il gran passo* „, che superò l'abisso fra la coppia metallica e la pila; l'accorgimento atto a evitare l'elidersi dello squilibrio di tensione fra coppia e coppia, efficace a moltiplicarlo per quanto è il numero delle coppie, fu la semplice interposizione fra l'una e l'altra di un conduttore umido o della 2ª classe, cioè dell'umile dischetto intriso di acqua acidula.

La pila era costruita: l'annuncio ufficiale fu mandato dal Volta a Sir Banks, presidente della Società Reale di Londra, il 20 Marzo dell'800. Il mondo si commosse e si intereressò all'invenzione maravigliosa come forse non mai sino allora: i fisici, primi tra essi il Nicholson e il Carlisle, impresero con ardore a studiare il nuovo apparecchio, giungendo subito all'elettrolisi e ben presto all'incandescenza dei metalli e all'arco voltaico.

Mi guarderò bene dal tentare nemmeno l'enumerazione dei progressi nati dalla pila ai compatrioti del Pacinotti, del Ferraris e del Marconi, nel secolo delle grandi centrali elettriche e della radio.

Nè vale la pena di soffermarsi a rilevare l'ignoranza di chi scrive o disse — lo intesi ripetere anche quest'anno — che il Volta trovò per caso la pila; egli invece, come afferma il Somigliana, " *l'ha chiaramente prevista, sapientemente preparata, fortemente voluta* „. Nemmeno vale la pena di rilevare l'insinuazione che l'inventore non abbia compresa la portata della sua invenzione; se, com'è ovvio, non poteva umanamente prevederne il gigantesco sviluppo, solo la sua modestia può quà e là trarre in inganno al riguardo; basta del resto leggere le ultime pagine del secondo volume dell'edizione nazionale, per persuadersi com'egli avesse — sovratutto dal

Digitized by Google

punto di vista teorico, del quale ha sempre fatto il maggior conto in ogni suo ritrovato — alta e sicura la coscienza della sua conquista.

In quelle pagine piuttosto è interessante notare con quanta filosofica rassegnazione egli constati come nemmeno l'invenzione della pila avesse ridotti alla resa i galvanisti più cocciuti e, possiamo aggiungere noi, quanti non l'abbiano seguito e capito — non ostante il suo pertinace e vigoroso martellare sopra alcuni pochi chiari concetti — anche fra gli stessi amici suoi: Il Vassalli Eandi e Felice Fontana ad esempio.

Nel 1804 dettava egli perciò al prediletto scolaro Baronio, perchè la presentasse in proprio nome a un concorso dell'Accademia di Modena, la poderosa memoria sull'" *Identità del fluido elettrico col fluido galvanico* „ la quale, si stenta e crederlo, non fu premiata da quei giudici galvanisti; essa è come la sintesi dell'immortale opera sua nel campo dell'elettromozione e il suo testamento scientifico. Memoria che fu lungamente attribuita al successore del Volta, il non commendevole abate Configliachi, per la forma subdola con cui fu da lui pubblicata; la paternità voltiana, primamente dimostrata dal Magrini, valente studioso dei manoscritti del grande, fu nuovamente consacrata con prove documentarie dal sacerdote Achille Ratti, ora S. S. Pio XI.

La storia della disputa col Galvani e degli studi sull'elettromozione non ci direbbe ancora tutta l'attività voltiana nel luminoso e fervido decennio che si chiude colla pila, chè anzi egli trovò genio e lena per due scoperte in tutt'altro campo, le quali, per importanza teorica, solo si possono accostare alle sue maggiori nel dominio dell'elettrostatica.

Parlo della priorità del Volta sul Gay Lussac nello stabilire che l'aria e il vapore elastico dell'acqua si dilatano uniformemente e nella stessa misura col crescere della temperatura e nel fissare il relativo coefficiente — legato, com'è noto, collo zero assoluto — più esattamente di quanto non abbia saputo fare dopo di lui il Gay Lussac stesso; meriti questi grandissimi ove si ricordi la confusione di idee e la ridda di numeri affatto discordi che imperversava al riguardo.

Digitized by Google

La memoria dal Volta in argomento è del 1793, quella del Gay Lussac all' Istituto Nazionale è del 1802.

E parlo ancora della priorità del Volta sul Dalton nell'enunciare le leggi sulle tensioni dei vapori: il primo le aveva comunicate nella terza lettera sull'elettricità animale al Vassalli nel 1795, pubblicata negli Annali del Brugnatelli; il Dalton le comunicò nel 1801 alla Società letteraria e filosofica di Manchester.

Tuttociò risulta già dalla vecchia edizione delle opere Voltiane del 1816-17, dovuta al marchese fiorentino Vincenzio Antinori; tutto ciò, ancor meglio documentato, risulterà nel settimo Volume dell'Edizione nazionale.

Gli italiani non debbono più ignorare e dovranno in ogni occasione, e prima di tutto nei testi scolastici, rivendicare questa spesso dimenticata duplice gloria del Volta, colla quale mi piace di chiudere la sommaria rassegna dell'opera Sua. In Lui troppo spesso, abbagliati dalla luce sfolgorante della pila, si vede soltanto l'inventore di questa o tutt'al più l'elettricista sagace dell'elettroforo e del condensatore, il teorico dell'elettrostatica; pure la meteorologia, l'elettrometria, l'aerologia colle leggi ora ricordate basterebbero a renderne immortale il nome nella Fisica.

L'apogeo della carriera scientifica del Volta coincide colle sue tre famosissime letture sulla pila all'Istituto di Parigi, col trionfo che ne seguì, consacrato dal rapporto firmato dai più bei nomi della Francia scientifica, dagli onori che il primo console e più tardi l'imperatore dei francesi gli tributò, conferendogli il laticlavio e la corona comitale.

Il Biot afferma — e ripete senza alcuna competenza il Cantù — che subito dopo la pila la mente del Volta si inaridisce e la sua attività scientifica si arresta senz'altro. Già il figlio Luigi rintuzzò energicamente l'affermazione di questo fra i meno benevoli biografi voltiani: a noi basti del resto ricordare la già citata vasta memoria dell'804, la viva parte presa da lui ai primi studi sulla pila e tutta una serie di discorsi accademici e di disssertazioni sino al 1817, fra le quali notevolissima quella sulla formazione della grandine;

Digitized by Google

dopo la pila anzi il nostro fisico riprese i suoi studi di elettrostatica.

È verissimo che il ritmo della sua attività di scienziato si andò dopo l'801 rallentando e si potrebbe osservare col Maffi che anche il Manzoni tacque dopo i Promessi Sposi; ma è falso che questa minor lena e il successivo silenzio fossero conseguenza di vecchiezza mentale, come l'Arago stesso nel suo magnifico elogio mostra in parte di credere.

Il Volta sin presso gli ultimi anni — egli sopravvisse poco meno di un trentennio alla pila — conservò mente lucida e salute soddisfacente per l'età.

Ma dopo tanta intensità di lavoro, dopo tante vittorie, dopo l'inestimabile dono fatto al mondo, a poco a poco sentì bisogno di riposo e si andò raccogliendo sempre più intimamente in seno alla famiglia teneramente amata, prendendo viva parte all'istruzione dei figli, missione a lui dolce e ritenuta non indegna di sè. Tuttociò è umano e simpatico e si spiega perfettamente, leggendo le righe che, nelle giornate inebbrianti di Parigi del 1801, egli scriveva alla moglie, anelando alla pace serena della sua casa.

A un secolo dalla morte del Volta, dopo che tanta storia nel mondo degli studï si è andata accumulando e metodi e scuole si sono andati avvicendando, possiamo pure fare tranquillamente giustizia di un'altra accusa del Biot: che cioè la capacità sua di teorico fosse irrimediabilmente indebolita dalla mancanza di fondamenti di matematiche superiori.

Se anche in questa accusa c'è un substrato di verità, in quanto il fisico comasco non era infatti padrone dei mezzi analitici e rifuggiva in generale dalle formole, chi studiò l'opera voltiana, dal Cantone al Somigliana, riconosce a lui senz'altro una mente atta a cogliere e trattare i rapporti fra grandezze e fenomeni, servendosi della speculazione pura in luogo del meccanismo analitico, riconosce cioè in lui una mente fondamentalmente matematica, anzi geometrica. Tanto è vero che egli, con semplici procedimènti aritmetici, condotti sui dati delle sue geniali esperienze elettrostatiche, giunse a risultati consacrati poi dalla teoria matematica del potenziale, come dimostrò il prof. Massardi.

Digitized by Google

L'abilità somma nell'imaginare e compiere esperimenti; la tenacia nel ripeterli, variarli e affinarli, l'avere inoltre introdotto la misurazione nel dilettantismo sperimentale e questa lucidità e semplicità nell'interpretazione dei fenomeni osservati e delle prove tentate, il rigore della deduzione, la prudenza nell'induzione sono le caratteristiche del suo metodo vittorioso e del suo genio sicuro. Egli, in un periodo così fantasioso nel foggiare teoriche nuove e nel creare fluidi misteriosi, rifuggì dalle ipotesi e si sforzò, teorizzando, di aderire il più intimamente possibile alla realtà osservata.

Un'altra caratteristica sua si fu quella di riprendere da principio le questioni, raramente accogliendo senz'altro e talora — per la difficoltà degli scambi intellettuali — ignorando il contributo portatovi da altri; si ritrova in questo suo abito l'autodidatta, donde la provvidenziale originalità del suo pensiero e de' suoi atteggiamenti.

Il Volta fu scrittore facile e corretto, spesso elegante; alla larghezza però con cui, si disse, diffondeva colla penna idee e ritrovati, si accompagna un' invincibile tendenza alla prolissità, della quale egli stesso si accusa; prolissità da un lato non disforme dalla moda dei tempi, dall'altro riflesso perdonabile della sua minuzia di sperimentatore e del suo scrupolo di ragionatore. Raramente i suoi scritti hanno il carattere di sintesi; quasi sempre egli ama accompagnare il corrispondente o il lettore attraverso le vicende del suo travaglio sperimentale e speculativo; il suo stile perde così in brevità e in snellezza, guadagna però spesso in interesse, direi drammatico, e in efficacia di persuasione.

A queste doti mentali facevano riscontro doti morali nobilissime di lealtà e di serenità, cosicchè non v' ha traccia nella sua vita di quelle diatribe indecorose non rare a' suoi tempi e fra gli stessi colleghi suoi: nella disputa col Galvani, nell'affermare la priorità o la genuinità delle sue scoperte (come ad esempio quella dell'elettroforo impugnatagli dal Klinkosch) fu sempre pacato e misurato.

Siamo così venuti a toccare un poco, oltre che dello scienziato, dell'uomo. Molto già ci dice sotto questo riguardo

Digitized by Google

appunto la sua figura di studioso; la stessa mitezza, la stessa bonarietà troviamo nella sua vita privata e intima. La forza cosciente del suo genio, la gagliardia sana del suo fisico temprato negli esercizi del corpo, la soddisfazione per le conquiste intellettuali conseguite, spiegano, almeno in parte, questa bontà semplice e gioviale, non guasta mai dal tarlo del tormento intellettuale.

Insieme a questi, che sono i lineamenti essenziali dell'uomo, basta ricordare la sua sincera religiosità e il suo profondo amore alla famiglia, formatasi presso la cinquantina, per averne il ritratto schietto e intero.

Ma i biografi amano frugare nelle piccole vicende dei grandi uomini, fantasticandovi sopra secondo la visione propria e colorendole del colore delle proprie idee, col pretesto di ricostruire per ogni verso la loro figura e di ricercare persino le ragioni supreme dei loro successi.

Se tali procedimenti possono talora giustificarsi o dar frutti, quando si studino letterati e artisti, ben di rado approdano ad alcun che di serio quando si studino scienziati, tanto più che questi biografi, in generale letterati, mancano di ogni competenza scientifica.

Così accadde, in misura non grave in vero, anche al Volta: qualche biografo esagerò la pietà religiosa di lui, facendone quasi un santo o un bigotto; ed è un peccato che si siano così deformate le linee severe e rispettabili della sua fede.

Altri all'opposto, collegando accenni staccati e insignificanti suoi, di amici e di maldicenti, volle fare del Volta poco meno che un gaudente: altra stolta contraffazione: egli fu giovane e non fu un anacoreta; amò la buona società, i buoni spettacoli, i piacevoli conversari, ma basta pensare alla sua maravigliosa attività scientifica per giudicare certe accuse.

E che dire dell'Arago, pur suo ammiratore, che gli rimprovera le innocenti freddure, come se proprio il Volta ne facesse gran conto?

Ci fu persino chi parlando de' suoi peccati poetici — ne abbiano citato qualcuno, oltre ai sonetti per nozze e per vestizione non privi di garbo — osò affermare che il Volta

Digitized by Google

avrebbe potuto diventare un grande poeta; ma fu senza dubbio somma fortuna che l'umanità, per acquistare il fisico, abbia perduto il poeta.

Avendo egli vissuto in tempi così procellosi, tra il frastuono di guerre e il succedersi di regimi e di padroni diversi, è naturale la curiosità di sapere se e quanto siffatti commovimenti abbiano disturbato la sua quiete studiosa, se e quanto egli si sia interessato a quelle vicende.

Si può rispondere che, pur sollecito sempre del bene della patria, ossequente sempre al potere costituito, riconoscente a chi favorì i suoi studi e sopratutto a Napoleone, egli non conobbe però la passione politica, nè i rivolgimenti politici lo distolsero gran che dalle sue indagini; assorto nel suo alto sogno e nel suo lavoro accanito, e, fors'anco, filosoficamente convinto della caducità della potenza e dell'incostanza delle fortune, rimase in disparte.

Non perciò, chiamatovi dai governi per l'altezza dell'ingegno e la nobiltà del carattere, si sottrasse alle cariche e alle funzioni ufficiali nell'Università di Pavia, nei Comizi di Lione, nel Senato di Milano, nel suo Dipartimento del Lario, portandovi con dignità e fermezza il contributo dell'opera e della parola.

A torto quindi lo si accusò addirittura di insensibilità politica e di assoluto assenteismo: l'Arago vuol fare semplicemente dello spirito quando lo paragona al Newton, il quale, dicesi, aprì bocca una sol volta in parlamento per far chiudere una porta, affinchè non si raffreddasse un collega che parlava. Basterebbe citare l'energica opposizione del Volta al calendario repubblicano del Rasori all'Università pavese; basterebbe citare la procellosa seduta del Senato di Milano che precedette il tumulto finito col massacro del ministro Prina e nella quale il Volta parlò coraggiosamente in favore del Beauarnhais.

La vita del Volta fu accompagnata da una stella benigna; alla fortuna che lo secondò non furono estranei il suo carattere buono, che disarmò i nemici, nè le sue conquiste che

Digitized by Google

gli procacciarono il favore dei potenti; ad essa contribuirono infine i tempi in pieno rigoglio di rinascita scientifica.

Gli fu benigna la gloria, che lo sollevò ancor vivente così alto fra gli uomini, come raramente accadde ai più grandi: lo circondarono di affetto e di reverenza la famiglia e la città natale. L'unico fiero colpo che gli fece sanguinare il cuore fu la morte del secondo de' suoi tre figli maschi nel fiore dell'età e di promettentissimo ingegno.

Nella città diletta Alessandro Volta si spense dolcemente e piamente il 5 Marzo del 1827, lo stesso giorno dell'amico suo grande Simone de Laplace.

L'anno centenario del placido tramonto di chi aveva dato al mondo un'energia nuova sta per finire: le cerimonie ufficiali anzi sono già chiuse: giova, io credo, dopo il mio tentativo di rievocare questa fra le più schiette e serene figure della genialità latina, accennare al carattere delle più significative onoranze voltiane e ai frutti che non ne debbono andar perduti.

Anzitutto è confortevole ricordare il risveglio degli studi voltiani e fra questi in prima linea si deve additare la conclusione di un'impresa di lunga lena, la quale è un dovere assolto dall'Italia scientifica verso Alessandro Volta ed insieme il suo monumento più degno: voglio dire dell'edizione nazionale delle sue opere, di cui cinque volumi sono usciti e gli ultimi due sono sotto i torchi.

Il nipote omonimo, professore di fisica, durante il centenario della pila l'aveva invocata e proposta al congresso degli elettricisti; ad essa preparò poi il terreno riordinando e classificando la preziosa e ricca raccolta dei manoscritti voltiani conservati all'Istituto Lombardo, il quale, coll'Accademia de' Lincei, ebbe dal governo l'incarico di apprestare l'edizione stessa.

Il pregio di questa sta non solo nell'ordinamento per discipline e nella compiutezza del materiale edito, ma ancora nella notevole parte fatta, se pure sobriamente scelta, al materiale inedito di quei manoscritti e infine nelle accurate annotazioni bibliografiche e nella veste tipografica assai de-

Digitized by Google

corosa. Resta ancora, a vero dire, a pubblicarsi la parte riguardante l'epistolario — pure di carattere prevalentemente scientifico — la quale costituirà un'appendice integrativa degli altri volumi.

Sotto gli auspici della stessa R. Commissione per l'Edizione nazionale l'Istituzione Leonardo pubblicò quest'anno un'ampia guida bibliografica voltiana, compilata dal prof. Felice Scolari di Como.

Due delle maggiori organizzazioni elettrotecniche italiane, con geniale pensiero, curarono ad onore del Volta due volumi di indole diversa: il primo è una raccolta di dissertazioni sui problemi più notevoli nati colla pila, dettate dai migliori fisici ed elettricisti nostri; l'altro è un'edizione sintetica delle opere voltiane a guisa di antologia, ordinata dal prof. Massardi sulla edizione nazionale e corredata da monografie illustrative di questa.

Fra le onoranze voltiane di carattere stabile è giusto ricordare il tempio voltiano eretto in Como dalla illuminata munificenza dell'on. Somajni, dove saranno custoditi i cimeli del museo comasco e una raccolta di apparecchi voltiani ricostruiti con scrupolo scientifico.

Anche il cartellario voltiano dell'Istituto Lombardo ha avuto finalmente sede e custodia degne nelle salette restaurate con severo gusto artistico, negli scaffali appositamente costruiti, insieme a una biblioteca voltiana che si va arricchendo.

Se Como ha una volta ancora dimostrato il suo orgoglioso e geloso amore per il nome del Volta colla duplice esposizione e colle manifestazioni più varie, senza dubbio la massima fra di esse fu l'omaggio resogli da' suoi successori, venuti da ogni parte del mondo: i fisici e gli elettricisti più insigni parteciparono a questa che fu veramente un'apoteosi. Como e Pavia udirono la parola più alta sugli ultimi appassionanti problemi della fisica; a Como Antonio Garbasso commemorò da par suo il Maestro, a Roma Guglielmo Marconi chiuse il solenne congresso con una alata rievocazione voltiana.

Giova pure ricordare che a Pavia, nell'aula stessa di

Digitized by Google

Alessandro Volta, il Congresso consacrava con un voto di autorità senza pari, proposto dal suo successore Alessandro Amerio, il contributo del fisico comasco alle leggi sulla dilatazione dell'aria e del vapor d'acqua e sulla tensione dei vapori; di questa consacrazione non piccolo merito va dato al prof. F.co Grassi di Milano, che sulla duplice questione fece uno studio esauriente.

È a sperarsi che l'edizione nazionale, l'accennato risveglio di studi voltiani, le varie pubblicazioni e commemorazioni di quest'anno centenario abbiano contribuito a divulgare una più adeguata figura del fisico sommo: non sempre gli uomini famosi sono i più compiutamente conosciuti: di essi facilmente si coglie e si serba il carattere saliente, la maggiore conquista, come avviene per il Volta.

Ma oltre a ciò queste onoranze vaste e solenni, che salgono da tutta una nazione o da tutto il mondo verso i nomi solari della storia del pensiero, hanno un significato e una portata che trascendono la solita cronaca e l'osservazione superficiale.

L'umanità che pensa e avanza sente tratto tratto il bisogno di soffermarsi a misurare il cammino percorso e sono quei fari luminosi che le danno quella misura, che le inspirano nuova lena ad ascendere ancora.

Per noi italiani in particolare, l'incitamento che ci viene dal centenario voltiano deve essere più possente e più pungente, accresciuto e acuito dal giusto orgoglio di sapere che una di quelle fulgide luci fu accesa dal genio della nostra stirpe; della nostra stirpe, la quale non mai come oggi, per merito della vittoria e per virtù del suo Duce, si è sentita sicura del suo avvenire e pari ad ogni più superba speranza.

Digitized by Google

Sulle varie dimostrazioni elementari del Principio d'identità dei polinomi

di I. MATILDE CHIAPPELLO (Palermo)

Mi propongo in questo lavoro di fare uno studio critico e didattico sui vari metodi elementari di dimostrazione del *principio d'identità dei polinomi* (razionali interi in una variabile).

1. - *Le due forme del principio.*

Tale principio si suole presentare sotto due aspetti.

Nella forma, che per brevità diciamo *ordinaria*, esso si enuncia così:

Un polinomio ridotto P(x) *se è uguale a zero* (*ossia prende sempre il valore zero per* **qualsivoglia** *valore della* x) *è identicamente nullo* (*vale a dire ha nulli tutti i termini*).

Nella seconda forma, che diciamo *complementare* il principio si enuncia:

Un polinomio P(x) *non nullo e di grado* n, *non può assumere il valore zero per più di* n *valori distinti attribuiti ad* x.

Questa seconda forma implica evidentemente la prima.

2. Parecchi autori dimostrano il principio dopo di avere trattato della divisione dei polinomi e precisamente come conseguenza della proposizione:

Se un polinomio P(x) *si annulla per* x = a, *esso è divisibile per* x — a;

dalla quale si trae che:

Se un polinomio P(x) *si annulla per* n *valori* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *distinti della* x, *esso è divisibile per il prodotto*

$$(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n).$$

Si stabilisce allora *l'identità*

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots\ldots(x - a_n)\,Q(x),$$

Digitized by Google

si dimostra cioè, che esiste un polinomio $Q(x)$ tale che il prodotto a secondo membro risulti identico a $P(x)$.

Allora, se n è il grado del polinomio $P(x)$, si trae che $Q(x)$ è di grado zero, e il secondo membro, e quindi $P(x)$, non può annullarsi per nessun valore di x che sia diverso da $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$. Così facendo, bisogna tenere distinti per tutta la teoria delle operazioni sui polinomi, i due concetti di *equivalenza* e di *identità*, il che non offre, specialmente dal lato didattico, alcun vantaggio nè per la chiarezza, nè per la semplicità.

Mi propongo quindi di esaminare quelle dimostrazioni del principio d'identità che possono premettersi alla teoria delle operazioni e mi occuperò innanzi tutto di quelle che si riferiscono al principio sotto la forma ordinaria.

§ 1. Dimostrazioni del principio d'identità sotto la forma ordinaria.

3. - Fra le dimostrazioni più antiche del principio di identità sotto forma ordinaria è da considerarsi in primo luogo questa, che può leggersi ad es. nell'*Algebra elementare* del Prof. Catania (Catania, 1908, Ed. Giannotta, pag. 227).

Nel polinomio P(x) *si può supporre* x *positivo e talmente grande che il valore assoluto di* a_0x^n *sia maggiore della somma dei rimanenti termini.*

Il coefficiente a_0 si può supporre positivo, altrimenti si cambiano i segni ai termini del polinomio.

Se gli altri coefficienti si sostituiscono col massimo dei loro valori assoluti, e questo è p, la somma

$$px^{n-1} + px^{n-2} + \ldots\ldots + px + p \qquad (1)$$

sarà o eguale alla somma dei rimanenti termini di $P(x)$, tolto il primo, o sarà maggiore.

Basta dunque provare che può assumersi x in modo che a_0x^n sia maggiore della somma (1) per dimostrare il teorema.

Digitized by Google

Ora scelto x maggiore di ciascuno dei numeri $1, \frac{np}{a_0}$ si ha:

$$x^n > \frac{np}{a_0} x^{n-1},$$
$$x^n > \frac{np}{a_0} x^{n-2},$$
. . . . . .
. . . . . .
$$x^n > \frac{np}{a_0} x,$$
$$x^n > \frac{np}{a_0}.$$

Sommando queste n diseguaglianze membro a membro, e poi dividendo per n si ottiene:

$$a_0 x^n > px^{n-1} + px^{n-2} + \ldots\ldots + px + p, \quad \text{c. v. d.}$$

Da questa proposizione il principio d' identità si deduce nel seguente modo.

Sia $P(x)$ eguale a 0, per qualsivoglia valore di x, e ammettiamo per un momento che sia $a_0 \neq 0$.

Allora per $x \neq 0$ non può essere nullo il termine $a_0 x^n$, nè può essere nulla la somma S degli altri termini del polinomio $P(x)$:

$$S = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_n$$

dovendo essere nulla la somma di questa con $a_n x^n$.

Ora, per il lemma, si può attribuire ad x un valore positivo talmente grande che $a_0 x^n$ superi S.

Per un tale valore di x, $a_0 x^n + S$ ossia $P(x)$ non può annullarsi contro il supposto.

L' ipotesi $a_0 \neq 0$ non è dunque accettabile.

Questa dimostrazione richiede varie premesse e considerazioni e non può riuscire facile ad alunni appena avviati alle nozioni di algebra; la forma stessa è poi alquanto artificiosa e richiede uno sforzo di memoria.

4. - Una dimostrazione analoga alla precedente, ma più

Digitized by Google

complessa è quella riportata, ad es. nell'*Aritmetica ed Algebra* dei Prof. NICOLETTI e SANSONE (Napoli 1924, F. Perrella, vol. 1°, pag. 143). Essa si fonda sul seguente lemma.

Sia

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n$$

un polinomio di grado n, ($a_0 \neq 0$) *ordinato per le potenze decrescenti di* x.

Per

$$x \geqq 1 + \frac{|a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots\ldots + |a_n|}{|a_0|}$$

il polinomio assume sempre valori diversi da zero, che hanno lo stesso segno del primo coefficiente a_0.

Fondandosi su questo lemma la dimostrazione è immediata:

Infatti, se un polinomio $P(x)$ è nullo, e il coefficiente a_0 del termine di più alto grado fosse diverso da zero, il polinomio, per il lemma precedente, assumerebbe quanti si vogliono valori non nulli, e ciò è contrario all'ipotesi; dev'essere quindi $a_0 = 0$, e perciò $P(x)$ identicamente nullo.

Questa dimostrazione è assai notevole, ma perchè possa riuscire adatta all'insegnamento si dovrebbe stabilire il lemma in modo facile e breve, e questo è ancora *in votis* (1).

---

(1) I Proff. NICOLETTI e SANSONE, ai quali abbiamo fatto conoscere la nota precedente, ci comunicano la semplificazione che segue del lemma che serve alla dimostrazione del *principio di identità*.

Osserviamo che questa dimostrazione in confronto a tutte le altre, *assegna*, dato un polinomio $P(x)$ non identicamente nullo, *un intervallo, nel quale il polinomio* P(x) *assume sempre valori diversi da zero.*

(NOTA DELLA REDAZIONE)

LEMMA I. — *Sia* A *un numero positivo arbitrario,* n *un numero intero positivo; vogliamo provare che per qualunque valore* $x > 1 + A$, *si ha la disuguaglianza:*

$$x^n > A\,(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1). \tag{1}$$

La (1) è evidente per $n = 1$; procediamo quindi per induzione ed, ammessa la (1) per il valore n, dimostriamola per il valore $n + 1$.

Digitized by Google

5. - Mediante considerazioni al limite si arriva rapidamente alla dimostrazione del principio d'identità (Cfr. ad es. *Gli elementi di Algebra* per gli Istituti tecnici del Prof. De Franchis (Palermo, R. Sandron, pag. 258, N. 341.

Sia $P(x) = 0$ per qualsivoglia valore di x.

Supponendo $x \neq 0$ dividiamo ambo i membri per x^{n+1}, sarà

$$a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots\ldots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{a_{n+1}}{x^{n+1}} = 0,$$

Dalla disuguaglianza

$$x > 1 + A$$

moltiplicando per x^n, che è positivo, abbiamo:

$$x^{n+1} > x^n (1 + A)$$

cioè

$$x^{n+1} > Ax^n + x^n. \tag{2}$$

Aggiungiamo ora ai due membri della (1) il termine Ax^n; ponendo in evidenza nel secondo membro il fattore A abbiamo:

$$Ax^n + x^n > A(x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1),$$

e da questa e dalla (2) segue:

$$x^{n+1} > A(x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1)$$

che è la (1) stessa cambiandovi n in $n + 1$. La (1) è dunque vera in generale.

Lemma II. — *Sia*

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \tag{3}$$

un polinomio di grado n *nella variabile* x, *col primo coefficiente uguale ad* 1, *e sia* A *il massimo valore assoluto dei coefficienti* $a_1, a_2, \ldots, a_n$; *proviamo allora che per* $x > 1 + A$ *il polinomio* P(x) *assume sempre un valore positivo.*

Si ha infatti per ipotesi:

$$a_i \geq -A \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

e moltiplicando ambo i membri per x^{n-i} che è positivo,

$$a_i x^{n-i} \geq -Ax^{n-i}$$

ed esplicitamente:

$$\begin{aligned} a_1 x^{n-1} &\geq -Ax^{n-1} \\ a_2 x^{n-2} &\geq -Ax^{n-2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1} x &\geq -Ax \\ a &\geq -A. \end{aligned}$$

Digitized by Google

per qualsiasi valore di x diverso da 0, e facendo tendere x ad ∞ si ha:

$$\lim_{x=\infty}\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots\ldots+\frac{a_n}{x^n}+\frac{a_{n+1}}{x^{n+1}}\right)=0.$$

Ma d'altro canto

$$\lim_{x=\infty}\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots\ldots+\frac{a_n}{x_n}+\frac{a_{n+1}}{x^{n+1}}\right)=a_0$$

perchè i limiti di $\frac{a_1}{x}$, $\frac{a_2}{x^2}$, ..., $\frac{a_{n+1}}{x^{n+1}}$, per $x\to\infty$ sono eguali a 0.

Si ricava dunque

$$a_0=0.$$

Questa dimostrazione presupponendo la teoria dei limiti, non è elementare.

Sommando queste disuguaglianze colla uguaglianza

$$x^n=x^n$$

abbiamo la disuguaglianza:

$$P(x)\geq x^n-A(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1),$$

e per il lemma I, il secondo membro è positivo; è dunque anche per $x>1+A$, $P(x)>0$.

Corollario. — *Sia*

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n, \qquad (a_0\neq 0)$$

un polinomio di grado n *nella variabile* x, *e si dica* A *il massimo valore valore dei rapporti* $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_0}, \frac{a_n}{a_0}$; *proviamo che per* $x>1+A$, *il polinomio* P(x) *assume un valore diverso da zero e del segno di* a_0.

Possiamo scrivere infatti

$$P(x)=a_0P_1(x)$$

con

$$P_1(x)=x^n+\frac{a_1}{a_0}x^{n-1}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n}x+\frac{a_n}{a_0};$$

e sarà per $x>1+A$, $P_1(x)>0$; quindi $P(x)$ non è nullo ed ha il il segno di a_0.

5 dicembre 1927.

O. Nicoletti e G. Sansone

Digitized by Google

6. - Una dimostrazione molto semplice è stata data dal Prof. Sannia (*Supplem. al Periodico di Matematica,* Livorno, marzo 1902), ed è riportata nelle lezioni di Analisi matematica elementare pei Licei, dei Prof. M. Cipolla e G. Mignosi (vol. 1°, 2ª ed. Catania, 1926, C. Galàtola, pag. 109). Se il polinomio $P(x)$ è di grado 0 al massimo, esso è uguale a un numero (indipendente da x), e questo, dev'essere eguale a 0, se $P(x)$ è uguale a 0; il principio d'identità è. dunque, vero se $P(x)$ è al massimo di grado 0. Ammettiamolo per un polinomio di grado $n-1$ al massimo, e dimostriamolo per un polinomio di grado n al massimo:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n \qquad (1)$$

Diamo ad x i valori K e $2K$, essendo K un numero arbitrario.

$$a_0 K^n + a_1 K^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1} K + a_n = 0,$$

$$2^n a_0 K^n + 2^{n-1} a_1 K^{n-1} + \ldots\ldots + 2a_{n-1} K + a_n = 0.$$

Sottragghiamo la seconda dalla prima moltiplicata per 2^n.

$$(2^n - 2^{n-1}) a_1 K^{n-1} + \ldots\ldots + (2^n - 2) a_{n-1} K + (2^n - 1) a_n = 0;$$

ciò vuol dire che il polinomio di grado $n-1$ al massimo, che si ottiene dal 1° membro mutando K in x, prende il valore 0 per qualsivoglia valore K attribuito ad x, ma allora esso è identicamente nullo. e però si ha:

$$a_1 = a_2 = \ldots\ldots = a_{n-1} = a_n = 0.$$

Il polinomio (1) si riduce, per conseguenza, ad $a_0 x^n$, e prende il valore 0 per qualsivoglia valore della x solo se $a_0 = 0$; esso è quindi identicamente nullo e la proposizione è dimostrata.

§ 2. Dimostrazioni del principio d'identità sotto la forma complementare.

7. - Stabilito il principio d'identità sotto la forma ordinaria e sviluppate le operazioni sui polinomi, vari autori

Digitized by Google

deducono dalla teoria della divisibilità il principio nella sua forma complementare nella maniera che abbia detto in principiò (art. 2).

Pochissimi autori (come il PINCHERLE e il PALMIERI nei loro trattati di Algebra) premettono alle operazioni una dimostrazione del principio nella sua forma complementare, e generalmente nel seguente modo.

Verificato il principio per i polinomi di primo grado ed ammesso che esso sia vero pei polinomi di grado $n-1^{simo}$, si considera un polinomio di grado n^{mo}:

$$P(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n ,$$

che assuma il valore zero per $n+1$ valori di x, fra loro diversi:

$$\alpha_0 , \alpha_1 , \alpha_2 , \ldots\ldots , \alpha_n .$$

Premesse le identità sulle differenze di due potenze simili:

$$\alpha_i^m - \alpha_0^m = (\alpha_i - \alpha_0)(\alpha_i^{m-1} + \alpha_0 \alpha_i^{m-2} + \ldots\ldots + \alpha_i^{m-1})$$

si considera la differenza $F(\alpha_i) - F(\alpha_0)$ che può mettersi sotto la forma seguente:

$$F(\alpha_i) - F(\alpha_0) = (\alpha_i - \alpha_0) \{ a_0 \alpha_i^{n-1} + (a_0 \alpha_0 + a_1)(\alpha_i^{n-2} + \ldots\ldots \{$$

e poichè essa è nulla, quando α_i è uno dei valori $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$, ed $\alpha_i \neq \alpha_0$, dovrà essere:

$$a_0 \alpha_i^{n-1} + (a_0 \alpha_0 + a_1) \alpha^{n-2} + (a_0 \alpha_0^2 + a_1 \alpha_0 + a_2) \alpha_1^{n-3} + \ldots\ldots = 0$$

Ora, questo è il valore del polinomio ordinato rispetto alla lettera x e di grado $n-1$

$$(1) \quad a_0 x^{n-1} + (a_0 \alpha_0 + a_1) x^{n-2} + (a_0 \alpha_0^2 + a_1 \alpha_0 + a_2) x^{n-3} + \ldots\ldots$$

quando ad x si attribuisce il valore α_i, quindi questo polinomio si annulla per gli n valori distinti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$ dati ad x, e questo è assurdo.

Tale dimostrazione riesce lunga per le premesse da fare al fine di porre nella forma indicata la differenza $F(\alpha_i) - F(\alpha_0)$, anticipando la dimostrazione della identità sulla differenza

Digitized by Google

delle potenze simili, alle quali riesce più comodo arrivare per mezzo della regola di Ruffini e quindi dopo la divisione.

8. - Due altre dimostrazioni del principio d'identità nella sua forma complementare sono state indicate recentemente dal Prof. La Barbera (Periodico di matematica, s. 4ª, v. V. 1, 1926, p. 188) entrambe per induzione come la precedente.

La prima è fondata sulla proposizione preliminare:

Tutti i polinomi ridotti di grado n *che si annullano per* n *valori della lettera ordinatrice hanno proporzionati i coefficienti dei termini di egual grado.*

Dimostrato, anzitutto, il teorema pei polinomi di primo grado ed ammesso che sia vero per tutti i polinomi di grado $n-1$, si stabilisce che lo è per qualunque polinomio di grado n.

Infatti, se i due polinomi di grado n:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n$$
$$b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + b_{n-1} x + b_n$$

si annullino per n valori diversi:

$$(1) \qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots\ldots, \alpha_n$$

della x, moltiplicando il primo per b_0 e il secondo per a_0 e sottraendo si ottiene il polinomio

$$(2) \qquad (b_0 a_1 - a_0 b_1) x^{n-1} + (b_0 a_2 - a_0 b_2) x^{n-2} + \ldots\ldots + (b_0 a_{n-1} - a_0 b_{n-1}) x + (b_0 a_n - a_0 b_n)$$

che si annulla per gli stessi n valori (1) della x.

Il Prof. La Barbera dimostra allora per assurdo che tutti i coefficienti di quest'ultimo polinomio sono nulli, supponendo che sia, per esempio, diverso da zero il primo e considerando questi altri due polinomi:

$$P = (x - \alpha_1)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4) \ldots\ldots (x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_n)$$
$$Q = (x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4) \ldots\ldots (x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_n)$$

Il polinomio P, di grado $n-1$, si annulla per gli $n-1$ valori di x:

$$\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \ldots\ldots \alpha_{n-1}, \alpha_n$$

Digitized by Google

E poichè anche il polinomio (2) si annulla per gli stessi valori, il polinomio (2) e il polinomio P hanno i coefficienti dei termini di egual grado proporzionali.

Analogamente il polinomio (2) e il polinomio Q, entrambi di grado $n-1$, hanno proporzionali i coefficienti dei termini di egual grado perchè si annullano entrambi per gli $n-1$ valori.

$$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots\ldots \alpha_{n-1}, \alpha_n.$$

Si conclude che i polinomi P, Q hanno proporzionali i coefficienti dei termini di ugual grado ed in particolare, risultano eguali i termini costanti; cioè:

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 \ldots\ldots \alpha_{n-1} \alpha_n = \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \ldots\ldots, \alpha_{n-1} \alpha_n$$

e semplificando:

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

mentre per ipotesi

$$\alpha_1, \alpha_2\ \alpha_3, \ldots\ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$$

sono diversi fra loro.

I coefficienti del polinomio (2) debbono quindi essere nulli;

$$b_0 a_1 - a_0 b_1 = 0\ ,\quad b_0 a_2 - a_0 b_2 = 0, \ldots\ldots b_0 a_n - a_0 b_n = 0,$$

donde segue:

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots\ldots = \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = \frac{a_n}{b_n}.$$

Dunque il teorema è anche vero pei polinomi di grado n.

Il principio d'identità ne viene dedotto nel seguente modo:

Supposto che un polinomio di grado n:

$$P = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n$$

si annulli per $n+1$ valori della x:

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_{n-1}, \alpha_n:$$

Digitized by Google

si considerano i due polinomi di grado n:

$$Q = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots\ldots (x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_n)$$
$$R = (x - \alpha_0)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots\ldots (x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_n)$$

Poichè P e Q sono di grado n e si annullano per gli n valori della x:

$$\alpha_1, \alpha_2 . \alpha_3, \ldots\ldots \alpha_{n-1}, \alpha_n$$

essi hanno proporzionali i cofficienti dei termini di egual grado e poichè i coefficienti dei rispettivi termini di grado massimo sono eguali all'unità, tutti i coefficienti dei termini di egual grado nei due polinomi debbono risultare eguali, ed in particolare i termini costanti, cioè deve aversi:

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_{n-1} \alpha_n = \alpha_0 \alpha_2 \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_{n-1} \alpha_n$$

da cui

$$\alpha_1 = \alpha_0$$

mentre per ipotesi α_0, α_1 sono diversi.

In questa dimostrazione, come in quella del lemma, *si suppone tacitamente* che tutte le α siano diverse da zero.

La dimostrazione può completarsi, ma ciò nuoce alla brevità così necessaria didatticamente.

La dimostrazione però, può modificarsi in modo che non occorra la detta ipotesi sulle α. Basterebbe eguagliare, anzicchè i termini noti, i coefficienti dei termini di grado $n-1$ e applicare il principio di semplificazione della somma:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots + \alpha_{n-1} + \alpha_n = \alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots + \alpha_{n-1} + \alpha_n$$

segue

$$\alpha_1 = \alpha_0 .$$

Occorre inoltre spiegare per far comprendere bene l'enunciato del lemma, come debba intendersi la proporzionalità dei coefficienti dei due polinomi quando non tutti i coefficienti sono diversi da zero.

A parte queste osservazioni, e a prescindere anche da considerazioni di brevità, non ci sembra elegante la deduzione del principio d'identità da un lemma nella cui dimostrazione

Digitized by Google

si affaccia il principio stesso, per quanto venga elusa la sua applicazione con una particolare dimostrazione dell'annullarsi di tutti i coefficienti del polinomio (2).

In altri termini la stessa dimostrazione del lemma fa avvertire che questo deve potersi dedurre dal principio d'identità e che l'inversione riesce artifiziosa.

9. - Ma il Prof. La Barbera ha pure dato una dimostrazione diretta e semplice del principio d'identità, nella sua forma complementare.

Dimostrato che il teorema è vero pei polinomi di 1° grado, ed ammesso che lo sia per tutti i polinomi di grado $n-1$, egli considera un polinomio di grado n :

$$P = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n \qquad (a_0 \neq 0)$$

che si annulli per $n+1$ valori distinti.

$$\alpha_0 , \alpha_1 , \alpha_2 , \ldots\ldots \alpha_{n-1} , \alpha_n .$$

Sviluppando il prodotto

$$F = a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots\ldots (x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_n)$$

secondo le ordinarie regole di moltiplicazione dei polinomi, si ottiene un certo polinomio :

$$Q = a_0 x^n + b_1 x^{n-1} - b_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + b_{n-1} x + b_n ,$$

e questo e il prodotto F sono due espressioni razionali intere della x che assumono valori uguali per qualsiasi valore di x, e poichè il prodotto F si annulla per gli n valori :

$$\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_{n-1} , \alpha_n \qquad (3)$$

il polinomio Q si annulla pure per questi n valori di x.

Ma per ipotesi anche il polinomio P si annulla per gli n valori (3) sicchè la differenza :

$$P - Q = (a_1 - b_1) x^{n-1} + (a_2 - b_2) x^{n-2} + \ldots\ldots + (a_n - b_n)$$

di grado $n-1$ al più si annulla per gli n valori (1) della x.

Siccome per ipotesi, un polinomio di grado $n-1$ che si annulla per n valori non può esistere, si deduce :

$$a_1 = b_1 ; \quad a_2 = b_2 ; \ldots\ldots a_n = b_n .$$

Sicchè i polinomi P, Q sono identici, e poichè P si

Digitized by Google

annulla per $x = \alpha_0$ anche Q dovrà annullarsi per $x = \alpha_0$ e quindi anche il prodotto F dovrà annullarsi per $x = \alpha_0$.

Poichè per ipotesi

$$\alpha_0 , \alpha_1 , \alpha_2 , \ldots\ldots , \alpha_{n-1} , \alpha_n$$

sono diversi, dall' uguaglianza:

$$a_0 (\alpha_0 - \alpha_1)(\alpha_0 - \alpha_2) \ldots\ldots (\alpha_0 - \alpha_{n-1})(\alpha_0 - \alpha_n) = 0$$

si ricava:

$$a_0 = 0$$

contro l' ipotesi, sicchè un polinomio di grado n che si annulla per $n + 1$ valori non può esistere.

Questa semplice dimostrazione può rendersi ancora più snella, come ha indicato il Prof. Tortorici [1].

Non occorre introdurre il polinomio Q, basta considerare la differenza:

$$P(x) - a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots\ldots (x - \alpha_n)$$

che è di grado $n - 1$ al più. Ma essa si annulla evidentemente per gli n valori $\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots\ldots \alpha_n$, quindi si annulla per qualunque valore di x, e in particolare per γ_0;

$$P(\alpha_0) - a_0 (\gamma_0 - \alpha_1)(\alpha_0 - \alpha_2) \ldots\ldots (\alpha_0 - \alpha_n) = Q.$$

Ma si ha per ipotesi $P(\gamma_0) = 0$, quindi la precedente eguaglianza diviene:

$$a_0 (\gamma_0 - \alpha_2) \ldots\ldots (\alpha_0 - \alpha_n) = 0 ;$$

risultato assurdo, perchè il primo membro è diverso da zero, avendo supposto che le α siano tutte distinte.

Conclusioni. - Fra le varie dimostrazioni esposte del principio d' identità sotto la forma ordinaria la più semplice mi sembra quella del Sannia; e fra le dimostrazioni del principio stesso sottò la forma complementare è certamente la più semplice la 2ª del La Barbera con la modificazione del Tortorici. A questa fra tutte, io darei la preferenza nell' insegnamento dell' algebra elementare nelle scuole medie.

---

[1] *Lezioni di Analisi Matematica* date nella R. Università di Palermo nell' a. 1926-27 (Corso litografato).

Digitized by Google

Sulla discussione delle equazioni parametriche di II grado

di UMBERTO BARLETTA (Livorno)

Accade spesso che, data un'equazione parametrica di secondo grado, si debbano determinare quei valori del parametro per i quali le radici dell'equazione data cadono in un certo intervallo assegnato (inclusi o no gli estremi).

Sia

1) $$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

l'equazione parametrica data, le cui radici chiameremo x_1 ed x_2 $(x_1 < x_2)$, e siano α e β $(\alpha < \beta)$ gli estremi dell'intervallo assegnato.

Per poter discutere l'equazione senza ambiguità occorre allora considerare, oltre alla funzione data, anche la funzione

2) $$f'(x) = 2ax + b$$

definendola come una particolare funzione di primo grado avente la proprietà di annullarsi per $x = -\frac{b}{2a}$ ossia nel punto medio (che indicheremo con M) delle radici dell'equazione 1).

Ciò posto, consideriamo le sei funzioni del parametro ρ

3) $$\Delta\ ,\ a\ ,\ f'(\alpha)\ ,\ f'(\beta)\ ,\ f(\alpha)\ ,\ f(\beta)$$

e determiniamo i valori di ρ che le annullano.

Disponiamo questi valori (capisaldi della discussione) in ordine crescente

$$\rho_1\ ,\ \rho_2\ ,\ \cdots\cdots\ ,\ \rho_{n-1}\ ,\ \rho_n$$

Digitized by Google

e, supponendo per semplicità che ρ possa variare da $-\infty$ a $+\infty$, dividiamo l'intervallo totale nei successivi intervalli parziali

$$(-\infty \ldots \rho_1), (\rho_1 \ldots \rho_2), \ldots\ldots (\rho_{n-1} \ldots \rho_n) (\rho_n \ldots +\infty).$$

Supponendo che le sei funzioni 3) siano al più di secondo grado possiamo allora determinare i loro segni in ciascuno di questi intervalli e negli estremi.

Dall'esame di questi segni si deduce facilmente, aiutandosi con una semplice rappresentazione grafica, la posizione di α e β rispetto al punto medio M e rispetto alle radici dell'equazione 1) qnindi *la posizione delle radici stesse rispetto all'intervallo assegnato* $(\alpha \ldots \beta)$.

Basta ricordare dalla teoria delle funzioni di I e di II grado che:

I) quando $f'(\alpha)$ $[f'(\beta)]$ ha lo stesso segno di a, α $[\beta]$ cade a destra del punto medio M.

II) quando $f'(\alpha) = 0$ $[f'(\beta) = 0]$, α $[\beta]$ cade nel punto medio delle radici.

III) quando $f'(\alpha)$ $[f'(\beta)]$ ha segno contrario ad a, α $[\beta]$ cade a sinistra del punto medio M.

IV) quando $f(\alpha)$ $[f(\beta)]$ ha lo stesso segno di a, α $[\beta]$ è esterno all'intervallo $(x_1 \ldots . x_2)$ delle radici.

V) quando $(f(\alpha) = 0$ $[f(\beta) = 0]$, α $[\beta]$ coincide con una delle radici.

VI) quando $f(\alpha)$ $[f(\beta)]$ ha segno contrario ad a, α $[\beta]$ è compreso nell'intervallo $(x_1 \ldots x_2)$.

Naturalmente in pratica si fa variare il parametro soltanto in quegli intervalli per i quali $\Delta \geq 0$ e riesce rapidissima e facile la discussione per la continuità con la quale avviene il movimento delle radici rispetto all'intervallo assegnato.

Digitized by Google

Può accadere evidentemente che l'equazione 1) contenga, oltre al parametro ρ, delle costanti di segno determinato oppure che α e β (estremi dell'intervallo) siano funzioni di ρ.

Tutti questi casi particolari non apportano alcuna modificazione alla discussione, la quale procede sempre come nel caso generale.

Diamo adesso alcuni esempi per dimostrare la semplicità del metodo che riesce, anche didatticamente, assai vantaggioso.

Esempio I. *Data l'equazione*

$$5x^2 - 4\rho x + \rho^2 - r^2 = 0$$

in cui ρ *varia nell'intervallo* $(-\infty \ldots +\infty)$ *ed* r *è una costante positiva, determinare il comportamento delle sue radici rispetto all'intervallo* $(0 \ldots r)$.

Si ha in questo caso $f'(x) = 10x - 4\rho$ ed inoltre

$\Delta = -4\rho^2 + 20r^2$ che si annulla per $\rho = \pm r\sqrt{5}$, nell'intervallo compreso è positvo;
$a = 5$ sempre positivo
$f'(0) = -4\rho$ „ „ „ $\rho = 0$, a sinistra è positivo
$f'(r) = -4\rho + 10r$ „ „ „ $\rho = \frac{5}{2}r$, a sinistra è positivo
$f(0) = \rho^2 - r^2$ „ „ „ $\rho = \pm r$, nell'intervallo compreso è negativo
$f(r) = \rho^2 - 4\rho r + 4r^2$ „ „ „ $\rho = 2r$ (soluz. doppia) sempre positivo.

I capisaldi disposti in ordine crescente risultano

$$-r\sqrt{5},\ -r,\ 0,\ r,\ 2r,\ r\sqrt{5},\ \frac{5}{2}r.$$

Perchè le radici siano reali basterà far variare ρ nell'intervallo $(-r\sqrt{5} \ldots r\sqrt{5})$ quindi possiamo disporre la discussione nel seguente quadro:

Digitized by Google

ρ	Δ	$-a$	$f'(0)$	$f'(r)$	$f(0)$	$f(r)$	RAPPRESENTAZIONE	RISULTATI
$-r\sqrt{5}$	0	+	+	+	+	+	$M = x_1 = x_2$ 0 r	$x_1 = x_2$ a sinistra dell'intervallo
$-r\sqrt{5}\ldots -r$	+	+	+	+	+	+	x_1 M x_2 0 r	x_1 e x_2 » »
$-r$	+	+	+	+	0	+	x_1 M $x_2 = 0$ r	x_1 a sinistra, $x_2 = 0$
$-r \ldots 0$	+	+	+	+	−	+	x_1 M 0 x_2 r	x_1 a sinistra, x_2 nell'intervallo
0	+	+	0	+	−	+	x_1 $0 = M$ x_2 r	x_1 » , x_2 »
$0 \ldots r$	+	+	−	+	−	+	x_1 0 M x_2 r	x_1 » , x_2 »
r	+	+	−	+	0	+	$0 = x_1$ M x_2 r	$x_1 = 0$, x_2 »
$r \ldots 2r$	+	+	−	+	+	+	0 x_1 M x_2 r	x_1 ed x_2 nell'intervallo
$2r$	+	+	−	+	+	0	0 x_1 M $r = x_2$	x_1 nell'intervallo, $x_2 = r$
$2r \ldots r\sqrt{5}$	+	+	−	+	+	+	0 x_1 M x_2 r	x_1 e x_2 nell'intervallo
$r\sqrt{5}$	0	+	−	+	+	+	0 $M = x_1 = x_2$ r	$x_1 = x_2$ »

Digitized by Google

Esempio II. *Data l'equazione*

$$(1-\rho)x^2 - l(1+\rho)x + \frac{5l^2}{4}(1-\rho) = 0$$

determinare il comportamento delle sue radici rispetto all'intervallo $\left(-\frac{l}{2} \ldots \frac{l}{2}\right)$ *al variare di* ρ, *essendo* l *una costante positiva.*

Abbiamo in questo caso $f'(x) = 2(1-\rho)x - l(1+\rho)$ ed inoltre

$\Delta = -\rho^2 + 3\rho - 1$	che si annulla per	$\rho = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2}$	e nell'intervallo compreso è positivo
$a = -\rho + 1$	„	„	„ $\rho = 1$	, a sinistra è positivo
$f'\left(-\frac{l}{2}\right) = -2l$				sempre negativo
$f'\left(\frac{l}{2}\right) = -2\rho l$	„	„	„ $\rho = 0$	, a destra è negativo
$f'\left(-\frac{l}{2}\right) = (-\rho+2)l^2$	„	„	„ $\rho = 2$	, a sinistra è positivo
$f\left(\frac{l}{2}\right) = (-2\rho+1)l^2$	„	„	„ $\rho = \frac{1}{2}$	, a sinistra è positivo

I capisaldi disposti in ordine crescente risultano

$$0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2, \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

e per ottenere radici reali occorrerà far variare ρ nell'intervallo $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \ldots \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$. Abbiamo quindi il quadro:

Digitized by Google

ρ	Δ	$-a$	$f'(0)$	$f'(r)$	$f(0)$	$f(r)$	RAPPRESENTAZIONE	RISULTATI
$-r\sqrt{5}$	0	+	+	+	+	+	$M = x_1 = x_2$ 0 r	$x_1 = x_2$ a sinistra dell'intervallo
$-r\sqrt{5}\ldots -r$	+	+	+	+	+	+	x_1 M x_2 0 r	x_1 e x_2 » »
$-r$	+	+	+	+	0	+	x_1 M $x_2 = 0$ r	x_1 a sinistra, $x_2 = 0$
$-r \ldots 0$	+	+	+	+	−	+	x_1 M 0 x_2 r	x_1 a sinistra, x_2 nell'intervallo
0	+	+	0	+	−	+	x_1 $0 = M$ x_2 r	x_1 » , x_2 »
$0 \ldots r$	+	+	−	+	−	+	x_1 0 M x_2 r	x_1 » , x_2 »
r	+	+	−	+	0	+	$0 = x_1$ M x_2 r	$x_1 = 0$, x_2 »
$r \ldots 2r$	+	+	−	+	+	+	0 x_1 M x_2 r	x_1 ed x_2 nell'intervallo
$2r$	+	+	−	+	+	0	0 x_1 M $r = x_2$	x_1 nell'intervallo, $x_2 = r$
$2r \ldots r\sqrt{5}$	+	+	−	+	+	+	0 x_1 M x_2 r	x_1 e x_2 nell'intervallo
$r\sqrt{5}$	0	+	−	+	+	+	0 $M = x_1 = x_2$ r	$x_1 = x_2$ »

Digitized by Google

Esempio II. *Data l'equazione*

$$(1-\rho)x^2 - l(1+\rho)x + \frac{5l^2}{4}(1-\rho) = 0$$

determinare il comportamento delle sue radici rispetto all'intervallo $\left(-\frac{l}{2} \ldots \frac{l}{2}\right)$ *al variare di* ρ, *essendo* l *una costante positiva.*

Abbiamo in questo caso $f'(x) = 2(1-\rho)x - l(1+\rho)$ ed inoltre

$\Delta = -\rho^2 + 3\rho - 1$	che si annulla per	$\rho = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2}$	e nell'intervallo compreso è positivo
$a = -\rho + 1$	„	„ „ $\rho = 1$	, a sinistra è positivo
$f'\left(-\frac{l}{2}\right) = -2l$			sempre negativo
$f'\left(\frac{l}{2}\right) = -2\rho l$	„	„ „ $\rho = 0$	, a destra è negativo
$f\left(-\frac{l}{2}\right) = (-\rho+2)l^2$	„	„ „ $\rho = 2$	, a sinistra è positivo
$f\left(\frac{l}{2}\right) = (-2\rho+1)l^2$	„	„ „ $\rho = \frac{1}{2}$	, a sinistra è positivo

I capisaldi disposti in ordine crescente risultano

$$0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2, \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

e per ottenere radici reali occorrerà far variare ρ nell'intervallo $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \ldots \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$. Abbiamo quindi il quadro:

Digitized by Google

ρ	Δ	a	$f'\left(-\frac{l}{2}\right)$	$f'\left(\frac{l}{2}\right)$	$f\left(-\frac{l}{2}\right)$	$f\left(\frac{l}{2}\right)$	RAPPRESENTAZIONE	RISULTATI
$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$	0	+	−	−	+	+	$-\frac{l}{2}$ $+\frac{l}{2}$ $M = x_1 = x_2$	$x_1 = x_2$ a destra dell'intervallo
$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \ldots \frac{1}{2}$	+	+	−	−	+	+	$-\frac{l}{2}$ $+\frac{l}{2}$ x_1 M x_2	x_1 e x_2 " "
$\frac{1}{2}$	+	+	−	−	+	0	$-\frac{l}{2}$ $+\frac{l}{2} = x_1$ M x_2	$x_1 = \frac{l}{2}$ e x_2 a destra dell'intervallo
$\frac{1}{2} \ldots 1$	+	+	−	−	+	−	$-\frac{l}{2}$ x_1 $+\frac{l}{2}$ M x_2	x_1 nell'intervallo, x_2 a destra
1	+	0	−	−	+	−	$-\frac{l}{2}$ $x = 0$ $+\frac{l}{2}$	$x_1 = 0$, x_2 infinito
1 ... 2	+	−	−	−	+	−	x_1 M $-\frac{l}{2}$ x_2 $+\frac{l}{2}$	x_1 a sinistra, x_2 nell'intervallo
2	+	−	−	−	0	−	x_1 M $-\frac{l}{2} = x_2$ $+\frac{l}{2}$	x_1 a sinistra, $x_2 = -\frac{l}{2}$
$2 \ldots \frac{3+\sqrt{5}}{2}$	+	−	−	−	−	−	x_1 M x_2 $-\frac{l}{2}$ $+\frac{l}{2}$	x_1 e x_2 a sinistra dell'intervallo
$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	0	−	−	−	−	−	$M = x_1 = x_2$ $-\frac{l}{2}$ $+\frac{l}{2}$	$x_1 = x_2$ " "

Digitized by Google

Per la riforma degli ordinamenti scolastici

Di nuovo in alto mare?

Nel licenziare per la stampa il decorso fascicolo, l'ultimo dell'Annata XXIII (1927), credevamo quasi, che prima dell'arrivo del fascicolo stesso ai nostri Lettori, fosse reso noto un qualche provvedimento ministeriale a favore della questione, che tanto interessa l'insegnamento della matematica e della fisica nelle Scuole medie. Vi erano state importanti manifestazioni della pubblica opinione in pro d'una soluzione, che, almeno parzialmente, accogliesse i voti avanzati da tante parti diverse; ma si è ricaduti in un profondo silenzio, ed i martiri oscuri hanno ripreso il loro lavoro estenuante ed ingrato senza la speranza di una sollecita liberazione dall'aggravio che pesa su di essi da cinque anni.

Non bisogna però disperare: per la riforma degli studi di medicina non si è esitato ad invitare i Corpi accademici ad esprimere le proprie opinioni, e già si parla di provvedimenti allo studio. all'intento di accogliere gran parte dei desideri espressi dai competenti, nel referendum a cui furono chiamati. Un sistema simile è stato adottato per il Nuovo Codice Penale, sottoponendone il testo elaborato dalla Commissione, che da anni lavorava attorno ad esso, al giudizio di tutti i Corpi forensi. Non si adotterà un medesimo criterio per le sorti dell'insegnamento scientifico nella scuola media?

La Direzione

***

L'esperienza del passato.

Dice l'esperienza del passato che il famoso decreto sull'opzione fra il greco e la matematica, emanato nel 1904 dal Ministro della P. I. V. E. Orlando, resistette per ben sette anni a tutte le critiche più o meno vivaci mosse a tale decreto e ai suoi effetti, che furono

Digitized by Google

giudicati perniciosi, tanto che il Decreto fu sintetizzato nel grido di « Abbasso Senofonte, abbasso Euclide! ». Eppure quelli erano tempi in cui era tutto un fare e disfare, senza una vera e propria continuità di governo quasi in ogni ramo della cosa pubblica, ma più specialmente in fatto d'istruzione.

Convegni, Congressi, udienze, articoli, voti di Facoltà, interrogazioni alla Camera e al Senato valsero sì a qualche cosa, ma ci vollero sette anni prima che spuntasse il giorno in cui colla istituzione — pur di non felice memoria — del Ginnasio e Liceo Moderno, cadde automaticamente quella opzione che aveva sollevato tante discussioni.

Ed Euclide ritornò al suo seggio.

La Direzione

***

Una nuova proposta per l'insegnamento della matematica e della fisica

La nostra proposta di abolire senz'altro l'insegnamento della matematica nel liceo classico non ha incontrato favore: alcuni valorosi Colleghi, e pur nostri carissimi Amici, si sono affrettati a manifestarci apertamente il loro dissenso; i più hanno taciuto, ma non oseremmo interpretare il loro silenzio nel senso di approvazione. E diciamo francamente che non ci dispiace affatto che venga così riaffermandosi che « il Liceo classico deve conservare « un carattere di universalità. sì da comprendere accanto alla « preparazione umanistica una bene intesa preparazione scientifica » precisamente come aveva sostenuto l'illustre fisiologo della R. Università di Milano, il prof. Carlo Foà, nel suo articolo pubblicato in « *Gerarchia* » (cfr. questo Bollettino - Fasc. IV dell'Annata XXIII pag. 113-115).

E allora vediamo se può avere più fortuna un'altra proposta, nell'affacciar la quale noi vogliamo rammentare che prima della riforma del 1923 c'erano nel Liceo ginnasio tre insegnanti, uno per la matematica nel ginnasio, uno per la matematica nel liceo e un terzo per la fisica. La riforma caricò tutto su un solo insegnante, con quegli effetti che non occorre ricordare.... Non sembri dunque eccessivo se si presenti una proposta tendente a distribuire tra due insegnanti quella soma di lavoro che già fu repartita fra tre e che ora ne sta opprimendo uno solo!

Digitized by Google

Aggiungiamo anche, ripetendo in parte quello che andiamo sostenendo da cinque anni, che è bene tener conto delle varie situazioni locali nonchè delle diverse condizioni personali dei singoli insegnanti.

Conseguentemente, noi proponiamo che accogliendosi, in via pregiudiziale, la proposta del prof. Enriques, Presidente della « Mathesis » di un accrescimento del numero delle cattedre di matematica e fisica, si disponga in maniera che *gli insegnanti che all' attuazione della riforma avevano già almeno 25 anni di servizio abbiano o il solo insegnamento della matematica, nel liceo e nel ginnasio superiore, o il solo insegnamento della fisica e chimica a seconda dell' insegnamento impartito fino al 1923; e in tal caso le ore d' insegnamento della matematica nel ginnasio inferiore siano affidate all' insegnante di storia naturale, o, per incarico, a qualche altro insegnante abilitato del luogo.* (1)

Gli altri insegnanti meno anziani, qualora siano idonei ai due insegnamenti, abbiano l' insegnamento della matematica e della fisica nel liceo, e sia dato a parte, per incarico, l' insegnamento della matematica in tutto il ginnasio a persona all' uopo abilitata;

qualora invece non abbiano un' effettiva idoneità ai due insegnamenti uno insegni la matematica in tutte le classi del ginnasio superiore e del liceo ed un altro insegni la fisica nel liceo e la matematica nel Ginnasio inferiore.

Nè si ripeta perciò l'errore di mettersi a sindacare e a confrontare quante ore verrebbe a fare l' insegnante di matematica e quante l' insegnante di fisica.... chè la dura esperienza ha dimostrato agli insegnanti d'origine matematica quante altre ore d'occupazione gravino per l' insegnamento della fisica, oltre a quelle delle lezioni impartite, se veramente si debbano preparare delle esperienze e si debba mantenere in piena efficienza il Gabinetto.

Analoghe proposte avremmo pronte per le altre Scuole medie; ma attenderemo prima di conoscere l'esito di questa nuova proposta pel liceo classico.

---

(1) Nel fare tale proposta e nell'appoggiare la proposta del prof. Enriques, teniamo presente anche la crisi che si è determinata pei laureati in matematica o in matematica e fisica; dalle cifre pubblicate, resulta ogni anno una massa di oltre quattrocento laureati, che sono in gara per una diecina di cattedre o poco più!

Digitized by Google

Quanto al Liceo Scientifico resta sempre ferma la proposta netta della *separazione dell' insegnamento della matematica da quello della fisica. e dell' esonero completo dall' insegnamento per tutti i Presidi.*

LA DIREZIONE

IN MEMORIA DI E. VENERONI

Ci era sfuggita del tutto la notizia della morte del Preside ***Veneroni*** *che abbiamo appresa con vivissimo dolore dalla Circolare che segue, pervenutaci dopo la pubblicazione del Fasc. ultimo dell' Annata decorsa. Nel riprodurre, di buon grado, tale Circolare, nutriamo viva fiducia sull' accoglienza che avrà la nobilissima iniziativa presa in onore del compianto Veneroni, che fu un insegnante dei più valorosi, uno studioso serio, e un carattere.*

LA DIREZIONE

Chiarissimo Signore,

Il giorno 18 giugno del 1927 moriva a Milano il

Prof. EMILIO VENERONI

preside del R. Istituto Tecnico di Piacenza, libero docente di Geometria projettiva nella R. Università di Padova.

La notizia giunse affatto impreveduta ai più fra gli amici e gli estimatori di Lui, cosicchè tanto più fu sentito da molti il desiderio che non passasse senza un segno di rimpianto e di onore il distinto studioso e ricercatore, l'insegnante valentissimo che aveva prodigata l'opera sua negli Istituti Tecnici di Bari e Alessandria e Pavia e Milano, e che il suo apprezzato contributo di docente aveva dato alle Università di Pavia e Modena e Padova; colui che aveva meritato di essere elevato alla magistratura ispettiva dell' insegnamento secondario nei circoli di Palermo e Milano, che aveva saputo ritornare fervido ed efficace insegnante e preside autorevole nel Liceo Scientifico di Venezia. E si sentiva che doveva anche essere onorato con lo studioso l'uomo di specchiata integrità, capace dell'amicizia più salda e più leale.

Pertanto i sottoscritti hanno creduto di dover prendere l'iniziativa d'una onoranza, alle quale possano partecipare tutti quelli che ebbero modo di apprezzare il valore di **Emilio Veneroni**.

Digitized by Google

E siccome Egli fu uomo di studio e maestro e in questa Università di Pavia si formò, portatovi da disinteressato amore della scienza, i sottoscritti invitano quanti consentono con loro a versare un modesto contributo — si fissa la quota di L. 20 —, per costituire una somma da mettersi a disposizione della Facoltà di Scienze della R. Università di Pavia, affinchè vi si istituisca un « **Premio Emilio Veneroni** » da conferirsi una volta tanto — con le norme che la Facoltà stessa riterrà opportune — ad un giovane che in essa abbia compiuto con plauso gli studi di Matematica.

Così a coloro che nei prossimi anni frequenteranno qui tali studi sarà additato un nobile esempio, e sarà un giorno commesso ad un giovane il compito di riprendere nelle scuole d'Italia l'opera di **Emilio Veneroni**, nel nome e con l'animo di Lui.

Luigi Berzolari - Giovanni Marabelli - Luigi Brusotti -
Fedele Bajocchi - Duilio Gigli - Pasquale Lorenzola.

Le quote di L. 20 ciascuna, debbono essere dirette al Prof. LUIGI BERZOLARI, R. Università, Pavia.

Il giorno 17 dicembre 1927 spirava cristianamente il

N. U. Cav. Uff. Prof. Dott. GIUSEPPE SFORZA

Socio fondatore e Collaboratore di questo Boliettino

Per Sua espressa volontà, i suoi funerali furono fatti in forma privatissima, senza alcun seguito, tanto più che Egli volle che l'annuncio della Sua morte fosse dato al pubblico dopo il suo trasporto.

Egli fu sempre schivo da ogni forma di onoranza. Ci pregò anche in modo speciale di sospendere un elogio che volevamo tessere all'opera Sua di studioso e di insegnante, in occasione del suo collocamento a riposo. Mancheremmo quindi ad un suo comandamento se di più ci indugiassimo a dire tutto il nostro dolore per la sua scomparsa e tutta la nostra ammirazione per i suoi lavori scientifici, pei suoi meriti didattici e per la sua diritta e fiera attività politica.

Vadano pertanto alla Vedova e alla Figlia le nostre più sentite condoglianze.

La Direzione

***

Il nostro Socio prof. Libo Bontadi aveva la sventura di perdere, il 6 gennaio di quest'anno, la cara compagna della sua vita.

Digitized by Google

La nostra Socia Sig.na prof.a Pierina Quintili aveva, il 7 febbraio, il grande dolore di perdere la propria Madre. Sono dolori che non hanno conforto, e pei quali rinnoviamo da queste colonne, le più vive condoglianze ai nostri buoni e affezionati Soci!

La Direzione

ERRATA-CORRIGE

A pag. 41 dell'Annata XXIII di questo Bollettino al secondo membro della equazione che leggesi in titolo; in luogo di « x » porre « X ».

A pag. 44 id. id. prima riga dall'alto in luogo di « Pertanto, la formnla delle quesite soluzioni » porre « Pertanto, una formula che dà soluzioni ».

G. Capello

Concorso a un premio "U. Dini„ per le matematiche

In ordine al R. Decreto del 13 dicembre 1908, n. DXXI, è aperto un concorso ad un premio di L. 1000, al lordo delle imposte, colle norme e condizioni seguenti.

Il premio sarà conferito a lavori manoscritti o stampati riferentisi alle matematiche pure o ad una delle seguenti discipline: Fisica matematica, Meccanica celeste o superiore, Geodesia teoretica.

Possono concorrere ai premi:

a) i giovani che hanno conseguito negli anni scolastici 1925-26, 1926-27 e 1927-28 la laurea in Matematica nella R. Università di Pisa, dopo avervi fatto almeno un anno di studi;

b) i giovani laureati in matematica, nel suddetto triennio scolastico, in altre Università italiane od estere, i quali dopo la laurea, abbiano seguito, almeno per un anno, dei corsi del 2° biennio di matematica nella R. Università di Pisa.

c) i giovani, anche non laureati, che siano studenti nella R. Università di Pisa nell'anno scolastico 1927-28.

Il concorso si chiude al Dicembre 1928.

I concorrenti devono inviare, entro detto termine, al Rettore della R. Università di Pisa i documenti comprovanti che essi si trovano nelle condizioni suesposte, nonchè i lavori, manoscritti o stampati, coi quali intendono concorrere al premio.

Dei lavori stampati devono essere inviate non meno di cinque copie.

Digitized by Google

Sul calcolo di certe somme [1]

Nota di FILIPPO SIBIRANI (Trieste)

1. Scopo di questa Nota è di indicare la trasformazione di una somma del tipo

$$\sum_{p=0}^{n-1} \varphi(p+1)\, t^p,$$

ove $\varphi(p+1)$ è una funzione di $p+1$ razionale intera di un dato grado r, in un'espressione della forma

$$t^n \sum_{i=0}^{r} \frac{P_i(t)}{(t-1)^{i+1}} + \sum_{i=0}^{r} \frac{A_i t^i}{(t-1)^{i+1}},$$

ove i $P_i(t)$ sono polinomi di grado i in t e gli A_i sono coefficienti numerici.

2. La derivata s^{esima} $(s < n)$ della funzione

$$u = \frac{t^n - 1}{t - 1} \tag{1}$$

è

$$u^{(s)} = \frac{D_{n,s+1}\left[\sum_{h=0}^{s} (-1)^h \binom{s}{h} \frac{t^{n-h}}{n-h}\right] + (-1)^{s+1}\, s!}{(t-1)^{s+1}} \tag{2}$$

ove

$$D_{m,n} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1).$$

---

[1] Nel Bollettino dell'Unione Matematica Italiana (Anno VII - Bologna, 1928, Zanichelli) ho utilizzati i risultati esposti nella presente Nota, per il calcolo del valore attuale di una rendita certa immediata i cui termini sono i valori che una funzione razionale intera di x assume per $x = 1, 2, 3, \ldots\ldots n$. (F. S.).

Digitized by Google

Infatti, ammessa vera questa formula per un valore di s, essa è vera per $s+1$, giacchè

$$u^{(s+1)} =$$

$$= \frac{(t-1)\,D_{n,s+1}\left[\sum_{h=0}^{s}(-1)^h\binom{s}{h}t^{n-h-1}\right]-(s+1)\left\{D_{n,s+1}\left[\sum_{h=0}^{s}(-1)^h\binom{h}{s}\frac{t^{n-h}}{n-h}\right]+(-1)^{s+1}s!\right\}}{(t-1)^{s+2}}$$

e tenendo conto che

$$\binom{s}{h}\left(1-\frac{s+1}{n-h}\right)+\binom{s}{h-1}=(n-s-1)\binom{s+1}{h}$$

$$D_{n,s+1}(n-s-1)=D_{n,s+2}\,,$$

si ha

$$u^{(s+1)}=\frac{D_{n,s+2}\left[\sum_{h=0}^{s+1}(-1)^h\binom{s+1}{h}\frac{t^{n-h}}{n-h}\right]+(-1)^{s+2}(s+1)!}{(t-1)^{s+2}}\,.$$

E poichè la (2), come subito si verifica, è vera per $s=1$, essa è vera in generale.

La funzione

$$\psi(t)=D_{n,s+1}\left[\sum_{h=0}^{s}(-1)^h\binom{s}{h}\frac{t^{n-h}}{n-h}\right]+(-1)^{s+1}s!$$

per essere eguale a

$$(t-1)^{s+1}\sum_{k=0}^{n-s}D_{k+s,s}\,t^k$$

si annulla insieme con le derivate successive fino alla s^{esima} in $t=1$; se poi si tien conto che

$$\sum_{h=0}^{s}(-1)^h\binom{s}{h}\binom{n-h-1}{s}=1\,,$$

si deduce che

$$\psi^{(s+1)}(1)=s!\,D_{n,s+1}\,.$$

Digitized by Google

Dopo ciò è chiaro che è

$$u^{(s)}(1) = \lim_{t \to 1} \frac{\dfrac{d^{s+1}}{dt^{s+1}} \left\{ D_{n,s+1} \left[\sum_{h=0}^{s} (-1)^h \binom{h}{s} \frac{t^{n-h}}{n-h} \right] + (-1)^{s+1} s! \right\}}{\dfrac{d^{s+1}}{dt^{s+1}} (t-1)^{s+1}} =$$

$$= \frac{D_{n,s+1}}{s+1}.$$

3. Poniamo

$$\frac{d}{dt}(t\varphi) = [\varphi]_1, \quad \frac{d}{dt}\left\{ t[\varphi]_1 \right\} = [\varphi]_2, \quad \ldots\ldots \quad \frac{d}{dt}\left\{ t[\varphi]_{k-1} \right\} = [\varphi]_k, \quad \ldots\ldots$$

Allora se osserviamo che la funzione definita da (1) è

$$u = \sum_{p=0}^{n-1} t^p$$

si ricava

$$[u]_k = \sum_{p=0}^{n-1} (p+1)^k t^p;$$

onde se

$$\varphi(p+1) = c_0 + c_1(p+1) + c_2(p+1)^2 + \ldots + c_r(p+1)^r,$$

sarà

$$\sum_{i=0}^{r} c_i [u]_i = \sum_{p=0}^{n-1} \varphi(p+1)\, t^p.$$

D'altra parte la somma del primo membro, indicando con a_i degli opportuni coefficienti numerici, è della forma

$$\sum_{i=0}^{r} a_i\, t^i\, u^{(i)},$$

cosicchè possiamo scrivere

$$\sum_{i=0}^{r} a_i\, t^i\, u^{(i)} = \sum_{p=0}^{n-1} \varphi(p+1)\, t^p. \tag{4}$$

La (4) per $t = 1$ dà, tenendo presente la (3),

$$\sum_{i=0}^{r} \frac{a_i}{i+1} D_{n,i+1} = \sum_{p=0}^{n-1} \varphi(p+1). \tag{5}$$

Digitized by Google

Il primo membro è una funzione razionale intera di grado $r+1$ in n, priva di termine noto, che per $n=1, 2, 3, \ldots$ $r+1$ prende i valori

$$\varphi(1),\ \varphi(1)+\varphi(2),\ \varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3),\ \ldots\ldots,\ \varphi(1)+\varphi(2)+\ldots+\varphi(r+1).$$

Per una nota formula di Newton essa funzione è

$$(6) \qquad \sum_{i=0}^{r} D_{n,i+1}\frac{\Delta^i\varphi(1)}{i+1!}$$

ove

$$\Delta^i\varphi(1)=\sum_{h=0}^{i}(-1)^h\binom{i}{h}\varphi(i-h+1);$$

epperò, identificando il primo membro della (5) con la (6) si trae

$$a_i=\frac{\Delta^i\varphi(1)}{i!}.$$

Dopo ciò la (4), tenendo conto della (2), dà

$$\sum_{p=0}^{n-1}\varphi(p+1)t^p=$$

$$-\sum_{i=0}^{r}\frac{\Delta^i\varphi(1)}{i!}\,t^i\,\frac{D_{n,i+1}\left[\sum_{h=0}^{i}(-1)^h\binom{i}{h}\frac{t^{n-h}}{n-h}\right]+(-1)^{i+1}i!}{(t-1)^{i+1}}=$$

$$=t^n\sum_{i=0}^{r}\Delta^i\varphi(1)(i+1)\binom{n}{i+1}\frac{\sum_{h=0}^{i}(-1)^h\binom{i}{h}\frac{t^{i-h}}{n-h}}{(t-1)^{i+1}}+$$

$$+\sum_{i=0}^{r}(-1)^{i+1}\Delta^i\varphi(1)\frac{t^i}{(t-1)^{i+1}},$$

che costituisce la trasformazione voluta.

Se infine si osserva che il prodotto $f(n)t^n$ ove $f(n)$ è una funzione razionale intera di n e $|t|<1$, tende allo zero al tendere di n all'infinito, si ottiene

$$\sum_{p=0}^{\infty}\varphi(p+1)t^p=\sum_{i=0}^{r}(-1)^{i+1}\Delta^i\varphi(1)\frac{(t-1)^{i+1}}{t^i}.$$

4. Facciamo qualche applicazione. Sia

$$\varphi(p+1)=(p+1)^2(p+3)^2.$$

Digitized by Google

Scriviamo in una riga i valori $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, ... $\varphi(5)$ e nelle righe seguenti le successive differenze

9	64	225	576	1125
55	161	351	649	
106	190	298		
84	108			
24				

ed allora

$$\sum_{p=0}^{n-1}(p+1)^2(p+3)^2 t^p = t^n\{9(t-1)^{-1}+55(t-1)^{-2}\}(n-1)t-n\{+$$

$$+53(t-1)^{-3}\}(n-1)(n-2)t^2-2n(n-2)t+n(n-1)\{+$$

$$+14(t-1)^{-4}\}(n-1)(n-2)(n-3)t^3-3n(n-2)(n-3)t^2+$$

$$+3n(n-1)(n-3)t-n(n-1)(n-2)\{+$$

$$+(t-1)^{-5}\}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)t^4-$$

$$-4n(n-2)(n-3)(n-4)t^3+6n(n-1)(n-3)(n-4)t^2-$$

$$-4n(n-1)(n-2)(n-4)t+n(n-1)(n-2)(n-3)\}-9(t-1)^{-1}$$

$$+55t(t-1)^{-2}-106t^2(t-1)^{-3}+84t^3(t-1)^{-4}-24t^4(t-1)^{-5}.$$

$$\sum_{p=0}^{n-1}(p+1)^2(p+3)^2 = 9n+55\binom{n}{2}+106\binom{n}{3}+84\binom{n}{4}+24\binom{n}{5}.$$

$$\sum_{p=0}^{\infty}(p+1)^2(p+3)^2 t^p = \frac{9}{1-t}+\frac{55t}{(1-t)^2}+\frac{106t^2}{(1-t)^3}+$$

$$+\frac{84t^3}{(1-t)^4}+\frac{24t^4}{(1-t)^5}. \qquad (|t|<1)$$

Digitized by Google

Sul concetto di rapporto secondo Galileo Galilei

di EMILIO ARTOM (Torino)

Leggendo il « Principio della giornata quinta » dei Discorsi sopra due nuove scienze di Galileo, uno studioso di oggi viene colpito dal modo assai dissimile dal nostro di trattare la questione.

Anzitutto è chiaro che Galileo, esaminando la classica definizione 5ª di Euclide, presuppone noto il concetto di proporzione fra quattro segmenti e cerca solo un facile criterio per riconoscere quando quattro grandezze siano proporzionali.

« *Chi è quello d' ingegno tanto felice il quale abbia certezza che allora quando le quattro grandezze sono proporzionali, gli ugualmente moltiplici si accordano sempre?* » domanda in principio il Salviati. Dunque quel certo ingegno tanto felice deve avere secondo Galileo, prima di leggere la 5ª definizione, il concetto di grandezze proporzionali.

Salviati cita poi l'altra nota definizione di Euclide (3ª) nella forma: La proporzionalità fra due grandezze è un tal rispetto o relazione fra loro, per quanto si appartiene alla quantità. Ma questa a tutta prima (1) dice veramente poco e ci si domanda se Salviati riuscirà a dedurre la quinta da questa. Ma che cosa sono insomma per Galileo quattro segmenti in proporzione?

Il fatto che egli non si preoccupa della definizione fondamentale, può parere privo di importanza, perchè il lettore presume di poter ricavare dal testo dei ragionamenti che seguono quali siano i principi sui quali Galileo si appoggia.

Purtroppo la cosa non è così facile come si potrebbe

(1) Cfr. ZAPELLONI: *Sul concetto di rapporto*; Per. di mat. IV, VII, N. 2, p. 88.

Digitized by Google

credere. Ad un certo punto si ha la speranza di essere in porto, quando cioè Salviati comincia:

« Per raccogliere dunque ora in breve e con maggiore universalità tutto quello che si è detto ed esemplificato fin qui, diremo che: *Allora intendiamo quattro grandezze essere proporzionali fra loro quando l'eccesso della prima sopra la seconda sarà simile all'eccesso della terza sopra la quarta* ».

Qui restiamo veramente sbalorditi. Che cosa sono due grandezze, due segmenti simili?

Simplicio invece è soddisfatto, fa solo una piccola obiezione relativa al caso che la prima grandezza sia minore della seconda, ma sulla questione sostanziale dichiara: « fin qui non avrei difficoltà ».

L'espressione di Galileo, presa alla lettera, è certamente priva di senso. Allora ci sarà qualche sottinteso. Galileo vorrà forse dire che i due resti sono simili (nel senso di proporzionali) per esempio al primo e al terzo dei segmenti dati? In questo modo la proprietà ha senso, ma torna a non servire come definizione.

Proseguiamo nella lettura del curioso dialogo. Galileo si propone di dimostrare che se quattro grandezze sono in proporzione nel senso da lui presupposto si verifica la proprietà 5ª di Euclide. Ma anche qui siamo delusi. Ad un'affermazione sostanziale di Salviati, Simplicio, anzichè chiedere schiarimenti come noi desidereremmo, risponde: « Io l'intendo assai bene, perciocchè non saprei immaginarmi per qual ragione non debba essere così, ecc.... ».

Il concetto fondamentale di proporzione deve dunque essere definito secondo Galileo in modo così semplice da poter essere *sempre* sottinteso.

Ora io credo di poter fare un'ipotesi. Per Galileo che, come acutamente osserva la Zapelloni (art. citato), si è posto dal punto di vista pre-Eudossiano, due coppie di segmenti sono in proporzione se tutte le proprietà di geometria elementare che valgono per i due primi segmenti, e per quelli che si ottengono da essi con operazioni della geometria elementare (o come si direbbe oggi *del gruppo della simili-*

Digitized by Google

tudine), valgono pure per i due ultimi e per quelli da essi ottenuti colle medesime operazioni (1).

Non altrimenti si potrebbe dire che in geometria proiettiva *la relazione o rapporto fra 4 punti allineati è uguale a quella fra altri 4 punti allineati,* se tutte le proprietà di geometria proiettiva, che valgono per i primi quattro e per i punti ricavati da essi con costruzioni di geometria proiettiva, valgono pure per gli altri quattro e per quelli ottenuti da essi colle medesime operazioni.

E come è fondamentale in geometria proiettiva la proposizione che, per il confronto fra due quaterne di punti, permette di considerare *fra tutte le operazioni proiettive*, sole costruzioni di quadrangoli completi o di quarti armonici, così è fondamentale nella geometria elementare la proprietà che permette di considerare, per il confronto fra due coppie di segmenti, la sola moltiplicazione.

Il merito di Eudosso consisterebbe dunque nell'aver attuato questa semplificazione che, tentata dai Pitagorici, pareva impossibile, per il noto scoglio dei segmenti incommensurabili.

---

(1) Che, indipendentemente da ogni preparazione matematica, gli uomini possiedano l'intuizione della proporzionalità, risulta dal fatto che, mentre i nostri scolari meno intelligenti non afferrano bene la definizione di Euclide e forse nemmeno quelle definizioni più elementari che valgono solo per le grandezze commensurabili, essi, *senza eccezione*, capiscono benissimo il significato dei teoremi sulle proporzioni. Dunque il concetto di proporzione ha un fondamento ancora più semplice di quello di misura, sia pure ridotto al solo caso delle grandezze commensurabili.

Questo spiega anche perchè agli alunni cho non *sentono* il valore logico dell'edifizio matematico, paiano inutili certi teoremi. Per esempio per essi è evidente che le circonferenze rettificate siano proporzionali ai raggi; se partendo da un raggio e facendo delle operazioni di geometria elementare, per quanto complesse, si è arrivati alla circonferenza rettificata e poi, partendo da un altro raggio, si è costruita la sua circonferenza rettificata, è chiaro che i due primi segmenti saranno proporzionali agli ultimi due, nel *senso che l'alunno dà alla relazione di proporzionalità.*

Digitized by Google

Il numero e e l'estensione del concetto di potenza

di ANTONINO LO VOI (Catania)

1. Facendo seguito ad una mia pubblicazione di natura didattica, che apparirà nell'annuario del Liceo Scientifico di Siracusa, io mi propongo qui di svolgere l'estensione del concetto di potenza, fino a pervenire alla risoluzione dell'equazione esponenziale.

Raggiungerò lo scopo in una maniera nuova. Precisamente, premetterò lo studio della funzione e^x, che io chiamerò invece $S(x)$; dirò *neperiano* di un numero reale y quel numero reale $\bar{y}$ che mi soddisfa l'equazione $y = S(\bar{y})$; e infine servendomi dei neperiani farò lo studio delle potenze ad esponente fratto e reale.

2. Ricordiamo che dicesi numero reale illimitato un numero decimale avente infinite cifre decimali; e dicesi suo n—esimo valore incompleto il numero limitato $a, c_1 c_2 \ldots c_n$ che si ottiene considerando soltanto le prime n cifre.

Seguendo questo stesso ordine di idee, noi considereremo la somma ad infiniti termini positivi

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots(n-1)n} + \ldots$$

che chiameremo somma illimitata e la indicheremo con e.

Diremo n-esimo valore incompleto di e e lo indicheremo con S_n, la somma limitata che si ottiene trascurando tutti i termini successivi a quelli di posto $n+1$; cioè

$$S_0 = 1\ ;\ S_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2\ ;\ S_2 = 2 + \frac{1}{1.2} = 2,5\ ;$$

$$S_3 = 2,5 + \frac{1}{1.2.3} = 2,66\ldots\ ;\ \text{ecc.}$$

Ricordiamo ancora, che la classe costituita da tutti i

Digitized by Google

possibili valori incompleti di un numero reale, ha per estremo superiore lo stesso numero reale.

Orbene, noi vogliamo estendere questa proprietà alla somma e.

Consideriamo la classe formata da tutti i possibili valori incompleti S_n di e. Io dimostrerò che questa classe è limitata e quindi ammette un estremo superiore. Allora non c'è da fare altro che porre per definizione, e uguale a questo estremo superiore.

Consideriamo un elemento qualunque della classe, per esempio S_m; e osserviamo che è:

$$\frac{1}{1.2.3} < \left(\frac{1}{2}\right)^2; \frac{1}{1.2.3.4} < \left(\frac{1}{2}\right)^3; \ldots; \frac{1}{1.2\ldots(m+1)m} < \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}.$$

Risulterà,

$$S_m < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^m}{1 - \frac{1}{2}}$$

e a maggior ragione

$$S_m < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3.$$

Dunque, 3 supera un elemento qualunque della classe.

Il numero e, che poniamo uguale all'estremo superiore, sarà maggiore dell'elemento della classe $S_2 = 2,5$, e non supererà certamente l'intero 3. Quantunque a noi non interessi, diremo che si è calcolato

$$e = 2,718281828459.....$$

3. Sia ora x un numero reale positivo qualunque, ma *fissato*, e consideriamo la seguente somma illimitata

$$S(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots.(n-1)n} + \ldots.$$

Per $x = 0$, essa assume il valore 1, e scriviamo $S(0) = 1$.

Per $x = 1$, si ottiene la somma illimitata studiata innanzi, e che è stata posta uguale ad e. Pertanto, porremo $S(1) = e$.

Digitized by Google

Ora, supponiamo x diverso da 1, e ragioniamo come nel numero precedente. Consideriamo un valore incompleto di $S(x)$, per esempio l'm-esimo che indicheremo con $S_m(x)$.

Consideriamo inoltre, un numero intero n che sia maggiore del numero reale x.

Se è $m \leq n$ sarà $S_m(x) \leq S_n(x)$; perchè $S_n(x)$ possiede un numero maggiore di termini (positivi).

Se è invece, $m > n$, si ha:

$$S_m(x) = S_n(x) + \frac{x^{n+1}}{1.2....(n+1)} + \frac{x^{n+2}}{1.2....(n+2)} + ... + \frac{x^m}{1.2....m}$$

$$S_m(x) = S_n(x) + \frac{x^{n+1}}{1.2....(n+1)}\left(1 + \frac{x}{n+2} + ... + \frac{x^{m-1-n}}{(n+2)\cdot(n+3)...m}\right)$$

E come nel numero precedente

$$S_m(x) < S_n(n) + \frac{x^{n+1}}{1.2...(n+1)}\left[1 + \frac{x}{n} + \left(\frac{x}{n}\right)^2 + ... + \left(\frac{x}{n}\right)^{m-1-n}\right]$$

$$S_m(x) < S_n(x) + \frac{x^{n+1}}{1.2....(n+1)} \cdot \frac{1 - \left(\frac{x}{n}\right)^{m-n}}{1 - \frac{x}{n}};$$

poichè è $\frac{x}{n} < 1$, si ha a maggior ragione

$$S_m(x) < S_n(x) + \frac{x^{n+1}}{1.2....(n+1)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{n}}.$$

In conclusione, se x rappresenta un numero reale e positivo, fissato, ed n rappresenta un intero che si prende maggiore di x; allora, la classe costituita da tutti i valori incompleti della somma $S(x)$ è una classe limitata; perchè, il numero

$$S_n(x) + \frac{x^{n+1}}{1.2....(n+1)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{n}}$$

supera un elemento qualunque $S_m(x)$.

Digitized by Google

Per esempio, per $x = \sqrt{2}$, possiamo scegliere $n = 2$, e qualunque sia m si avrà:

$$S_m(\sqrt{2}) < \frac{5}{3}(1 + \sqrt{2}).$$

Seguendo sempre il ragionamento del numero precedente, noi *porremo per definizione* $S(x)$ *uguale all'estremo superiore della classe costituita dai suoi valori incompleti.*

Osserviamo subito:

1° che per ogni valore attribuito alla x si ha in corrispondenza un valore di $S(x)$; quindi $S(x)$ *è funzione di* x, ed è $S(0) = 1$; $S(1) = e$; $S(x) > x$

2° Se K è un numero grande ad arbitrio e se si sceglie x maggiore di K, si ha

$$S(x) > S_1(x) = 1 + x > K$$

e quindi la funzione $S(x)$ può superare qualsiasi numero.

3° Se K è un numero maggiore di 1, sia pure vicinissimo ad 1, se scegliamo x, minore di $\frac{1}{2}$ e contemporaneamente minore di $\frac{K-1}{2}$, risulta

$$S(x) < K.$$

Infatti; anzitutto, poniamo l'intero n uguale ad 1. Inoltre, poichè, $S_n(x) + \frac{x^{n+1}}{1.2....(n+1)} \frac{1}{1 - \frac{x}{n}}$ è maggiore di tutti i valori incompleti $S_m(x)$ sarà anche maggiore o uguale all'estremo superiore $S(x)$; e quindi essendo $n = 1$, $x < \frac{1}{2}$, sarà

$$S(x) < 1 + x + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1-x} < 1 + x(1 + x)$$

e anche $S(x) < 1 + 2x$.

Avendo scelto $x < \frac{k-1}{2}$, risulta $1 + 2x < K$ e quindi $S(x) < K$.

4. *Dimostriamo che è* $S(x)\,S(z) = S(x + z)$.

Digitized by Google

Basterà dimostrare che un numero qualunque minore del primo membro, risulta anche minore del secondo, e viceversa, un numero minore del secondo membro è anche minore del primo.

Per la dimostrazione, occorre richiamare lo sviluppo del binomio di Newton:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3 + \\ + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 2}{1.2.3\ldots(n-1)}ab^{n-1} + b^n .$$

Ciò ricordato, se a è un numero minore del primo membro, sarà

$$\frac{a}{S(x)} < S(z)$$

quindi, $\frac{a}{S(x)}$ sarà minore di un valore incompleto $S_n(z)$ di $S(z)$ cioè,

$$\frac{a}{S(x)} < S_n(z) < S(z).$$

Analogamente, $\frac{a}{S_n(z)}$ sarà minore di un valore incompleto $S_m(x)$ di $S(x)$ e risulta infine, $a < S_m(x)\, S_n(z)$.

Supponiamo per esempio $m \leq n$ ed avremo $a < S_n(x)\, S_n(z)$.

Orbene, noi dimostreremo la disuguaglianza

$$S_n(x+z) \leq S_n(x)\, S_n(z) \leq S_{2n}(x+z).$$

Allora, a sarà minore di $S_{2n}(x+z)$ e quindi di $S(x+z)$, e poichè il ragionamento è invertibile, si conclude anche che ogni numero minore del secondo membro risulta anche minore del primo.

Ci resta dunque da dimostrare la disuguaglianza:

$$1 + \frac{x+z}{1} + \frac{(x+z)^2}{1.2} + \ldots + \frac{(x+z)^n}{1.2\ldots n} \leq$$

$$\leq \left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n}\right)\left(1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \ldots + \frac{z^n}{1.2\ldots n}\right) \leq$$

$$\leq 1 + \frac{x+z}{1} + \frac{(n+z)^2}{1.2} + \ldots + \frac{(x+z)^{2n}}{1.2\ldots(2n)} .$$

Digitized by Google

Volendo fare lo sviluppo del membro medio bisogna moltiplicare ogni termine della prima parentesi, per ogni termine della seconda, ed è utile osservare che così facendo non si ottengono mai termini simili.

Consideriamo un termine qualunque della prima parentesi; per esempio, $\frac{x^h}{1.2...h}$; e poi un termine qualunque della seconda parentesi; per esempio $\frac{z^k}{1.2...k}$. Nello sviluppo comparirà

$$\frac{1}{1.2...h.1.2...k} x^h z^k$$

Pensiamo di sviluppare adesso il primo e l'ultimo membro. Poichè, nello sviluppo di un binomio di grado n, tutti i termini hanno il grado n, ne segue che il prodotto $x^h z^k$ essendo il grado $h+k$, si potrà solo presentare nello sviluppo di $\frac{(x+z)^{h+k}}{1.2...(h+k)}$.

Ora dimostreremo fra poco che i coefficienti del termine $x^h x^k$ sono uguali in tutti e tre i membri; e allora per dimostrare la nostra disuguaglianza basta osservare che se l'esponente $h+k$ è minore o uguale ad n, il termine $\frac{(x+z)^{h+k}}{1.2...(h+k)}$ si presenta sia nel primo che nell'ultimo membro, ma se invece $h+k$ è maggiore di n, esso si presenta nell'ultimo membro e non nel primo, e lo stesso succede per il termine generico $x^h x^k$.

Mettendo per un momento da parte il denominatore, $1.2...(h+k)$, si ha

$$(x+z)^{h+k} = x^{h+k} + \frac{h+k}{1} x^{h+k-1} z + \frac{(h+k)(h+k-1)}{1.2} x^{h+k-2} z^2 +$$

$$+ .... + \frac{(h+k)(h+k-1)...(k+1)}{1.2....k} x^h z^k + ... + z^{h+k}$$

Dunque l'unico termine dello sviluppo del primo o dell'ultimo membro contenente $x^h z^k$ è quello messo in evidenza,

Digitized by Google

diviso per il denominatore che abbiamo messo da parte. In conclusione; affinchè sia vera la disuguaglianza che vogliamo dimostrare, occorre e basta che sia

$$\frac{1}{1.2...h.1.2.k} x^h z^k = \frac{(h+k)(h+k-1)...(h+1)}{1.2...(h+k)\,1.2...k} x^h z^k.$$

Eliminando il fattore comune $\frac{1}{1.2...k}$ e moltiplicando membro a membro per $h...2.1$, si vede subito che questa uguaglianza è una identità.

Dunque, risulta $S_n(x+z) \leq S_n(x) S_n(z) \leq S_{2n}(x+z)$ e di conseguenza

$$S(x) S(z) = S(x+z).$$

5. Se h è un numero positivo, si ha $S(x+h) = S(x) S(h) > S(x) \cdot S_1(h) = S(x)(1+h) > S(x)$ cioè, $S(x)$ cresce sempre al crescere di x, *e per x positivo è maggiore di* 1.

Porremo per definizione $S(-x) = \frac{1}{S(x)}$, in modo che la formula trovata, sia valida anche per x e z di segno qualunque. Poichè è $S[-(x+h)] = \frac{1}{S(x+h)} < \frac{1}{S(x)} = S(-x)$ si ha che S *è crescente anche nel campo negativo.*

Neperiano. Se y è un numero reale *positivo*, dimostreremo che esiste un solo valore di x che soddisfa l'equazione

$$S(x) = y.$$

Questo valore in onore del matematico *Neper* lo chiameremo neperiano di y e lo indicheremo con $\bar{y}$.

Sicchè per definizione

$$S(\bar{y}) = y.$$

Se esiste la radice di questa equazione essa è unica; perchè, se è anche $S(z) = y$, risulta $S(z) = S(\bar{y})$ e quindi $z = \bar{y}$, essendo $S(x)$ crescente.

Se è $y = 1$, poichè è $S(0) = 1$, risulta $\bar{y} = 0$.

Supponiamo quindi y maggiore di 1.

Digitized by Google

Chiamiamo $\bar{y}$ l'estremo superiore della classe costituita dai numeri x positivi o nulli tali che sia

$$S(x_1) < y.$$

Tale classe esiste perchè lo zero ne fa parte; ed è limitata perchè risulta $S(x_1) < y < S(y)$ e quindi $x_1 < y$.

Io dico che è $S(\bar{y}) = y$.

Infatti, se fosse $S(\bar{y}) < y$, sarebbe $\frac{y}{S(\bar{y})} > 1$, e quindi si potrebbe trovare un numero positivo h tale che (n. 3-3°)

$$S(h) < \frac{y}{S(\bar{y})};$$

e si avrebbe $S(\bar{y}+h) < y$; cioè $\bar{y}+h$ apparterrebbe alla classe che ha per estremo superiore $\bar{y}$. Siamo dunque pervenuti ad un assurdo.

Supponiamo ora

$$S(\bar{y}) > y.$$

Esisterà un numero positivo h tale che

$$\frac{S(\bar{y})}{y} > S(h).$$

Moltiplichiamo membro a membro per $y \cdot S(-h)$, risulta

$$S(\bar{y}-h) > y.$$

Anche questo è un assurdo, perchè $\bar{y}-h$ essendo minore dell'estremo superiore $\bar{y}$, sarà anche minore di un elemento x_1 della classe e si avrebbe

$$S(x_1) > S(\bar{y}-h) > y;$$

mentre deve essere $S(x_1) < y$.

Resta dunque dimostrato che risulta

$$S(\bar{y}) = y.$$

Supponiamo infine $y < 1$, e poniamo $K = \frac{1}{y} > 1$. Esisterà

Digitized by Google

il numero $\overline{K}$ tale che $S(\overline{K}) = K = \frac{1}{y}$; e moltiplicando per $yS(-\overline{K})$ si ha $y = S(-\overline{K})$. Risulta dunque $\bar{y} = -\overline{K}$.

6. Radice e Potenza.

Se n *è un numero intero, dicesi radice* n*-esima di un numero reale positivo a, e si indica con* $\sqrt[n]{\bar{a}}$*, quel numero la cui potenza* n*-esima è uguale ad a.*

Se poniamo $S\left(\frac{\bar{a}}{n}\right) = b$ si ha

$$b^n = S\left(\frac{\bar{a}}{n}\right) \cdot S\left(\frac{\bar{a}}{n}\right) \ldots S\left(\frac{\bar{a}}{n}\right) = S\left(n\,\frac{\bar{a}}{n}\right) = S(\bar{a}) = a.$$

quindi risulta $\sqrt[n]{\bar{a}} = b = S\left(\frac{\bar{a}}{n}\right)$ ed anche $\sqrt[n]{S(x)} = S\left(\frac{x}{n}\right)$.

Oltre a b, non può esistere un altro numero c la cui potenza n-esima è uguale ad a, perchè sarebbe $c^n = b^n = a$ e quindi $c = b$.

Infatti, se fosse per esempio $c < b$ sarebbe $c^n < b^n$; contro l' ipotesi.

Dopo ciò si dimostrano facilmente i teoremi sui radicali, i quali del resto si possono ricavare come casi particolari dalle formule relative alle poteze ad esponente fratto, che ora studieremo.

Poniamo per definizione $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\overline{a^m}}$.

Sarà

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\overline{a^m}} = \sqrt[n]{\overline{S(\bar{a}) \cdot S(\bar{a}) \ldots S(\bar{a})}} = \sqrt[n]{\overline{S(m\bar{a})}} = S\left(\frac{m}{n}\,\bar{a}\right)$$

Quindi, se r è un numero razionale, ed a è reale positivo, risulta

$$a^r = S(r\bar{a}) \text{ ed anche } [S(x)]^r = S(rx).$$

Si ha subito, che se è $r = s$, sarà $S(r\bar{a}) = S(s\bar{a})$, ed $a^r = a^s$.

Se è $a > 1$ ed $r > s$ sarà $a^r > a^s$ per $a > 1$, invece $a^r < a^s$ per $a < 1$.

Digitized by Google

Si dimostra subito che le potenze ad esponente fratto godono i soliti teoremi sulle potenze, cioè:

$$a^{r+s} = S([r+s]\bar{a}) = S(r\bar{a} + s\bar{a}) = S(r\bar{a}) \cdot S(s\bar{a}) = a^r a^s.$$

$$a^r a^s = S(rs\bar{a}) = [S(r\bar{a})]^s = (a^r)^s$$

$$a^r b^r = S(r\bar{a})\, S(r\bar{b}) = S(r[\bar{a} + \bar{b}]) = [S(\bar{a} + \bar{b})]^r = [S(\bar{a})\, S(\bar{b})]^r = (ab)^r.$$

Se x è un numero reale poniamo $1^x = 1$ e $0^x = 0$.

Se x è numero reale positivo, ed a un numero reale > 1; per a^x intendiamo quel numero reale maggiore di tutte le potenze a^r, ove r è un numero razionale minore di x; *e minore di tutte le potenze a^{r_1}*, ove r_1 è un numero razionale maggiore di x. Un tale numero esiste ed è appunto $S(x\bar{a})$; perchè $S(x\bar{a})$ è maggiore di $a^r = S(r\bar{a})$ ed è minore di $a^{r'} = S(r'a)$.

Dimostriamo che oltre ad $S(x\bar{a})$ non ne esistono altri.

Infatti, supponiamo che b sia un numero tale che $a^r < b < a^{r'}$.

Se per esempio risulta $b < S(x\bar{a})$; sarà

$$S(\bar{b}) < S(x\bar{a})$$

e quindi, $\bar{b} < x\bar{a}$.

Scegliamo un numero razionale r, tale che

$$\frac{\bar{b}}{\bar{a}} < r < x;$$

sarà;

$$\bar{b} < r\bar{a} < x\bar{a}$$

$$S(\bar{b}) < S(r\bar{a}) < S(x\bar{a})$$

$$b < a^r < S(x\bar{a}).$$

Si perviene così a contraddire l'ipotesi che sia $b > a^r$.

Siccome $S(x\bar{a})$ è l'unico numero compreso fra a^r ed $a^{r'}$, sarà per definizione

$$a^x = S(x\bar{a}).$$

In particolare, se è $a = e$; siccome $S(1) = e$; si ha $\bar{e} = 1$ e anche

$$e^x = S(x).$$

Digitized by Google

Quindi risulta

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots$$

Per $a < 1$ porremo $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^x$; ed infine $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

7. Logaritmi. *Se è* $\bar{a}$ *un numero reale positivo e diverso da zero ed* 1, *dato un numero qualunque* b *dicesi logaritmo di* b *nella base a e si indica con* lg_a b *quel numero* x, *tale che*

$$a^x = b.$$

Quindi per definizione è $x = \lg_a b$.

Il numero x esiste ed è uguale ad $\frac{\bar{b}}{\bar{a}}$. Infatti,

$$b = S(\bar{b}) = S\left(\frac{\bar{b}}{\bar{a}}\bar{a}\right) = a^{\frac{\bar{b}}{\bar{a}}}.$$

In particolare $\lg_e b = \bar{b}$; perchè $e^{\bar{b}} = S(\bar{b}) = b$.

Dunque *il neperiano di un numero coincide col suo logaritmo in base* e.

Si ha infine $\lg_a b = \frac{\bar{b}}{\bar{a}} = \lg_e b : \lg_e a$.

ci sarà utile osservare che, essendo

$$a^x = S(x\bar{a}) = e^{x\bar{a}}, \text{ si ha } \lg_e a^x = x\bar{a} = x \lg_e a$$

Aggiunta. - Quantunque non rientrino nello scopo didattico propostoci, aggiungeremo le seguenti considerazioni.

Dimostriamo che la derivata di e^x *è* e^x. Consideriamo il rapporto incrementale, e chiamiamo con x_m il più piccolo dei due numeri $x + h$ ed x, e poniamo $|h| = K$; sarà:

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \frac{|e^{x+h} - e^x|}{K} = \frac{e^{x_m}(e^K - 1)}{K}.$$

Dobbiamo fare tendere h a zero; quindi possiamo sup-

Digitized by Google

porre $K < \frac{1}{2}$; e ricordando quanto si è trovato nel n. 3-3°, si ha

$$1 + K < e^K = S(K) < 1 + K(1 + K)$$

e quindi risulta, sempre per $K < \frac{1}{2}$,

$$e^{x_m} < \frac{e^{x+h} - e^x}{h} < e^{x_m}(1 + |h|)$$

Facendo tendere h a zero, x_m tende ad x e si ha che la durata di e^x è e^x.

Prendendo i valori assoluti e moltiplicando per $|h|$, la precedente disuguaglianza dice che al tendere di h a zero anche $|e^{x+h} - e^x|$ tende a zero; cioè, e^x è *continua*.

Deriviamo rispetto ad y l'uguaglianza $y = e^x$; si ha

$$1 = \frac{de^x}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} \text{ da cui, } \frac{d(\lg_e y)}{dy} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

In particolare, la derivata della funzione $\lg_e y$ per $y = 1$, deve essere 1. Sicchè, risulta

$$\lim_{x=0} \lg_e (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x=0} \frac{\lg_e (1 + x) - \lg_e 1}{x} = 1.$$

Poichè $\lg_e (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ tende a 1 quando $\frac{1}{x}$ percorre una successione divergente qualunque α_n, sarà

$$\lim_{\alpha_n = \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n} = \lim_{x=0} e^{\lg_e (1+x)^{\frac{1}{x}}} = e.$$

Digitized by Google

Su una nuova classificazione dei poligoni regolari stellati

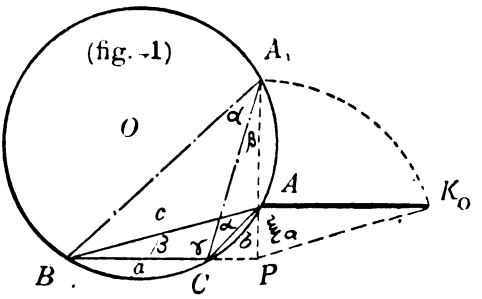
di VINCENZO G. CAVALLARO (Cefalù)

§ I.

1. Senza punto conoscere per esteso la nostra Nota " *Un nuovo solido* „ (*Bollettino di Mat.* a. XVII, 1920, N. 4-5-6-7) lo studioso potrà ugualmente intendere, senza difficoltà di sorta, il contenuto e lo spirito del presente lavoro complementare. Nondimeno non possiamo esimerci dal fare le dichiarazioni preliminari strettamente indispensabili:

Siano rispettivamente (fig. 1) a, b, c; α, β, γ le misure dei lati BC, CA, AB e degli angoli in A, B, C di un triangolo fondamentale ABC e supponiamo che il piede P dell'altezza AP relativa al lato BC cada sul prolungamento di questo lato. Se l'altezza $AP = h$, sufficientemente prolungata incontra poi in un secondo punto A_1 il circoncerchio di ABC, denomineremo ABC, A_1BC *triangolo conveniente* (rispetto al vertice A) e *triangolo obbiettivo*, rispettivamente. Il tr. conveniente non è un particolare triangolo i cui lati, o i cui angoli, siano vincolati da prestabilite relazioni, ma un triangolo ottusangolo affatto generico che soddisfa alle predette proprietà rispetto al suo circoncerchio di raggio R.

(fig. 1)



Digitized by Google

Condotta la perpendicolare in A al segmento PA_1, indichiamo con K_0 il punto in cui la circonferenza di centro P e raggio PA_1 incontra questa perpendicolare e ξ_a la misura dell'angolo APK_0. Trovammo (*loc. cit.*)

$$\begin{cases} CA_1 = b_1 = -2R\cos\gamma\,;\; BA_1 = c_1 = 2R\cos\beta & (1\,;2) \\ \cos\xi_a = -\operatorname{tang}\gamma\,\operatorname{tang}\beta & (3) \\ AK_0 = 2R\sqrt{\cos^2\gamma - \operatorname{sen}^2\beta} = 2R\sqrt{\cos(\gamma+\beta)\cos(\gamma-\beta)} & (4) \end{cases}$$

2. *Oss.* Abbiamo $CA^2 + AK^2_0 = CA_1^2$. Ciò è subito visto sostituendo i valori corrispondenti dati dalle formule (1, 4). Ne segue che se dal punto A s'immagina innalzata la perpendicolare al piano su cui giace il tr. ABC, il vertice A_1 del suo tr. obbiettivo $BC1_1$ che *ruoti* indeformato attorno BC incontrerà, in tal movimento, la predetta perpendicolare ad una distanza da A data dal segmento AK_0 (che diciamo *caratteristico*). Ed il piano di A_1BC in questa posizione, dovrà ruotare attorno BC dell'*angolo caratteristico* $APK_0 = \xi_a$ perchè, con la più breve rotazione, possa venire a coincidere di nuovo col piano iniziale ABC.

L'angolo CAB $= \alpha$ *del tr. conveniente* ABC *è dunque la proiezione ortogonale, in vera grandezza, dell'angolo* CA_1B *appartenente al tr. obbiettivo nello spazio.*

NOTA. — Il tetraedro $K_0(ABC)$ venne denominato *autonormale* nella mia nota « *Teoremi notevoli su un tetraedro autonormale singolare* » (*Giornale di Matem. di Battaglini*, 3ª serie, vol. XIIX) nella quale s'impone a codesto tetraedro la condizione, che lo rende *singolare*, $AK_0 = BC$ ossia che il suo spigolo ortogonale AK_0 sia uguale allo spigolo di rotazione $BC = a = 2R$ sen α che gli è opposto. Segue subito, in base al valore di AK_0 dato al n. 1, la condizione, necessaria e sufficiente, che il tr. *conveniente* ABC costituente la base soddisfi alla relazione

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta + \operatorname{sen}^2\gamma = 1$$

ossia, come ci esprimiamo in quella nota dianzi indicata, che il tr. conveniente ABC sia un *triangolo armonico*.

Quì non è affatto necessario conoscere le eleganti proprietà metriche (le geometriche le abbiamo dianzi adombrate). Rimandiamo a quello studio chi desiderasse saperle.

Aggiungiamo però *la formula che esprime il volume V di un tetraedro generico autonormale* (perciò non singolare) *in funzione della misura a*

Digitized by Google

del suo spigolo di rotazione BJ *e dei due angoli* β, γ, *della base* ABC *ad esso adiacente.* Avremo (Δ = area *ABC*)

$$V = \frac{1}{3}\,\Delta \cdot AK_0 = \frac{1}{3}\,\frac{abc}{4R} \cdot AK_0 .$$

Essendo

$$bc = 4R^2 \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma\ ,\ 4R^2 = \frac{a^2}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{a^2}{\operatorname{sen}^2(\beta+\gamma)}$$

ne segue, in base al valore di AK_0 dato al n. 1,

$$V = \frac{1}{6}\,a^2 \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma \cos c^2(\beta+\gamma)\,\sqrt{\cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma)}$$

Se ad un tetraedro autonormale $K_0(ABC)$ imponiamo la condizione $AK_0 = R$, segue tosto (form. 4, n. 1)

$$\operatorname{sen}^2\beta + \operatorname{sen}^2\gamma = \frac{3}{4}\ ;\ b^2 + c^2 = 3R^2.$$

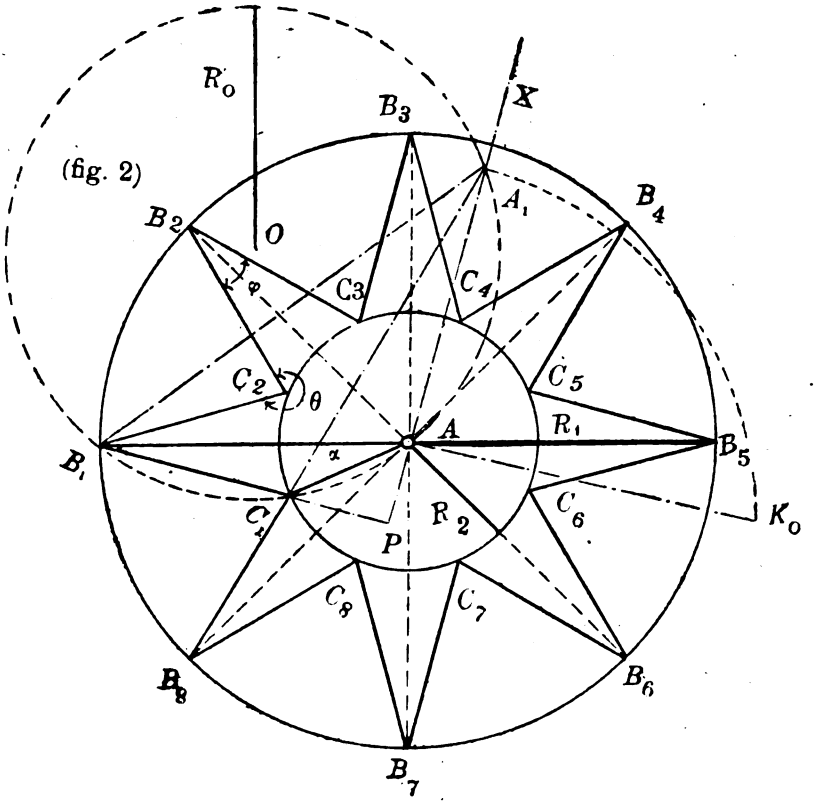
Perciò un tetraedro autonormale quando abbia lo spigolo ortogonale AK_0 uguale al raggio R del circoncerchio della base ABC (*tetraetro autonormate radiale*) avrà altresì la somma dei quadrati dei due spigoli AB, AC uscenti dal piede A dello spigolo ortogonale uguale a 3 volte il quadrato costruito sullo spigolo ortogonale stesso. Da quanto precede possono derivare le indicazioni esplicite per la effettiva costruibilità dei tetraedri autonormali *singolari* e *radiali*, ma non sono necessarie per il presente lavoro.

3. **Costruzione del solido Θ generale.** Assegnata ora la circonferenza di centro A e raggio R_1 (fig. 2) dividiamola in m parti uguali coi punti $B_i (i = 1, 2, 3, \ldots, m)$. Allora ogni circonferenza concentrica alla data rimane divisa in m parti uguali tanto dai raggi AB_i quanto dalle bisettrici degli angoli B_iAB_{i+1} con i punti $C_i (i = 1, 2, 3, \ldots, m)$. E noi, scegliendo indifferentemente il suo raggio R_2, avremo cura però che sia soddisfatta la condizione, facilmente realizzabile e quindi non illusoria, che i triangoli uguali AC_iB_i, $AC_{i+1}B_i$ siano *convenienti* rispetto al vertice comune A: Allora *il segmento caratteristico* AK_0 e *l'angolo caratteristico* ξ_a relativo, ad esempio, al tr. AC_1B_1 è uguale per tutti i triangoli (n. 1, form. 3, 4),

Noi, sulla perpendicolare nel centro A al piano del dato cerchio, prenderemo il segmento $AS = AK_0$ e uniremo poi codesto punto S così determinato con i vari punti B_i, C_i: avremo in

Digitized by Google

(fig. 2)



tal modo costruito il solido regolare $S[C_1B_1C_2B_2C_3B_3.....C_mB_m]$ che diciamo *solido* Θ *d'ordine m*: Esso è dunque *un poliedro regolare concavo, avente per base un poligono o forma stellata di* m *rami convenientemente scelto, soddisfacente alle seguenti*

PROPRIETÀ CARATTERISTICHE - *In ogni solido* Θ *d'ordine* m *la somma delle* 2m *faccie laterali dell'angoloide concavo di vertice* S *è uguale a quattro angoli retti.*

Infatti i $2m$ angoli uguali di vertice S si proiettano ortogonalmente in vera grandezza nei $2m$ angoli uguali che si possono formare attorno allo stesso vertice A congiungendo questo punto con i $2m$ vertici del poligono base (n. 2).

Il coseno dell'angolo ξ *di cui deve ruotare una faccia laterale del solido* Θ *per venire a coincidere col piano della*

Digitized by Google

base, seguendo la più breve rotazione, è uguale al prodotto delle tangenti dei due semiangoli interni del poligono base (1).

Infatti, per la (3) del n. 1, avremo qui (θ, φ *angoli interni* del poligono base; fig. 2)

$$\cos \xi = - \operatorname{tang} \frac{1}{2} \theta \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi \qquad (j)$$

4. **Elementi del solido Θ.** Sia R_0 il raggio del circoncerchio del triangolo AC_1B_1, che è uno dei $2m$ triangoli uguali convenienti che nella loro totalità costituiscono la base (*Triangolo integrante della base*); θ, φ la misura degli angoli interni $B_iC_{i+1}B_{i+1}$, $C_iB_iC_{i+1}$ del poligono regolare di forma stellata. Avremo:

a) *Per l'altezza* $AS = AK_0$ *del solido* Θ (vedi n. 1, form. 4)

$$AS = AK_0 = 2R_0 \sqrt{\cos^2 \frac{1}{2} \theta - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \varphi} =$$

$$= 2R_0 \sqrt{\cos \frac{1}{2} (\theta + \varphi) \cos \frac{1}{2} (\theta - \varphi)} \qquad (x)$$

b) *Per il volume* (espressione ricavata nello studio citato al n. 1)

$$V = \frac{2}{3} R_0 R_1 R_2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{m} \sqrt{\cos^2 \frac{1}{2} \theta - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \varphi} \qquad (y)$$

c) *Per la superficie della base, per quella laterale, totale,* rispettivamente (id. id.)

$$\begin{cases} \Delta_b = \quad 4mR_0^2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \theta \operatorname{sen} \frac{1}{2} \varphi \operatorname{sen} \frac{\pi}{m} \\ \Delta_l = -4mR_0^2 \cos \frac{1}{2} \theta \cos \frac{1}{2} \varphi \operatorname{sen} \frac{\pi}{m} \\ \Delta_t = -4mR_0^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{m} \cos \frac{1}{2} (\theta + \varphi). \end{cases} \qquad (z)$$

(1) Cambiando l'altezza $AS = AK_0$ del *solido* Θ è evidente che esso perde le proprietà caratteristiche: Diviene un poliedro che non ha alcuna speciale proprietà. Se uniamo i vertici del poligono base con un punto V dell'altezza, a seconda che V è dentro o fuori il segmento caratteristico $AS = AK_0$, il corrispondente solido di vertice V ha $>$ o $<$ di 4 retti la somma delle faccie dell'angoloide concavo di vertice V.

Non bisogna generalmente confondere il poligono base di *forma stellata col poligono stellato ordinario* che può dedursi dal primo con acconcie particolari considerazioni che appresso faremo brevemente.

Digitized by Google

Un solido Θ d'ordine m ha $2m+1$ *faccie*, $2m+1$ *vertici*, $4m$ *spigoli*.

§ II. Poligoni reg. stellati ordinari positivi e negativi'

5. La forma geometrica del solido Θ dipende dal suo ordine m e dalla grandezza del raggio R_2 del cerchio inscritto nel poligono base di forma stellata. Fissato un dato ordine, ad esempio 8, come mostra la fig. 2, può accadere, a seconda del valore di R_2, che il poligono di forma stellata che in generale — come dicevamo — non va confuso coll' ordinario ottagono regolare stellato, diventi proprio codesto ordinario ottagono regolare stellato In tal caso i lati, ad esempio, B_1C_2, C_4B_4 giacciono sulla stessa retta, mentre così non accade generalmente (1).

Quando il poligono base è un decagono reg. stellato ordinario il *tr. integrante* AC_1B_1 non è *conveniente*, onde il solido Θ di decimo ordine non ha più una realtà geometrica. Infatti, tracciando la facile figura, è altresì facile dimostrare che il circoncerchio del tr. AC_1B_1 è tangente in A all'altezza AP relativa al lato B_1C_1 e perciò non è possibile l'esistenza del corrispondente segmento caratteristico AK_0 che deve rappresentare l'altezza AS del solido Θ. (n. 1).

Ciò posto, sappiamo che divisa la circonferenza in m parti uguali, noi possiamo costruire soltanto $\frac{1}{2}\varphi(m)$ poligoni regolari di m lati inscritti, essendo $\varphi(m)$ la nota funzione di Gauss esprimente quanti sono gli interi minori di m e primi con m.

Eliminando il poligono convesso, che mai serve allo scopo costruttivo del solido, restano $\frac{1}{2}\varphi(m) - 1$ poligoni reg. stellati ordinari di m lati a cui eventualmente ricorrere se ci venisse fatto di dover costruire un solido Θ particolare

(1) S'intende che, per lo scopo a cui è destinato qui il poligono stellato ordinario, *esso deve venire considerato rispetto al contorno analogo al poligono a forma di stella.* Talchè avremo, ad esempio pel caso dell'ottagono stellato, 16 vertici e 2 angoli interni analogi a φ, θ e il tr. *integrante* analogo ad AC_1B_1. E' facile fare il disegno altresì analoge alla fig. 2, relativo ad un ottagono regolare stellato ordinario.

In un certo senso, dunque, i poligoni reg. ordinari stellati si possono riguardare deducibili da quelli a *forma stellata* (fig. 2).

Digitized by Google

avente per base quel poligono. Esistono valori di m per i quali i corrispondenti poligoni reg. stellati ord. non sono suscettivi a costituire la base del solido Θ, poichè il loro corrispondente tr. integrante AC_1B_1 non è conveniente, rispetto al vertice A così come esistono altri valori di m per i quali i relativi poligoni reg. stellati ord. sono invece suscettivi a costituire la base del solido; infine esistono altri valori di m per i quali i corrispondenti poligoni reg. stellati ord. sono parzialmente atti allo scopo dichiarato.

Così, per esempio, per $m = 5$ (valore minimo di m per costruire un poligono reg. stellato ord.) si ha $\frac{1}{2}\varphi(5) - 1 = 1$: E il pentagono reg. stellato è adoperabile essendo conveniente il suo tr. integrante AC_1B_1; Per $m = 7$, $\frac{1}{2}\varphi(7) - 1 = 2$: Un ettagono reg. stellato è adoperabile e l'altro no. Per $m = 8$, $\frac{1}{2}\varphi(8) - 1 = 1$ e l'ottagono reg. stellato è adoperabile. Per $m = 10$, $\frac{1}{2}\varphi(10) - 1 = 1$ e il decagono reg. stellato è inservibile. Per $m = 12$ $\frac{1}{2}\varphi(12) - 1 = 1$ e il dodecagono reg. stellato è adoperabile. Per $m = 11$ $\frac{1}{2}\varphi(11) - 1 = 4$; 2 undecagoni sono adoperabili e 2 no, etc.

I poligoni reg. di forma stellata da noi generalmente adoperati (fig. 2) sono sempre atti a costituire la base del solido Θ per ogni valore dell'ordine m non minore di 3, purchè facciano una conveniente scelta del raggio R_2 onde il tr. integrante AC_1B_1 venga in possesso del segmento caratteristico AK_0. Gli ordinari poligoni reg. stellati sono, in un certo senso, deducibili particolarmente da quelli a forma stellata (n. 5).

Ai poligoni reg. stellati ordinari possiamo lecitamente attribuire loro maggiore o minore importanza geometrica a secondo che rispett. siano atti o meno a costituire la base del solido Θ o come dire a secondo che rispettivamente il loro tr. integrante AC_1B_1 sia conveniente o meno *rispetto al vertice A giacente nel centro del poligono* tale quindi da dar luogo o no al segmento caratteristico AK_0 rappresen-

Digitized by Google

tante l'altezza del solido considerato. E noi, chiamando *positivi* i primi poligoni e *negativi* i secondi, veniamo così a fondare una notevole classificazione dei poligoni reg. stellati ordinari, associabile efficacemente alle più importanti proprietà di codeste figure. In base agli esempi già dichiarati abbiamo che dei due ettagoni reg. stellati uno è positivo e l'altro negativo; il pentagono reg. stellato è positivo; l'ottagono regolare-stell. è positivo, il dodecagono reg. stellato è positivo, etc. etc. Il decagono stell. è negativo. Dei due polig. reg. stellati di 9 lati, uno è positivo, l'altro negativo. Dei 4 poligoni reg. stellati di 11 lati, due sono positivi e due negativi.

§ III.

Il più semplice solido Θ.

6. È un poliedro di terzo ordine, avente cioè per base un poligono reg. a forma di stella con tre rami ($m = 3$) (fig. 3), soddisfacente a tutte le proprietà caratteristiche (intrinseche) del solido Θ generale.

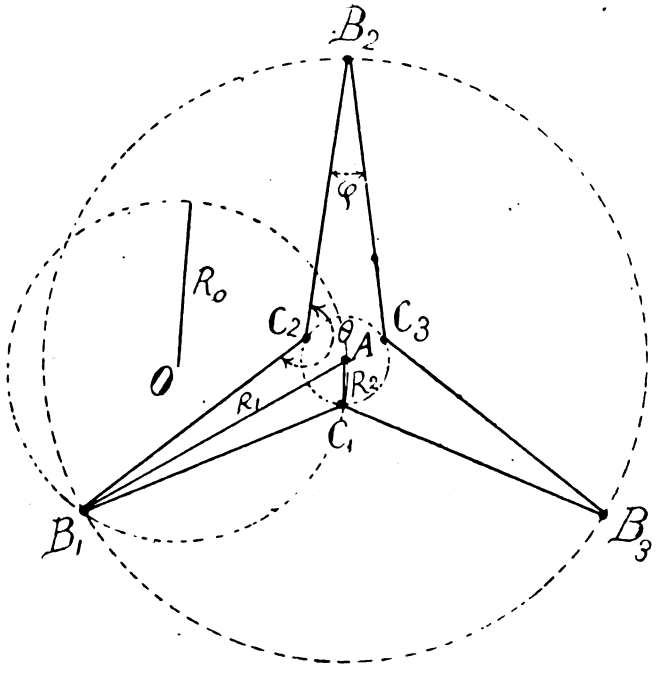


fig. 3

Digitized by Google

Ha 7 faccie, 7 vertici, 12 spigoli. Potremmo chiamarlo *ettaedro* Θ. Il suo volume vien dato dalla (y) del n. 4, ove si ponga $m=3$ esi noti che $\operatorname{sen}\frac{\pi}{m}=\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}=\operatorname{sen}60^0=\frac{1}{2}\sqrt{3}$:

$$V=R_0R_1R_2\sqrt{3\cos\frac{1}{2}(\theta+\varphi)\cos\frac{1}{2}(\theta-\varphi)} \qquad (i)$$

Oss. L'angolo $C_1AB_1=\alpha$ del triangolo integrante à quì il valore di $\frac{2\pi}{6}=60^0$. Talchè possiamo costruire un poligono reg. a forma di stella a tre rami avente *l'angolo* φ (vedi fig.) *prestabilito* e tale che il tr. integrante AC_1B_1 sia conveniente rispetto al vertice A. Se vogliamo, ad esempio, che l'angolo φ sia di 12°, essendo $\frac{1}{2}\varphi=6°$ sarà poi

$\frac{1}{2}\theta=180-\left(\alpha+\frac{1}{2}\varphi\right)$, ossia $\theta=2(180°-66°)=228°$; $\frac{1}{2}\theta=114°$.

Descrivendo il cerchio di centro A e raggio R_2 dividiamolo in 6 parti uguali e tiriamo le rette AC_1, AB_1 passanti per due punti contigui di divisione. Allora è facile costruire il tr. integrante AC_1B_1 che abbia l'angolo $AC_1B_1=\frac{1}{2}\theta=114°$ e quindi, essendo ang. $C_1AB_1=\alpha=60^0$, verrà ang. $AB_1C_1=\frac{1}{2}\varphi=6^0$, etc. Costituito così il tr. integrante segue subito, successivamente, la formazione dell'intero poligono di forma stellata a 3 rami con l'angolo φ di 12°. Rispetto a codesto poligono avremo

$$\cos\frac{1}{2}(\theta+\varphi)=\cos 120^0=-\cos 60=-\frac{1}{2};$$

$$\cos\frac{1}{2}(\theta-\varphi)=\cos 108=-\cos 18°=-\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

onde il suo volume è (n. 6, form. i)

$$V=R_0R_1R_2\sqrt{\frac{3}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}.$$

Se diciamo η l'apotema del decagono reg. convesso inscritto

Digitized by Google

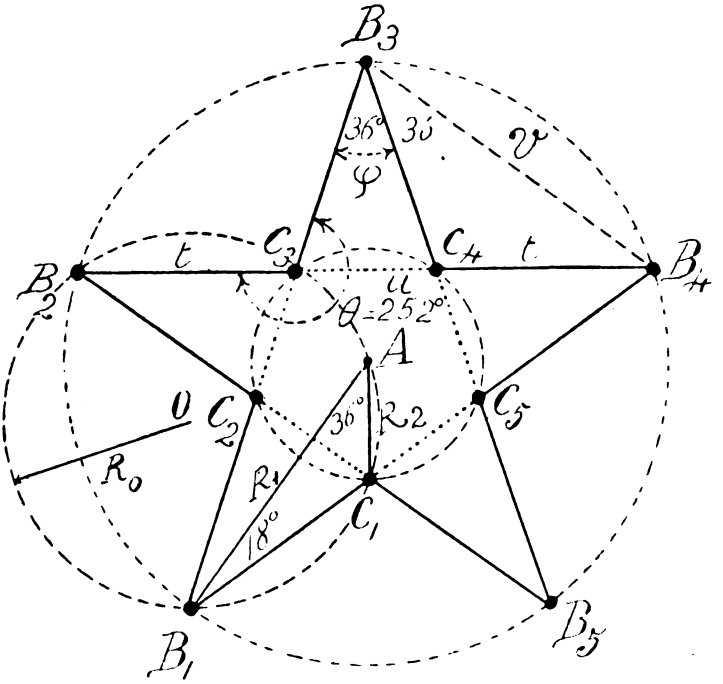


fig. 4

Se poniamo, ad esempio, $C_3C_4 = u$, $B_3B_4 = v$, $C_3B_2 = t$, è noto che

$$\frac{u}{t} = \lambda = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad \frac{t}{v} = \lambda = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

e quindi $$\frac{u}{v} = \lambda^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Ora se indichiamo con R_2, R_1 i raggi dei circoncerchi dei pentagoni regolari convessi di lati u, v sarà $\frac{u}{v} = \frac{R_2}{R_1}$, talchè, posto lecitamente $R_1 = 1$, risulta $R_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Avremo dunque i seguenti valori di elementi fondamentali:

$$R_1 = 1, \; R_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \; m = 5, \; \text{sen}\,\frac{\pi}{m} = \text{sen}\,\frac{\pi}{5} = \text{sen}\,36^0 =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}, \; \cos\frac{1}{2}\theta = \cos 126^0 = -\cos 54^0 =$$

Digitized by Google

nel cerchio di raggio R_1, sappiamo che $\eta = \frac{R_1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ Ne. seguono le relazioni.

$$V = R_0 R_1 R_2 \sqrt{\frac{3}{2}\frac{\eta}{R_1}} = R_0 R_2 \sqrt{R_1} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}\eta} =$$
$$= \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot R_0 R_2 \sqrt{R_1 \cdot \eta} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, R_0 R_2 P.$$

che danno luogo a nòtevoli enunciati.

La superficie totale è (n. 4, form. z)

$$\Delta_t = -4 \cdot 3 \cdot R_0^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot -\frac{1}{2} = 3\sqrt{3}\, R_0^2,$$

onde l'elegante teor.

Il più semplice solido Θ, *con l'angolo* φ *di* 12°, *ha una superficie totale che è uguale al prodotto del numero* $3\sqrt{3}$ *per l'area del quadrato costruito sul raggio del circoncerchio relativo al suo triangolo integrante* AC_1B_1.

È quasi superfluo avvertire che lo studioso, variando acconciamente la grandezza dell'angolo φ, potrà fare una sorgente di considerazioni analoghe, suscettive eventualmente di risultati notevoli.

§ IV. Il solido Θ singolare.

7. Il più semplice poligono reg. stellato ordinario è come si sa, il pentagono reg. stellato, ($m = 5$). (fig. 4). In esso è $\varphi = 36°$, $\theta = 252°$ (1). Il tr. integrante AC_1B_1 è conveniente ed i suoi angoli sono $C_1AB_1 = 36°$, $AB_1C_1 = 18°$, $AC_1B_1 = 126°$. Noi possiamo costruire il solido Θ avente per base il pentagono reg. stellato seguendo la via geometrica generale dianzi indicata (al n. 3), salvo ad indicarne in seguito un'altra particolare che conferisce al solido la sua singolarità.

(1) I poligoni *stellati ordinari* concepiti come particolarità di quelli a *forma di stella* (n. 5) hanno per ogni valore di m, ugual numero di vertici coi secondi poligoni. Onde, ad esempio nel pentagono stellato (fig. 4) oltre ai 5 vertici $B_1, \ldots, B_5$ dovranno considerare i punti $C_1, \ldots, C_5$ come altri 5 vertici. Quindi avremo i due *angoli interni* $\varphi = C_3B_3C_4$, $\theta = B_2C_3B_3$ (quest'ultimo concavo come nel caso ordinario generale di fig. 2).

Digitized by Google

$= -\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$, $\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varphi = \operatorname{sen} 18^0 =$

$= \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$.

Conseguentemente

$$\cos^2\frac{1}{2}\theta = \frac{5-\sqrt{5}}{8}, \quad \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\varphi = \frac{3-\sqrt{5}}{8}.$$

Allora il volume del solido Θ, qui considerato, è (n. 4, form. y)

$$V = \frac{5}{6} R_0 \sqrt{\frac{25-11\sqrt{5}}{2}}. \qquad (\alpha)$$

Sia Δ l'area del tr. integrante AC_1B_1 avremo:

$\Delta = \frac{1}{2} R_1 R_2 \operatorname{sen} 36°$, ossia, sostituendo, $\Delta = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{25-11\sqrt{5}}{2}}$ (3)

Ora da (α), (3) deduciamo

$$V = \frac{5}{6} R_0 \cdot 4\Delta = \frac{10}{3} R_0 \cdot \Delta. \qquad (\gamma)$$

Vediamo dunque che *il volume del solido* Θ *avente per base un pentagono reg. stellato ord. è uguale ai* $\frac{10}{3}$ *del prodotto dell'area del tr. integrante per il raggio del suo circoncerchio.*

Ciò posto, l'area della base del solido è uguale evidentemente a 10Δ e allora, essendo AS l'altezza del solido (che, come sappiamo, è uguale al segmento caratteristico AK_0 rispetto al vertice A del tr. integrante conveniente AC_1B_1) poichè avremo anche

$$V = \frac{1}{3}(10\Delta) \cdot AS \qquad (\xi)$$

---

(1) Perciò il solido Θ singolare può anche riguardarsi come l'insieme di 10 *tetraedri autonormali radiali* uguali e contigui (Vedi NOTA, n. 2) Il termine *singolare* adoperato per il solido Θ non ha nulla a che fare col termine omonimo adoperato in principio della predetta « NOTA » del n. 2 e relativo ad un altro tipo di tetraedro autonormale.

Digitized by Google

ne segue, dal confronto di quest'ultima relazione con la (γ):

$$Altezza\ AS = AK_0 = R_0 \qquad (\delta)$$

che è l'importantissima relazione che conferisce al solido Θ, qui considerato, la sua *singolarità:*

L'altezza $AS = AK_0$ *del solido* Θ *avente per base un pentagono reg. stellato ord. è uguale al raggio del circoncerchio del tr. integrante della base* (1).

Oss. Poichè la formula generale (*x*) del n. 4 assegna a quell'altezza $AS = AK_0$ il valore $AK_0 = 2R^0\sqrt{\cos^2\frac{1}{2}\theta - \text{sen}^2\frac{1}{2}\varphi}$, dovrà essere nel caso del solido Θ singolare

$$R_0 = 2R_0\sqrt{\cos^2\frac{1}{2}\theta - \text{sen}^2\frac{1}{2}\varphi}\ ;\ \cos^2\frac{1}{2}\theta - \text{sen}^2\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{4}.$$

E quest'ultima relazione risulta appunto verificata. Infatti, sostituendo i valori trigonometrici dianzi ricavati (n. 7), verrà

$$\frac{5-\sqrt{5}}{8} - \frac{3-\sqrt{5}}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

8. Osserviamo che l'area Δ del tr. integrante AC_1B_1 può essere anche espressa mediante la relazione $\Delta = \frac{R_1 R_2 t}{4R_0}$, la quale, combinata con la (γ) darà

$$V = \frac{5}{6} R_1 \cdot R_2 \cdot t, \qquad \text{onde} \qquad (\xi)$$

Il volume del solido singolare è uguale ai $\frac{5}{6}$ *del prodotto delle misure dei lati del triangolo integrante* $A C_1 B_1$ *della base,*

9. Esprimiamo il volume del solido singolare *in funzione del solo raggio* $R_1 = 1$. A tal fine seguiremo due vie diverse le quali sono entrambe utili per un vicendevole controllo dei risultati.

Il lato *v* del pentagono regolare convesso inscritto nel cerchio di raggio $R_1 = 1$ ha il valore $v = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ ed es-

Digitized by Google

sendo, come dicevamo al n. 7, $t = \frac{\sqrt{5}-1}{2} v$, verrà, trasformando e riducendo, $t = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$. Allora il raggio R_0, calcolato mediante la relazione $R_0 = \frac{R_1 R_2 t}{4\Delta}$, in cui agli elementi a secondo membro vengono sostituiti i loro valori dianzi trovati (n. 7), per $R_1 = 1$ acquista il valore

$$R_0 = \sqrt{\frac{65 - 29\sqrt{5}}{25 - 11\sqrt{5}}} \qquad (K)$$

che, come sappiamo, rappresenta anche quello della misura dell'altezza $AS = AK_0$ del solido. (n. 7, form. δ). Sostituendo codesto valore di R_0 nella (α) verrà

$$V = \frac{5}{6}\sqrt{\frac{65 - 29\sqrt{5}}{2}}. \qquad (\eta)$$

Se calcoliamo, più semplicemente, R_0 mediante la relazione

$2R_0 = \frac{R_1}{\text{sen } 126°} = \frac{R_2}{\text{sen } 18_0}$, avremo, sostituendo,

$$2R_0 = 1 : \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right) = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) : \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right), \text{ ossia}$$

$$R_0 = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}. \qquad (K')$$

E perciò, sostituendo in (α) questa nuova espressione di R_0, verrà:

$$V = \frac{5}{6}\sqrt{\frac{25 - 11\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}. \qquad (\eta')$$

E intanto è facile dimostrare che i valori (K), (K'); (η), (η') sono uguali intrinsecamente.

10. Le formule che danno la superficie della base, quella laterale e totale si possono ricavare da quelle generali (n. 4, *z*) sostituendo in queste i valori speciali che siamo venuti indicando per i corrispondenti elementi. E allora, dopo le necessarie trasformazioni e riduzioni, avremo rispettivamente

Digitized by Google

$$\begin{cases} \Delta_s = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{25-11\sqrt{5}}{2}} = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{7+3\sqrt{5}}} = \frac{5}{2}\sqrt{\Omega} \\ \Delta_i = \frac{5}{2}\sqrt{5\,\frac{5-\sqrt{5}}{7+3\sqrt{5}}} = \frac{5}{2}\sqrt{5\Omega} \\ \Delta_i = \frac{5}{2}\sqrt{2(3+\sqrt{5})\,\frac{5-\sqrt{5}}{7+3\sqrt{5}}} = \frac{5}{2}\sqrt{(6+2\sqrt{5})\Omega} \end{cases}$$

avendo posto $\Omega = \frac{5-\sqrt{5}}{7+3\sqrt{5}}$.

11. Calcoliamo il coseno dell'angolo ξ di cui deve ruotare una faccia del solido singolare per venire a coincidere col piano della base seguendo la minore via. Avremo

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta = \operatorname{sen} 126^0 = \operatorname{sen} 54^0 = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)\ ;$$

$$-\cos\frac{1}{2}\theta = -\cos 126^0 = \cos 54^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varphi = \operatorname{sen} 18^0 = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$$

$$\cos\frac{1}{2}\varphi = \cos 18^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

ne segue

$$-\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\ ,\quad \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\ .$$

E perciò, sostituendo nella (j) del n. 3, verrà, dopo le opportune riduzioni,

$$\cos\xi = -\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{5} \qquad (\zeta)$$

Oss. Dalla (ζ) segue tosto

$$\frac{1}{2}(5\cos\xi - 1) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\ ,$$

relazione che permette di determinare la sezione aurea del raggio $R_1 = 1$, del cerchio circoscritto al poligono reg. stellato, base del solido, mediante il coseno dell'angolo ξ della rotazione considerata.

Digitized by Google

12. Noi abbiamo trovato l'importante e singolarissimo risultato che nel caso di un pentagono reg. stellato ord. — e che è il caso più semplice del genere — il segmento caratteristico AK_0 rispetto al vertice A del tr. integrante conveniente AC_1B_1 è uguale al raggio del circoncerchio di codesto triangolo (n. 7). Onde per costruire l'altezza $AS = AK_0$ del solido singolare Θ, non occorre certo la solita via grafica generale indicata al n. 1, 3 poichè possiamo seguire l'altra, più semplice, della determinazione grafica del raggio di quel circoncerchio.

Ed ora vogliamo riassumere i fatti geometrici essenziali che siamo venuti dichiarando in questo § IV nella seguente proposizione, che costituisce, senza dubbio, un elegantissimo risultato geometrico:

Proposizione - *Se dal centro* A (*fig. 4*) *di un ordinario pentagono regolare stellato innalziamo la perpendicolare al piano sul quale esso poligono giace, e prendiamo su di essa il segmento* AS *uguale al raggio* R_0 *del circoncerchio di uno dei dieci triangoli integranti, che si ottengono congiungendo quel centro con i vertici del poligono, ad esempio* AC_1B_1, *il poliedro regolare* $S[B_1C_1B_2C_2B_3C_3B_4C_4B_5C_5]$ *che veniamo a determinare unendo il punto* S *dello spazio con gli stessi vertici, e che perciò ha per altezza quel raggio del circoncerchio già considerato, è un solido* Θ*; onde soddisfarrà alle proprietà caratteristiche:*

I) La somma delle faccie laterali del suo angoloide concavo di vertice S *è uguale a quattro angoli retti* (n. 3)

II) Il coseno dell'angolo ξ *di cui deve ruotare una faccia laterale del solido attorno al lato giacente sulla base, per venire a coincidere, con la più breve rotazione, col piano della base medesima, è uguale al prodotto delle tangenti dei due semiangoli interni* $\left(\frac{1}{2}\theta\ ,\ \frac{1}{2}\varphi\right)$ *del poligono base considerato* (n. 3).

Conosciamo poi i teoremi relativi al volume (n. 7, 8) e le espressioni numeriche degli elementi di questo solido singolare.

Digitized by Google

PICCOLE NOTE

Alcune proprietà metriche della parabola

a) È noto che se seghiamo due fasci di raggi proiettivi sovrapposti, di centro u, con una conica passante per u e giacente nel piano dei fasci, si ottiene sulla conica in discorso una proiettività e quindi le corde che congiungono le coppie di punti omologhi inviluppano un'altra conica (1). Ciò premeeso, supponendo di considerare una parabola di equazione $y^2 = 2px$ (riferita all'asse e alla tangente nel vertice) e di prendere il centro u dei due fasci proiettivi sovrapposti, nel punto improprio della parabola, vogliamo caratterizzare quelle proiettività. se vi saranno, per cui la congiungente le coppie di punti corrispondenti inviluppa ancora una parabola.

Rispetto al nostro sistema di assi l'equazione di un diamstro qualunquo sarà

$$y = h \quad (h = \text{cost}^{\text{te}})$$

e una proiettività tra i diametri sarà quindi individuata dalla formula

$$(1) \qquad h' = \frac{\alpha h + \beta}{\gamma h + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0).$$

Dette allora (x, y), (x', y') le coordinate degli estremi di due diametri corrispondenti nella proiettività (1), avremo

$$\begin{cases} x = \dfrac{h^2}{2p} & , \quad y = h \\ x' = \dfrac{1}{2p}\left(\dfrac{\alpha h + \beta}{\gamma h + \delta}\right)^2 & , \quad y' = \dfrac{\alpha h + \beta}{\gamma h + \delta} \end{cases}$$

e quindi l'equazione della congiungente questi punti sarà

$$2px - \left(h + \frac{\alpha h + \beta}{\gamma h + \delta}\right) y + h\left(\frac{\alpha h + \beta}{\gamma h + \delta}\right) = 0,$$

o anche, ordinando rispetto al parametro h:

$$f(xyh) = (\alpha - \gamma y)\, h^2 + (2p\gamma x - \alpha y - \delta y + \beta)\, h + (2p\delta x - \beta y) = 0.$$

Per avere l'inviluppo dovremo derivare questa equazione rispetto al parametro h, uguagliare a zero ed eliminare h tra questa equazione e

(1) Vedi p. es. SEVERI: *Geometria Proiettiva*, pag. 230 e segg.

Digitized by Google

la precedente; otterremo allora senz'altro, come equazione dell'inviluppo cercato

$$4p^2\gamma^2x^2 - 4p\gamma(\alpha - \delta)xy + [(\alpha + \delta)^2 - 4\beta\gamma]y^2 + \\ + 4p(\beta\gamma - 2\alpha\delta)x - 2\beta(\delta - \alpha)y + \beta^2 = 0$$

che risulta essere, come sapevamo, una conica. Perchè questa sia una parabola, dovrà essere zero il suo A_{33} (1), cioè, essendo

$$A_{33} = 16p^2\gamma^2(\alpha\delta - \beta\gamma) = 0,$$

dovrà essere $\gamma = 0$ (2).

Ne segue questo primo risultato: *Le proiettività richieste sono quelle date dalla formula*

$$(I) \qquad h' = \frac{\alpha h + \beta}{\delta} = ah + b \quad .$$

e la parabola inviluppata dalle congiungenti i punti corrispondenti ha per equazione

$$(\alpha + \delta)^2 y^2 - 8p\alpha\delta x - 2\beta(\delta - \alpha)y + \beta^2 = 0,$$

che perciò risulta avere la stessa direzione assiale della parabola di partenza e il vertice nel punto di coordinate

$$x_0 = \frac{\beta^2}{2p(\alpha + \delta)^2} \quad , \quad y_0 = \frac{(\delta - \alpha)\beta}{(\alpha + \delta)^2} .$$

b) Tra la doppia infinità di proiettività del tipo (I), se ne stacca una semplice proiettività, avente una notevole proprietà.

Ricordiamo, a questo scopo, che, dette in generale (x_1, y_1), (x_2, y_2) le coordinate di due punti qualunque della parabola, le coordinate del polo della loro congiungente sono

$$\xi = \frac{y_1 y_2}{2p} \quad , \quad \eta = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

e quindi che il triangolo formato da questi tre punti ha per area

$$S = \frac{(y_2 - y_1)^2}{8p} .$$

Ne segue allora che se tra le proiettività (I) scegliamo il fascio di proiettività (traslazioni)

$$(II) \qquad h' = h + b ,$$

questo è caratterizzato dal fatto che i triangoli formati dalla corda con-

---

(1) In generale si indica con A_{ik} il complemento algebrico dell'elemento a_{ik} del discriminante della conica.

(2) Notiamo che con $\gamma = 0$ il discriminante della conica risulta proporzionale ad $\alpha^2\delta^2(\alpha + \delta)^2$ e quindi in generale differente da zero.

Digitized by Google

giungente le coppie di punti corrispondenti e dalle tangenti, negli estremi, alla parabola $y^2 = 2px$ hanno un'area costante

$$S = \frac{b^3}{8p}$$

direttamente proporzionale al cubo della traslazione b (1).

c) Inversamente, prese due parabole identiche tra loro per traslazione lungo l'asse, le tangenti alla parabola interna determinano sull'altra i punti di una proiettività del tipo (II).

Infatti trasliamo la parabola $y^2 = 2px$ in guisa che l'equazione della parabola traslata risulti

$$y^2 = 2px - 2p\alpha, \tag{2}$$

essendo $\alpha > 0$ l'ampiezza arbitraria della traslazione; prendiamo poi sulla parabola $y^2 = 2px$ un punto A di ordinata h e diciamo A_1 il punto sulla parabola (2), di uguale ordinata, così che sarà:

$$A_2 \equiv \left(\frac{h^2 + 2p\alpha}{2p},\ h\right).$$

Dal punto A_1 conduciamo la tangente alla parabola (2) che avrà per equazione

$$2hy - 2px - h^2 + 2p\alpha = 0$$

e diciamo B_1, B_2 i punti d'incontro di questa tangente con l'altra parabola; avremo subito per le coordinate di questi punti

$$B_1 \equiv \left\{\frac{(h + \sqrt{2p\alpha})^2}{2p},\ h + \sqrt{2p\alpha}\right\}$$

$$B_2 \equiv \left\{\frac{(h - \sqrt{2p\alpha})^2}{2p},\ h - \sqrt{2p\alpha}\right\}$$

e quindi risulta senz'altro che i punti B_2, A, B_1 sono punti corrispondenti in una traslazione (II), dove $b = \sqrt{2p\alpha}$.

Osservando poi che i due diametri

$$y = h\sqrt{2p\alpha},\ y = +\sqrt{2p\alpha}$$

sono simmetrici del diametro $y = h$ ne segue, da ciò che precede:

La congiungente gli estremi di due diametri simmetrici di un diametro generico di una parabola $y^2 = 2px$, *essendo* $2b$ *la distanza costante tra essi, inviluppa, al variare del diametro, una parabola identica a quella data e che si ottiene da essa con una traslazione di ampiezza* $\alpha = \frac{b^2}{2p}$.

---

(1) Notiamo che in questo caso le parabole inviluppo hanno per

$$y^2 = 2px - \frac{b^2}{4}$$

e che quindi si ottengono dalla primitiva con una semplice traslazione di ampiezza $\frac{b^2}{8p}$. Inoltre toccano le tangenti invilluppanti nel loro punto di mezzo.

Digitized by Google

d) Ritornando al fascio di traslazioni (II), prendiamo tre punti successivi corrispondenti, che avranno quindi, per coordinate, le espressioni

$$\frac{(h-b)^2}{2p}, h-b\ ;\ \frac{h^2}{2p}, h\ ;\ \frac{(h+b)^2}{2p}, h+b$$

e calcoliamo l'area del triangolo da essi formato. Avremo

$$2\ \text{area} = \begin{vmatrix} \frac{(h-b)^2}{2p} & h-b & 1 \\ \frac{h^2}{2p} & h & 1 \\ \frac{(h+b)^2}{2p} & h+b & 1 \end{vmatrix}$$

Si trova così che l'area non dipende dalla particolare terna di punti corrispondenti successivi che si sono scelti, ma solo dalla traslazione.

Ciò del resto rientra, come caso particolare, in una proprietà generale delle coniche, osservata per primo dall'Angelesco e da me poi generalizzata (1).

Pisa, R. Università, gennaio 1928.

ARMANDO CHIELLINI

(1) ANGELESCO: *Una proprietà funzionale delle coniche*, Comptes Rendus, t. 175, anno 1922.

CHIELLINI; *Una proprietà funzionale delle coniche*, Litografia Vallerini, 1926, Pisa.

Per la riforma degli ordinamenti scolastici

Il Bilancio della P. I. al Senato del Regno.

Quando i nostri Lettori riceveranno questo Fascicolo sarà già avvenuta, al Senato, la discussione del Bilancio della P. I. da cui ci separano ancora pochi giorni, nel momento in cui scriviamo, e nel quale formuliamo l'augurio che, con la nuova discussione, si faccia ancora qualche passo verso la risoluzione della questione, che tanto interessa lo studio delle scienze matematiche e fisiche e le condizioni dei docenti di queste discipline nelle scuole medie (1).

(1) Disgraziatamente, l'on. Senatore ANTONIO GARBASSO, per una improvvisa indisposizione sopraggiuntagli, non potè partecipare alla discussione. È rimasta, pertanto, del tutto impregiudicata la questione che ci sta a cuore e che, non ne dubitiamo, sarà certamente oggetto di ulteriore studio da parte di S. E. il Ministro della P. I.

Digitized by Google

Aggruppamenti scientifici della Scuola Complementare.

Qualche Lettore, dopo aver letto lo stelloncino del nostro precedente fascicolo (a pag. 40 e 41), ci ha scritto, raccomandandoci di non dimenticare la Scuola Complementare. Non l'abbiamo mai dimenticata, e, pure nello stelloncino ricordato, dicevamo, esplicitamente, d'aver pronte, *per le altre Scuole medie*, proposte analoghe a quelle formulate per il Liceo classico e per il Liceo scientifico. Sappiamo bene che meritano la più grande considerazione anche le condizioni fatte alle discipline scientifiche nella Scuola Complementare e ai docenti di esse.

Favorevole accoglienza alle nostre nuove proposte.

A differenza di quanto era avvenuto per la nostra prima proposta, le proposte nuove, sviluppate nel preced. fasc. (a pag. 40 e 41), hanno incontrato favorevole accoglienza presso i Colleghi, vari dei quali ci hanno scritto appoggiandole.

Insistiamo quindi sulla proposta di un conveniente accrescimento del numero delle cattedre di matematica e fisica, da assegnarsi alle varie scuole medie per modo che, *anche* pei professori di matematica e di fisica, o di una soltanto di queste discipline, l'orario si aggiri sulle 15 ore settimanali senza oltrepassare tale numero, specialmente quando il professore debba aver cura pure del Gabinetto di Fisica.

Alla Presidenza della Associazione Mathesis.

La proposta dell'accrescimento del numero delle cattedre di matematica e fisica è stata esplicitamente avanzata, come è noto, dal professore Enriques Presidente della Associazione Mathesis, il quale, non ne dubitiamo, proseguirà a propugnarla strenuamente.

Si è ripetuto troppe volte, e da fonti attendibili, che al momento in cui si elaborava la riforma Gentile, la Presidenza della "Mathesis., colla sua opera vigile riuscì ad impedire che fosse assegnato un orario troppo esiguo per lo studio della matematica, quale ad esempio sarebbe stato quello resultante da un orario complessivo di 18 ore, 9 nel ginnasio e 9 nel Liceo, che fossero state fissate per la matematica e la fisica insieme, e così salì l'orario da 18 a 22 ore settimanali, *ma tutte affidate ad un solo insegnante.* Evidentemente la Presidenza della Mathesis confidava che, venendo alle persone, si sarebbe repartita la soma del lavoro in modo da non aggravarle di troppo. Si sapeva del resto di poter contare sull'abnegazione degli insegnanti, sul loro raffinato senso di disciplina e di dovere. Essi ne hanno data una prova ben luminosa e son ben meritevoli di un riconoscimento tangibile della prova data.

I Soci della Mathesis, dal loro canto, con ripetute votazioni hanno confermato la loro fiducia nella Presidenza, la quale, quindi, non può certo abbandonare alla loro sorte quei soci, che sono la gran maggioranza dei Soci della Mathesis, e che solo da un accrescimento del numero delle cattedre di materie scientifiche, possono sperare di riacquistare condizioni più tranquille di studio, di lavoro e di vita.

Effetti dell'assegnazione di una sola ora settimanale per la matematica, o per la fisica, in certe classi.

III bimestre: *Da un registro di Matematica di una 1ª Ginnasiale* (con 35 alunni).

Digitized by Google

22 febbraio (mercoledì): giorno delle Ceneri - Vacanza
10 » (»): **1ª lezione** del 3° bimestre
7 marzo (»): **2ª** » »
14 » (»): **3ª** » »
21 » (»): **4ª** » »
28 » (»): **5ª** » »
4 aprile (»): Mercoledì Santo: Vacanza
11 » (»): Vacanza (ultimo giorno delle vacanze pasquali)
18 » (»): *Adunanza di scrutinio per le medie del 3° bimestre*

(5 le lezioni fatte, 35 alunni da interrogare e classificare in base alle spiegazioni di quattro lezioni).

La stessa situazione resulta da un registro di Fisica di una prima liceale (con 35 alunni).

Qual'è il rimedio? Aggiungere 1 ora di matematica nella 1ª Ginnasiale e 1 ora di fisica nella 1ª Liceale. Ma, *per carità*, ci ammonisce più d'un Collega, chè corriamo il rischio che la Presidenza dell'Associazione Mathesis contribuisca a farci accrescere di altre due ore l'orario settimanale..... No, ci aggiriamo un po' in un circolo vizioso, ma noi sappiamo che la Presidenza dell'Associazione Mathesis scinde le due questioni: lieve aumento dell'orario per modo che si evitino le conseguenze su accennate, e contemporaneo aumento del numero delle cattedre, diguisache diminuisca, e non già si accresca, l'aggravio dei docenti di matematica e di fisica delle Scuole medie.

La Direzione.

Congresso Internazionale dei Matematici

PROGRAMMA PROVVISORIO

Ordine dei Lavori

Al Congresso Internazionale dei Matematici, indetto dall'Unione Matematica Internazionale, che si terrà a Bologna dal 3 al 10 Settembre 1928 sotto gli auspici della R. Università, sono invitati senza alcuna eccezione tutti i cultori delle scienze matematiche pure ed applicate.

Il Congresso si svolgerà con sedute plenarie ed adunanze di Sezione.

Nelle sedute plenarie, da autorevoli cultori dei vari rami di scienza si leggeranno conferenze di interesse generale; nelle adunanze di Sezione si leggeranno comunicazioni su materie pertinenti al titolo della Sezione. Ogni Sezione potrà essere suddivisa in più Sottosezioni.

Tutte le sedute e le adunanze si terranno nel palazzo della Università e negli istituti scientifici ad essa adiacenti.

Nella prima seduta plenaria si procederà alla costituzione del Seggio definitivo, il quale comprenderà: un Presidente effettivo; alcuni Vicepresidenti; un Segretario generale; alcuni Segretari aggiunti.

Le sedute plenarie successive saranno presiedute dal Presidente effettivo o da uno dei Vice-presidenti.

La prima adunanza di ciascuna Sezione sarà presieduta da uno degli Introduttori designato dal Comitato ordinatore. In questa seduta la Sezione deciderà la suddivisione in Sottosezioni, e nominerà uno o più Segretari che resteranno in carica per tutta la durata del Congresso.

Alla fine di ogni adunanza di Sezione, i membri presenti eleggeranno il Presidente della seduta successiva.

Digitized by Google

L'ordine delle letture risulterà, di norma, dalla pubblicazione del fascicolo contenente gli argomenti delle comunicazioni; ma potrà essere modificato dal voto della Sezione o della Sottosezione rispettiva.

I Congressisti che intendono fare comunicazioni sono pregati di fare conoscere il titolo e l'argomento delle loro letture ad uno degli Introduttori della Sezione rispettiva, entro il Maggio 1928.

Le Conferenze e le Comunicazioni lette al Congresso saranno raccolte nei volumi degli Atti.

Si pregano gli Autori di volere consegnare il testo delle loro letture ad uno degli Introduttori, od al Segretario generale del Congresso, non più tardi del 30 Settembre 1928.

Per gli scritti in lingue straniere (francese, inglese, spagnolo, tedesco), in latino classico ed in latino *sine flexione*, è richiesto l'uso della macchina da scrivere (eccettuato per le formule). Se vi sono figure, i relativi cliché dovranno essere forniti dagli Autori.

Ogni Congressista avrà diritto di ricevere una copia dei volumi degli Atti del Congresso.

Nei giorni del Congresso saranno esposti manoscritti ed altri cimeli riguardanti la Storia della Matematica in Bologna, e si inaugurerà un modesto ricordo nella facciata della casa paterna di Scipione Dal Ferro.

Sezioni ed Introduttori

I. *Aritmetica, Algebra, Analisi:* M. Cipolla, R. Università di Palermo - G. Fubini, R. Politecnico di Torino - G. Scorza, R. Università di Napoli - L. Tonelli, R. Università di Bologna.

II. *Geometria:* L. Berzolari, R. Università di Pavia - E. Bompiani, R. Università di Roma - G. Fubini, R. Politecnico di Torino - F. Severi, R. Università di Roma.

III. *Meccanica, Astronomia, Geodesia, Geofisica, Fisica-matematica, Fisica teorica:* G. Armellini, R. Osservatorio Astronomico al Campidoglio, Roma - P. Burgatti, R. Università di Bologna - E. Fermi, R. Università di Roma - T. Levi-Civita, R. Università di Roma - C. Somigliana, R. Università di Torino.

IV. *Statistica, Economia matematica, Calcolo delle probabilità, Scienza attuariale:* L. Amoroso, R. Università di Roma - P. Cantelli, Istituto di Previdenza, via Merulana, 105, Roma - C. Gini, R. Università di Roma - G. Toja, Facoltà di Scienze Economiche e Sociali, via Laura, Firenze.

V. *Ingegneria e Applicazioni industriali* (Ingegneria civile, meccanica, elettrotecnica, idraulica, Architettura navale, Telegrafia e telefonia con o senza fili, Arte militare, Aerodinamica, Cartografia): G. Albenga, R. Scuola Ingegneria di Bologna - G. Di Pirro, Direttore Istituto Superiore Postale telegrafico - telefonico, viale del Re 26, Roma - G. Giorgi, R. Università di Cagliari - F. Lori, R. Scuola Ingegneria, Padova - M. Panetti, R. Politecnico di Torino - C. Porro, Generale, Senatore del Regno, Rovello (Como) - U. Puppini, Direttore della R. Scuola di Ingegneria di Bologna - L. Silla, R. Scuola Ingegneria, Roma - G. Vacchelli, Generale, R. Istituto Geografico Militare di Firenze - G. C. Vallauri, R. Politecnico di Torino.

VI. *Matematiche elementari, Questioni didattiche, Logica matematica:* U. Amaldi, R. Scuola Superiore d'Architettura di Roma - G. Peano, R. Università di Torino - A. Perna, Ispettorato centrale Ministero dell'Istruzione, Roma.

VII. *Filosofia, Storia della Matematica:* E. Bortolotti, R. Università di Bologna - F. Enriques, R. Università di Roma - R. Marcolongo, R. Università di Napoli - G. Vacca, R. Università di Roma.

Digitized by Google

Ricevimenti Ufficiali

La città di Bologna. l'Unione Matematica Italiana, Il Comitato ordinatore del Congresso, organizzeranno ricevimenti ufficiali ad onore degli ospiti. Altrettanto hanno in animo di fare le città di Ravenna e di Firenze.

Al loro arrivo in Bologna i Congressisti troveranno i programmi dettagliati di questi ricevimenti.

Escursioni e Visite

Il Comitato organizzerà visite alle città di Ravenna, di Ferrara e di Firenze, ad interessanti lavori d'ingegneria sull'Appennino ed all'impianto idroelettrico del Lago di Ledro.

Viaggi e soggiorno in Bologna

Il Comitato provvederà perchè ai Congressisti ed alle persone di loro famiglia che verranno in loro compagnia sia concessa sui prezzi di transito sulle ferrovie e sui piroscafi di navigazione italiani, una riduzione che per le ferrovie sarà almeno del 30 %.

Nei giorni del Congresso funzionerà alla stazione ferroviaria di Bologna un Ufficio del Congresso, ove i Congressisti troveranno indicazioni ed assistenza.

Una apposita Commissione si incaricherà degli alloggi negli alberghi, in pensioni o presso privati.

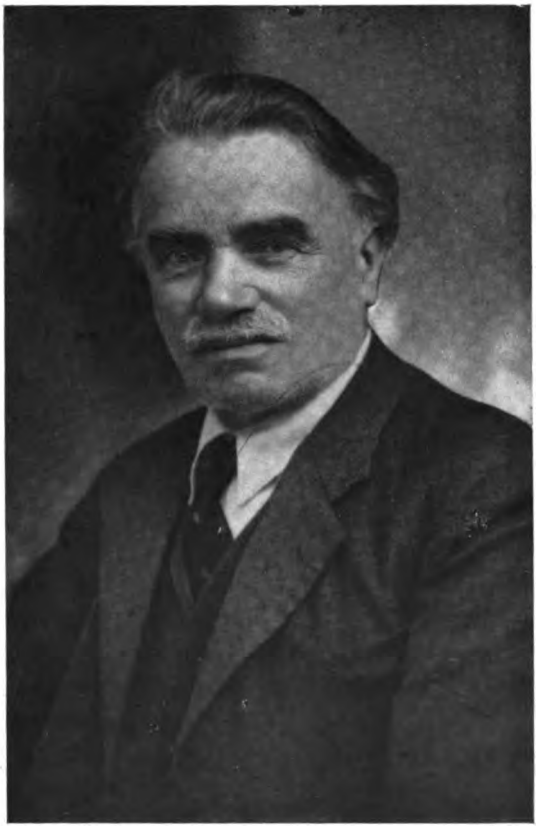
Un comitato di Signore accoglierà le Signore e le Signorine che prenderanno parte al Congresso o che interverranno come appartenenti alla famiglia di un Congressista, ed organizzerà visite nella Città e negli immediati dintorni.

Quota di iscrizione

La quota di iscrizione è fissata in L. 50 per ogni congressista, da versare al Tesoriere-Economo Comm. G. Borsari, presso la R. Università di Bologna. Le persone appartenenti alla famiglia di un Congressista, versando una quota di L. 25, acquisteranno tutti i diritti dei Congressisti, tolto quello del gratuito ricevimento di un esemplare degli Atti del Congresso.

(N. d. D.) *Noi che avemmo il piacere di assistere venti anni fa, al IV Congresso Internazionale Matematico tenuto in Roma non dubitiamo, e ce lo auguriamo vivamente, che vi sia la più larga partecipazione a questo nuovo Congresso internazionale, da parte di tutti i cultori delle scienze matematiche pure ed applicate.*

Digitized by Google



LUIGI BIANCHI

Digitized by Google

Digitized by Google

Anno XXIV dalla fondazione - Fasc. III - Annata VII Nuova Serie

IN MEMORIA

DI

LUIGI BIANCHI

(1856 - 1928)

Il 6 giugno si spense, quasi improvvisamente, Luigi Bianchi, a Pisa, nella sua abitazione.

La funerea notizia incominciò a diffondersi, il giorno stesso, per l'Italia e pel mondo, addolorando profondamente i discepoli e gli ammiratori del Grande Maestro.

Chi scrive ne fu particolarmente sorpreso e addolorato, sì fresco era in lui il ricordo di una visita fatta al Maestro, nel giorno 20 novembre 1927, nel quale il Bianchi avrebbe dovuto commemorare un altro Grande Maestro, il Dini! All'ultimo momento era stata sospesa l'inaugurazione del Monumento al Dini e conseguentemente era stata sospesa pure la commemorazione, che doveva aver luogo nell'Aula Magna dell'Università con un discorso del Bianchi, ma alcuni affezionati discepoli del Dini e del Bianchi erano già partiti da Firenze (1) ignorando la sospensione delle cerimonie e questi, prima di ripartire da Pisa, vollero porgere i loro omaggi al

(1) Ne ricordiamo i nomi: i prof. Ciani e Sansone della R. U. di Firenze; la Signora Sansone Galli; il prof. Antonio Socci; il Preside prof. Paolo Bonaventura; il prof. Maroni Arturo; il prof. Conti Alberto.

Digitized by Google

Bianchi e vi si recarono, tutti insieme, accompagnati dal prof. Nicoletti della R. U. di Pisa.

« Spirito caustico ed argutissimo, il Bianchi sapeva « allietare la conversazione con frizzi, con osservazioni acute, « sintetiche, che in poche parole ritraevano al vivo tanto « una questione scientifica quanto il carattere di un uomo; « nè mai discorrendo, faceva pesare sull'interlocutore la sua « superiorità di uomo e di scienziato ». Questo giudizio che il *Fubini* ha espresso sul Bianchi (1) ben si attaglia al Nostro compianto Maestro, che, pur nell'occasione ricordata, non solo accolse con grande cordialità tutti coloro che si erano recati a visitarlo, ma allietò veramente la conversazione sia rievocando, col suo antico condiscepolo Antonio Socci, varî episodi della sua vita di studente universitario, sia ricordando tanti altri particolari che potevano interessare l'uno o l'altro dei presenti alla simpatica riunione, senza trascurarne alcuno..... La visita si protrasse per circa un'ora senza che mai apparisse alcun segno di stanchezza da parte del Bianchi, che in quella mattina appariva pure d'aspetto floridissimo. Egli non accennò a sofferenze di sorta... ma gli intimi non ignoravano che la fibra robustissima del Maestro era minata da un'albuminaria apparsa da due anni dopo l'influenza da cui era stato colpito.... gli intimi sapevano che di tanto in tanto il Maestro era afflitto da attacchi nefritici e miocardici, ma nessuno pensava che Egli potesse scomparire così presto!

Ai suoi Figli il Bianchi aveva dedicata tutta la sua vita ed era sempre lieto e fiero di parlarne: così, nella mattina del 20 novembre, Egli aveva ricordato in modo speciale i suoi figli maschi e tra essi il più lontano, ancora in Somalia, del quale però lo allietava il pensiero di una prossima visita.... Questa visita era avvenuta ai primi di quest'anno, ma poi il Figlio era ripartito per la Somalia.... e quando improvvisa sopraggiungeva la catastrofe erano presso il Maestro soltanto le sue adorate figliole. Gli altri due figli giunsero in tempo

---

(1) Lo ha espresso in una sua Nota che comparirà sul Bollettino dell'U. M. I. e della quale abbiamo avuto conoscenza per cortesia dello stesso prof. Fubini e del prof. Pincherle.

Digitized by Google

per assistere al funerale.... e colpì in modo speciale la grande rassomiglianza al Padre di uno dei Figli, nel cui volto i discepoli più antichi rividero proprio l'immagine del loro adorato Maestro, quando, poco più che trentenne, li aveva entusiasmati colle meravigliose Lezioni da Lui impartite alla Università e alla Scuola Normale....

La salma era stata trasportata il 7 giugno dalla abitazione alla Scuola Normale nella sala della Direzione, trasformata in cappella ardente, dove vegliò, notte e giorno, una guardia d'onore d'allievi....

Il corteo mosse al mattino dell'8 giugno dalla Scuola Normale, sostò alla Chiesa dei Cavalieri ove S. E. il Cardinale Maffi diede l'assoluzione alla salma.... poi il Corteo prese per la Via U. Dini passando dinanzi al Monumento del Dini (1) proseguendo per la Via Ulisse Dini, pel Sottoborgo e per il Lungarno, tra due fitte ali di popolo, fino all'Università dove il corteo fece una sosta.... Deposto il feretro al centro dell'atrio dell'Università, parlarono il Podestà di Pisa, on. Buffarini, il Prefetto, l'on. Queirolo che rappresentava il Senato, il Rettore della R. Università, il Preside della Facoltà di Scienze, il prof. Fubini dell'Università di Torino, il prof Arnaldi della Scuola Normale Superiore, un laureando, un cittadino pisano.... Dai rappresentanti della città, del Governo e del Senato furono degnamente ricordate anche le benemerenze patriottiche del Bianchi, la Sua leale adesione al nuovo regime, la Sua partecipazione alle più importanti votazioni politiche del Senato.... Dai rappresentanti della Scienza e della Scuola furono ricordate le benemerenze scientifiche e didattiche del Bianchi.... Dal giovine laureando, di cui ci sfuggì il nome, furono ricordate le doti speciali del Maestro, e le spiccate qualità della Sua mente e del Suo animo; e tale ricordo fu fatto con parole così appassionate da strappare le lacrime.... nè noi sapemmo

---

(1) Il monumento è poi stato scoperto una mattina, per volontà degli studenti, ansiosi di ammirare il bel volto scolpito, con mano maestra, dal Bistolfi.

Digitized by Google

trattenerle, e vedemmo inumiditi di pianto gli occhi dei più antichi discepoli presenti alle estreme onoranze (1).

Poi il Corteo riprese e dopo una piccola sosta nella Cappellina della Misericordia — in quella stessa Cappella che, due anni fa, fu cappella ardente del compianto Figlio strappato all'amore di chi scrive — il Corteo proseguì fino al Camposanto Monumentale ove la Salma fu tumulata accanto proprio al sepolcro del Dini!....

15 luglio 1928.

ALBERTO CONTI

* * *

A questo breve cenno fanno seguito alcune notizie biografiche che abbiamo potuto procurarci noi stessi e il testo dei manifesti che vedemmo pubblicati a Pisa nel giorno dei funerali. Segue poi un articolo favoritoci dall'illustre prof. FUBINI, che, in esso, ricorda rapidamente le Memorie del Bianchi, ma lo stesso prof. Fubini si riserva di dare ai nostri Lettori un articolo più diffuso *sulle trasformazioni del Bianchi,* che furono la scoperta più importante *del compianto Maestro* e noi, fin d'ora, ne ringraziamo l'illustre professore dell'Ateneo torinese.

* * *

Notizie biografiche su « LUIGI BIANCHI »

Nato a Parma il 18 gennaio 1856.

Ammesso alla Scuola Normale Superiore di Pisa, con 40 su 40, nel novembre del 1873.

Laureato in matematica pura, con 110 su 110 e con un giudizio assai lusinghiero sulla Tesi di laurea il 30 novembre 1877.

Al posto di perfezionamento « Lavagna » (in Pisa) nel 1877-78 e nel 1878-79.

---

(1) Vedemmo, fra i presenti, i proff. universitari Bertini, Fubini, Nicoletti, Rosati, Enriques, Sansone, Bompiani, Romiti, Ciani, Mancini. Puccianti.... e altri di cui ci sfuggono i nomi; e tra i proff. di Scuole medie, Maroni, Benedetti, Chiellini, Tuci, Bellatalla.... Vedemmo rappresentanti dell'Accademia Navale di Livorno e dell'Esercito, del Ginnasio di Pontedera ove insegna una figlia del Bianchi e di altre Scuole Medie di Pisa.

Digitized by Google

Approvato a pieni voti assoluti, nel 1879, all'esame di abilitazione all'insegnamento, dalla Scuola Normale Superiore di Pisa, con altra Tesi, che fu dichiarata degna di stampa.

Ad un posto di perfezionamento all'estero, nel biennio 1879-80; 1880-81, a Monaco e a Gottinga, presso il Klein.

Professore interno nella Scuola Normale Superiore di Pisa dal 1884-85 al 1928.

Professore straordinario di Geometria Proiettiva nella R. U. di Pisa nel 1886.

Professore straordinario di Geometria Analitica nella R. U. di Pisa nello stesso anno 1886.

Professore ordinario di Geometria Analitica nella R. U. di Pisa il 13-2-1890.

Incaricato dell'insegnamento delle matematiche superiori nella R. U. di Pisa dal 1892 al 1919 e durante il 1923 24.

Incaricato dell'insegnamento dell'Analisi Superiore nella R. U. di Pisa dal 1919 al 1928.

Succeduto a U. Dini nell'ufficio di Direttore della Scuola Normale Superiore di Pisa, nel 1918.

Vincitore del Premio Reale dei Lincei, nel 1893.

Insignito di moltissime onorificenze, tra cui la Commenda dell'Ordine Civile di Savoia.

Appartenente alle maggiori Accademie, italiane e straniere.

Membro del C. S. della Pubblica Istruzione.

Appartenente alla Camera dei Senatori, dal 1924, per nomina avuta dal Governo Nazionale.

Ebbe cinque figli: tre maschi e due femmine.

* * *

Manifesti pubblicati e alcuni dei telegrammi pervenuti in morte di Luigi Bianchi.

Il manifesto del Fascio

Il Fascio di Pisa ha pubblicato il seguente manifesto:

« Luigi Bianchi Senatore del Regno, Maestro insigne di quella Facoltà di Matematica dello studio pisano che trae la sua fama dalla storia galileiana, è morto.

Scienziato europeo, degno compagno di Ulisse Dini, unì al culto della scienza quello della Patria immortale; onde, per la sua operosità, per la sua rettitudine, per il suo valore, ben merita l'onore del riposo eterno nel vecchio camposanto monumentale.

Digitized by Google

Il Partito Fascista che lo ebbe sincero estimatore e devoto parlamentare in quanto fino all'ultimo fu tra i Senatori fedelissimi, saluta la sua memoria e s'inchina dinanzi alla sua gloria, che è gloria d'Italia nel mondo. — Il Segretario Politico ».

Il manifesto del G. U. F.

Il Gruppo Universitario Fascista ha pubblicato il seguente manifesto:

« La morte del senatore Luigi Bianchi è lutto grandissimo per noi e per il nostro studio, che lo ebbe maestro insigne di scienza e di vita. La gioventù fascista sente tutto il dolore della sua dipartita e ne avverte il vuoto incolmabile. Alla sua memoria si inchina e al ricordo del grande Maestro porge l'omaggio di devozione senza confini.

Il Segretario del gruppo universitario: dottor Morello Morelli.

Il manifesto della « Dante »

La Presidenza del Comitato Pisano della Società « Dante Alighieri » ha pubblicato il seguente manifesto:

Cittadini e Consoci,

Con la morte del Senatore prof. Luigi Bianchi, si è spento un faro luminoso di italianità, che diffondeva la luce del sapere in ogni parte del mondo.

Il Comitato Pisano della « Dante » che lo ebbe da molti anni affezionato consocio, si unisce al lutto cittadino e nazionale, e piega reverente il Vessillo inviando l'estremo saluto alla memoria dello scienziato illustre, del cittadino integerrimo, dell'Italiano purissimo.

La Presidenza

Pisa 7 Giugno 1928 (VI)

Il telegramma dell'on. Gentile

L'on Gentile ha così telegrafato al vice Direttore della Scuola Normale:

« Alla fedele Famiglia della Scuola Normale mie condoglianze cordiali di scolaro memore devoto e fervido augurio che nome Luigi Bianchi vi sia sempre ricordato e seguito nel suo esempio nel culto severo appassionato delle scienze e nell'amore della scuola — Gentile ».

* * *

Telegrammi pervenuti all'On. Podestà di Pisa in occasione della morte dell'Illustre Sen. Prof. Luigi Bianchi.

Digitized by Google

* * *

« On. Guido Buffarini
Podestà di Pisa

La morte dell'illustre e compianto Prof. Luigi Bianchi mi addolora profondamente. L'Estinto onorava la scienza italiana e l'Università di Pisa alla quale Egli diede tanti anni di appassionato e fecondo insegnamento. Porgo alla famiglia dell'Estinto e a codesta Città le più profonde condoglianze.

Presidente Camera Deputati
Casertano ».

* * *

« Podestà — Pisa.

Rettore Università annunciami morte illustre figlio parmense Prof. Luigi Bianchi pisano di adozione. Pregola rappresentarmi funerali e deporre per questo Comune corona sulla salma onorata. Ringrazio.

Il Vice Podestà: *Dalla Valle* ».

* * *

Cenno sui lavori scientifici di Luigi Bianchi

Molto notevoli sono i trattati del Bianchi; in essi sono raccolte le sue Lezioni sulla teoria dei Gruppi discontinui e dei Gruppi continui, sulla teoria delle funzioni di variabile complessa ed ellittiche, sulla teoria dei numeri, sulla Geometria differenziale. In questi Libri non si cerchino divagazioni o appelli alla intuizione; essi sono concepiti e redatti in modo preciso e rigoroso; lo scopo non è quello di indicare nuovi campi aperti alle ricerche future, ma di coordinare nel modo migliore i risultati già conseguiti senza trascurare nulla di quanto all'Autore sembri di importanza essenziale.

Si è fatto perciò talvolta loro quasi il rimprovero di trascurare l'intuizione geometrica o analitica. Ma questo modo di apprezzare l'opera del Bianchi è del tutto infondato; pochi possedettero, al pari di Lui, una intuizione insieme rapida a profonda, come ben hanno appreso i suoi discepoli dalle conversazioni col Maestro.

Digitized by Google

Soltanto questo è vero; che quando il fatto intuitivo gli sembrava appena appena in qualche lato manchevole, il Bianchi lo trascurava nella esposizione definitiva, dando il primo posto alla trattazione sistematica e completa in ogni particolare.

Nelle sue ricerche si occupò degli argomenti più svariati. Trascurando qui quelli di minor rilievo, come per es. gli studi sulle Equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine, sugli integrali ellittici, sulle possibili estensioni del metodo di Riemann, possiamo dire che la sua attività fu nella massima parte dedicata alla teoria dei numeri e alla Geometria Differenziale.

Nella teoria dei numeri studiò problemi relativi alle forme quadratiche ed Hermitiane, determinando anche i poliedri fondamentali di molti gruppi discontinui e trovando relazioni interessantissime tra il numero di certi vertici di tale poliedro e il numero delle classi di ideali del corpo aritmetico posto a base della ricerca. Nella Geometria Differenziale aprì nuove vie alla indagine scientifica, che arricchirono di ampi capitoli la teoria delle superficie, e degli spazi più generali. Aveva poca simpatia per l'uso degli immaginari che di regola considerava più adatti alla Geometria Algebrica che alla Differenziale. Egli voleva *vedere* gli enti da lui studiati, e talvolta costruiva persino modelli. Ecco perchè nei suoi libri si trova, per evitare l'uso dei numeri complessi ripetuta in varia forma due volte una medesima trattazione.

Due sono i principi essenzialmente nuovi delle sue ricerche; il primo è lo studio della Geometria non euclidea, non solo come fine a sè stessa, ma anche come metodo adatto alla scoperta di nuovi risultati nella Geometria euclidea. Egli trovò anche per primo tutte le Geometrie di Riemann, che ammettono un gruppo continuo di movimenti in se stesse. Il secondo principio, introdotto dal Bianchi, è lo studio delle *trasformazioni* dl una superficie in un senso ben distinto da quello abituale ai Geometri algebrici. Con questo metodo il Bianchi creò le teorie, oggi ormai classiche, relative alle superficie a curvatura costante, alle deformate delle quadriche,

Digitized by Google

a taluni sistemi tripli ortogonali e tripli coniugati di superficie. La fecondità dell'idea di trasformazione nel modo concepito dal Bianchi, si dimostrò grandissima anche in altri capitoli della Geometria Differenziale: ricordo le trasformazioni di Darboux e del Bianchi stesso per le superficie isoterme, e tutti gli studi che, per opera di Eisenhart e di Tzitzeica, hanno permesso di organizzare queste ricerche da nuovi punti di vista e di collegarle anche più intimamente alla teoria delle Equazioni differenziali. La teoria delle trasformazioni di tali equazioni, la teoria del problema di Bäklund, che tanti progressi ha fatto per opera dei Matematici Francesi, non sarebbero sorte senza gli studi del Bianchi, che ne vide non solo la importanza geometrica, ma diede anche l'enunciato di problemi essenziali per l'Analisi pura.

Immensa è stata l'efficacia dell'insegnamento del Bianchi sui suoi discepoli: il primo impulso a gran parte dei lavori di questi proviene da Lui. Con Luigi Bianchi si è spenta pertanto una delle Menti più elette e più poderose che abbia avuta la Matematica nel nostro Paese.

GUIDO FUBINI
(R. U. di Torino)

Digitized by Google

Una genesi uniforme dei luoghi geometrici di 1° ordine

di GIUSEPPE BURNENGO (Genova)

La retta nel piano e il piano nello spazio si possono considerare rispettivamente come i luoghi geometrici dei punti equidistanti da due punti dati P_1, P_2; per cui, chiamando P un punto generico di uno di questi luoghi si ha per definizione:

$$\overline{P_1P} = \overline{P_2P}.$$

Quindi, applicando la formula che dà la distanza di 2 punti di cui si conoscono le coordinate cartesiane ortogonali si ha:

a) *nel piano:* posto $P_1 \equiv (x_1, y_1)$, $P_2 \equiv (x_2, y_2)$, $P \equiv (x, y)$

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} = \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$$

b) *nello spazio:* posto $P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$, $P \equiv (x, y, z)$

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2} = \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}$$

Elevando a quadrato i due membri, sviluppando poi i quadrati che figurano sotto radice e riducendo si ottiene:

a) *nel piano:*

$$(1) \qquad x(x_2-x_1)+y(y_2-y_1)-\frac{(x_2^2+y_2^2)-(x_1^2+y_1^2)}{2} = 0$$

b) *nello spazio:*

$$(1)' \qquad x(x_2-x_1)+y(y_2-y_1)+z(z_2-z_1)- \\ -\frac{(x_2^2+y_2^2+z^2_2)-(x_1^2+y_1^2+z_1^2)}{2} = 0.$$

Le equazioni (1) e (1)′ dimostrano intanto che una retta

Digitized by Google

e un piano sono rispettivamente rappresentati analiticamente da equazioni di 1° grado in (x, y) o in (x, y, z).

Ora per dare alle equazioni stesse una forma più espressiva osserviamo che, detta d la distanza $\overline{P_1P_2}$ e indicati con $\cos\alpha$ e $\cos\beta$ ovvero con $\cos\alpha$, $\cos\beta$ e $\cos\gamma$ i coseni degli angoli formati dalla perpendicolare alla retta o al piano rispettivamente cogli assi x, y o cogli assi x, y, z si ha:

a) *nel piano:*

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = d\cos\alpha \\ y_2 - y_1 = d\cos\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2^2 - x_1^2 = (x_2 + x_1)(x_2 - x_1) = (x_2 + x_1)\, d\cos\alpha \\ y_2^2 - y_1^2 = (y_2 + y_1)(y_2 - y_1) = (y_2 + y_1)\, d\cos\beta \end{cases}$$

b) *nello spazio:*

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = d\cos\alpha \\ y_2 - y_1 = d\cos\beta \\ z_2 - z_1 = d\cos\gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2^2 - x_1^2 = (x_2 + x_1)(x_2 - x_1) = (x_2 + x_1)\, d\cos\alpha \\ y_2^2 - y_1^2 = (y_2 + y_1)(y_2 - y_1) = (y_2 + y_1)\, d\cos\beta \\ z_2^2 - z_1^2 = (z_2 + z_1)(z_2 - z_1) = (z_2 + z_1)\, d\cos\gamma \end{cases}$$

Quindi le equazioni precedenti (1) e (1)', in virtù di queste relazioni, diventano:

a) *nel piano:*

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\cos\alpha + \frac{y_1 + y_2}{2}\cos\beta\right) = 0$$

b) *nello spazio:*

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma -$$

$$-\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\cos\alpha + \frac{y_1 + y_2}{2}\cos\beta + \frac{z_1 + z_2}{2}\cos\gamma\right) = 0$$

D'altra parte, detto M il punto medio di P_1P_2, se OAM è la spezzata principale di M nel piano, e $OABM$ l'analoga nello spazio, in virtù del principio che dice " La somma delle proiezioni dei lati di una spezzata è uguale alla proiezione

Digitized by Google

del lato di chiusura „, proiettando le dette spezzate rispettivamente sulla normale ON o alla retta o al piano, si ha:
a) *nel piano:*

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \cos\alpha + \frac{y_1 + y_2}{2} \cos\beta = ON = \rho$$

b) *nello spazio:*

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \cos\alpha + \frac{y_1 + y_2}{2} \cos\beta + \frac{z_1 + z_2}{2} \cos\gamma = ON = \rho$$

Ciò premesso, le equazioni della retta e del piano assumono rispettivamente la forma:
a) *retta nel piano:*

$$x \cos\alpha + y \cos\beta - \rho = 0 \tag{2}$$

b) *piano dello spazio:*

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - \rho = 0 \tag{2'}$$

le quali sono le ordinarie equazioni " normali „ rispettivamente della retta nel piano e del piano nello spazio.

Da quanto precede risulta dunque che le equazioni della retta nel piano e del piano nello spazio sono rispettivamente della forma:

a) *rette:* $ax + by + c = 0$

b) *piano:* $ax + by + cz + d = 0$

nelle quali equazioni i cofficienti a, b per la retta, e i coefficenti a, b, c per il piano sono quantità proporzionali ai coseni degli angoli che la normale alla retta o al piano forma cogli assi, mentre il coefficente c per la retta e d per il piano sono professionali rispettivamente alla distanza della retta o del piano dall'origine degli assi; assegnando particolari valori ai numeri a, b, c, d si ottengono le diverse posizioni della retta e del piano rispetto agli assi.

Digitized by Google

UNIV. OF CALIFORNIA

Sulla discussione delle equazioni parametriche di 2° grado

di ROCCO SERINI (Pavia)

Nell'occasione di alcune lezioni ai nostri laureandi, dovetti consultare varî trattati in riguardo alla discussione sulle equazioni parametriche di 2° grado.

Mi venne fatto di pensare due metodi che non vedo citati e che credo abbiano una certa importanza didattica.

Per non perdermi in generalità tratterò coi due metodi il seguente

Problema. In una semicirconferenza di diametro $AB = 2r$ condurre una corda CD parallela al diametro, in modo che il trapezio isoscele $ABCD$ risulti di dato perimetro (1).

Se D è il punto medio di AB e C' la proiezione ortogonale di C su AB l'incognita può essere $DC' = x$, in quanto, dato C' il trapezio è determinato: sarà poi $o \leq x \leq r$.

Pel semiperimetro p in funzione di x si trova facilmente

$$p = x + r + \sqrt{2r(r-x)}$$

il radicale essendo preso positivamente.

Vediamo l'andamento di questa funzione nell'intervallo $o \leq x \leq r$, in cui può variare x.

Si ha

$$p(o) = r(1+\sqrt{2}) \quad p(r) = 2r\,, \; p(o) > p(r)$$

inoltre per la derivata di p

$$p'(x) = 1 - \frac{r}{\sqrt{2r(r-x)}}\,.$$

La derivata si annulla per $x = \frac{r}{2}$, che è compreso nel-

(1) Il lettore è pregato di farsi la figura.

Digitized by Google

l'intervallo e siccome per $x < \frac{r}{2}$ è positiva e per $x > \frac{r}{2}$ è negativa, si ha per $x = \frac{r}{2}$ un massimo e precisamente

$$p\left(\frac{r}{2}\right) = \frac{5}{2}r.$$

Quindi la nostra funzione partendo dal valore $r(1+\sqrt{2})$ per $x=0$ sale al valore $\frac{5}{2}r$ per $x = \frac{r}{2}$, discende quindi al valore $2r < r(1+\sqrt{2})$.

Conviene a questo punto farsi una figura, sia pure grossolana, segnando le ascisse $0, \frac{r}{2}, r$, le relative ordinate e l'andamento della funzione.

Ora se è dato p e si vuole trovare x, ciò equivale a tracciare una parallela all'asse x e cercarne le intersezioni eventuali coll'arco di curva tracciata. Dall'ispezione della figura si ha immediatamente in modo intuitivo il seguente risultato (che può rendersi rigoroso col teorema che ogni funzione continua e monotona in un intervallo prende una e una sola volta ogni valore compreso tra il massimo e il minimo):

se $p < 2r$ nessuna soluzione (il minimo di p è $2r$),

se $2r \leq p < r(1+\sqrt{2})$ una sola soluzione $> \frac{r}{2}$,

se $r(1+\sqrt{2}) \leq p < \frac{5}{2}r$ due soluzioni una maggiore ed una minore di $\frac{r}{2}$,

se $p = \frac{5}{2}r$ una soluzione $= \frac{r}{2}$,

se $p > \frac{5}{2}r$ nessuna soluzione $\left(\text{il massimo di } p \text{ è } \frac{5}{2}r\right)$.

Mi siano permesse alcune osservazioni. Intanto il metodo ha il grande vantaggio di essere intuitivo: è alla portata di uno studente del liceo scientifico almeno dell'ultimo anno; è certo il più conveniente nella discussione di molti problemi

Digitized by Google

geometrici (dove è generalmente dato il perimetro o la superficie o il volume di una figura che si cerca).

Esso è applicabile in tutti quei casi in cui il parametro compare linearmente: basta risolvere rispetto al parametro e studiare il parametro come funzione della incognita nell'intervallo a questa consentito.

Quindi la discussione può senz'altro estendersi al caso in cui l'equazione in x (sempre contenente linearmente il parametro) sia di grado > 2 od anche trascendente (equazioni trigonometriche p. e.). Solo che mentre nel caso della equazione di 2° grado possiamo effettivamente trovare i valori della incognita, in questi ultimi casi, si potrà solo vedere quando ci sono radici e in che intervallo sono contenute.

Il metodo esposto evita anche l'inconveniente della razionalizzazione che può introdurre radici estranee che generalmente si fanno corrispondere a problemi associati al primo come vedremo sull'esempio già discusso.

Quando il parametro non compaia al primo grado si può per la discussione procedere nel modo seguente. Sia

$$ax^2 + bx + c = 0$$

l'equazione di 2° grado con a, b, c funzioni di un parametro p, e debba l'equazione avere radici comprese tra α e β ($\alpha < \beta$).

La sostituzione

$$y = \frac{x - \alpha}{\beta - x}$$

fa corrispondere all'intervallo (α, β) l'intervallo $(0, \infty)$ (1). Allora la trasformata in y della equazione primitiva che è

$$(a\beta^2 + b\beta + c)y^2 + (2\alpha\beta a + b\beta + b\alpha + 2c)y + a\alpha^2 + b\beta^2 + c = 0$$

dovrà avere radici positive e si potrà applicare la regola di Cartesio combinata colla considerazione del discriminante.

Pel discriminante Δ_1 della trasformata si trova

$$\Delta_1 = (\alpha - \beta)^2 \Delta$$

---

(1) Se $\alpha = -\infty$ la sostituzione è $y = \frac{1}{\beta - x}$,

Se $\beta = \infty$ $\quad y = x - \alpha$.

Digitized by Google

se Δ è quello della primitiva, quindi (come del resto era evidente a priori) basta considerare Δ.

Applichiamo il metodo al nostro problema geometrico, la cui equazione razionalizzata diventa

$$x^2 - 2(p+2r)x + p^2 - 2pr - r = 0;$$

il problema richiede che essa abbia radici tra 0 e r.

Posto

$$y = \frac{x}{r-x}$$

dovremo cercare le radici positive o nulle dell'equazione in y

$$y^2(p-2r)^2 + 2y(p^2 - 3rp + r^2) + p^2 - 2pr - r^2 = 0;$$

osserviamo che $(p-2r)^2$ è sempre >0 escluso per $p=2r$ nel qual caso una delle radici diventa infinita.

Il coefficiente di $2y$, $p^2 - 3pr + r^2$ è positivo fuori dell'intervallo

$$\left(r\frac{3-\sqrt{5}}{2},\ r\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right),$$

e negativo entro questo intervallo, il termine noto

$$p^2 - 2pr - r^2$$

è positivo fuori dell'intervallo

$$(r(1-\sqrt{2}),\ r(1+\sqrt{2}))$$

negativo entro. Il discriminante $\Delta = -2r\left(p - \frac{5}{5}r\right)$ è positivo per $p < \frac{5}{2}r$, negativo per $p > \frac{5}{2}r$.

Scriviamo allora il quadro seguente la cui costruzione è chiara:

	$-$	$r(1-\sqrt{2})$	0	$r\frac{3-\sqrt{5}}{2}$	$2r$	$r(1+\sqrt{2})$	$\frac{5}{2}r$	$r\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	$+$
a	$+$		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$		$+$
b	$+$		$+$	$-$	$-$	$-$	$+$		$+$
c	$+$		$-$	$-$	$-$	$+$	$+$		$+$

$p < \frac{5}{2}r$ cioè $\Delta > 0$

Digitized by Google

in esso sono segnati su un asse i punti in cui i coefficienti dell'equazione cambiano di segno: nelle tre orizzontali sono indicati nei varî intervalli i segni dei coefficienti a, b, c della equazione di 2° grado: degli intervalli si considerano solo quelli entro cui $\Delta > 0$.

Allora la regola di Cartesio dice che quando

$$\left.\begin{array}{lll} r(1-\sqrt{2}) < p < r\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} & \text{una radice positiva} & \\ r\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < p < 2r & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & \text{una soluzione} \\ 2r < p < r(1+\sqrt{2}) & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{lll} r(1+\sqrt{2}) < p < \dfrac{S}{2}r & \text{due radici positive} & \text{due soluzioni} \end{array}\right\}$$

come appare evidente dalla ispezione del quadro [1].

Se si confronta col risultato ottenuto mediante il primo metodo si trova qui in più che il problema avrebbe una soluzione anche quando $r(1-\sqrt{2}) \leq p < 2r$, mentre geometricamente è chiaro che deve essere $p \geq 2r$.

Questa soluzione estranea viene introdotta dalla razionalizzazione e, come è facile convincersi, corrisponde al problema associato di iscrivere il trapezio isoscele in modo che la somma delle basi diminuita della somma degli altri due lati sia eguale a $2p$.

Il vantaggio del primo metodo sta precisamente, oltre alla intuitività, nel fatto che esso non introduce soluzioni estranee.

---

[1] Per completare la discussione occorre studiare l'equazione negli estremi degli intervalli parziali.

Digitized by Google

Intorno all' insegnamento della Storia delle scienze nella Scuola media

di MARIA MARCALETTI (Milano) (1)

Nell'esporre molto brevemente le mie idee intorno all'insegnamento della storia delle scienze nella scuola media, ritengo opportuno considerare la questione sotto un duplice aspetto: quel che è ora prescritto di fare e quel che sarebbe, secondo me, desiderabile si facesse.

Prima del 1923 non credo esistesse, in nessuna scuola media, l'insegnamento della storia delle scienze e si verificavano cose assurde quali questa che cito: il nome del Galilei ricorreva nel corso di storia letteraria e l'insegnante d'italiano si sforzava anche di spiegare il contenuto filosofico delle sue opere scientifiche: l'insegnante di fisica aveva il solo dovere di citarne il nome quando ne enunciava qualche principio, e molte volte, pressato dal dover svolgere un programma sempre affannoso in tempo ristretto, rimandava gli allievi alle nozioni avute, intorno a un rinnovatore della scienza, dall'insegnante d'italiano.

Nel 1923, la Riforma Gentile mise come tassativo l'insegnamento della Storia della scienza nell'Istituto tecnico e nel Liceo scientifico, rispettivamente con queste parole: « Cenni di storia della scienza nell'antichità, nel Medio Evo e nei tempi moderni » e « Il problema della scienza nella sua storia ».

« Le scienze degli antichi (matematica, geografia, fisica, chimica e astronomia).

« La scienza mediovale (enciclopedia scolastica e tentativi di ricerche scientifiche particolari).

---

(1) Da un Discorso letto alla Sezione milanese della Mathesis.

Digitized by Google

« Il Rinascimento e il naturalesimo (Telesio, Campanella, Copernico, Gilbert). La grande questione del sistema tolemaico e copernicano » (Galilei). Il problema metodologico (Bacone e Descartes). La scienza moderna (Croce, Maxwell, Mach, Poincarè, ecc.) » affidandolo nella prima scuola al docente di storia, nella seconda a quello di filosofia e storia.

Era solo accennato nel liceo classico e all'istituto magistrale, affidato nel primo all'insegnante di filosofia e storia, nel secondo a quello di storia.

I nuovi programmi ministeriali fecero sorgere lì per lì parecchie pubblicazioni, di cui alcune, specialmente i manuali per gli alunni, benchè redatti da professori di non dubbia cultura storica e di notevole esperienza scolastica, risentivano sia della fretta della composizione, sia del fatto che i compilatori, nell'impossibilità forse di bere alle fonti dirette, quali le stesse opere degli scienziati o vastissimi trattati di storia e di critica, avevano attinto affannosamente in trattati un po' più vasti di quelli da loro compilati, così che a qualcuno di essi ben si poteva, e con maggior ragione, applicare il noto epigramma del Foscolo al Monti " Traduttor dei traduttor d'Omero ".

Ma " traduttori " ben più imbarazzati e quindi forse più infelici furon gl'insegnanti, i quali furono obbligati a navigar in acque, se non sconosciute, per lo meno non mai prima affrontate nel loro ministero didattico.

I programmi del 1925, che entrarono però in vigore solo alla fine del 1925 stesso, limitarono l'insegnamento della storia delle scienze al liceo scientifico: sempre affidandolo al docente di filosofia e storia: il programma, in confronto al precedente, non subì altro che l'aggiunta di un nome: quello di Giovanni Gentile. Nelle altre scuole, la storia delle scienze, già abolita, entra — secondo il mio avviso — di nuovo ora, di straforo, grazie a una recente circolare ministeriale, la quale prescrive che le aule di fisica e di scienze naturali sian corredati da ritratti di illustri matematici e scienziati: infatti, benchè non ne sia fatto obbligo all'insegnante, sarebbe assurdo esporre una galleria di ritratti senza illustrare i personaggi che essi rappresentano, inquadrarli nel

Digitized by Google

tempo in cui vissero, e far ben rilevare la spinta ch' essi diedero al progresso della scienza.

Che l' insegnamento della storia della scienza sia, nel liceo scientifico, affidato al docente di filosofia è cosa, in teoria — secondo il mio parere — esatta.

Dalle scuole filosofiche antiche, che ricercavano la ragione dell' essere, le ragioni dei fenomeni che l' uomo poteva allora constatare, nacque la scienza antica, che ancor oggi ci fa ammirati, sia con la luce che sparse sul mondo quando intuì o afferrò la verità, sia con l' ingegnosità, la profondità, l' arditezza delle sue costruzioni, anche se indagini posteriori dimostrarono tali ipotesi o tali costruzioni essere errate. Filosofi furono i grandi che rinnovarono il pensiero umano togliendolo dal dominio aristotelico; filosofi son quelli che, nei tempi moderni, ricercano affannosamente e creano teorie che tentino di spiegare, nel loro intimo essere, le conquiste che ogni giorno vanno a ingigantire la compagine dell' umano sapere.

E poichè, nel cammino luminoso verso la verità, più delle persone e dei singoli fatti, importan le teorie che tali fatti interpretano, discutono e preparano, e, siccome se le teorie appaiono e scompaiono, sono però, come ben disse il Poincaré, da paragonarsi alle onde del mare, che appaiono e scompaiono, ma lascian sempre delle tracce, è giusto, nello spirito della cosa, che l' esposizione di esse sia affidata a persona che le consideri analiticamente e comparativamente nei vari rami del sapere scientifico e le illumini alla luce della critica in modo che il discente si renda conto dello sforzo della regione che, nello scienziato, tentò d' interpretare i fatti.

Ma resta a domandarsi se gli insegnanti provenienti dall' insegnamento della filosofia nel liceo classico, o — il che è peggio — dall' insegnamento della storia, abbiano un' adeguata preparazione o non debbano, ad esempio, per quel che riguarda la fisica moderna, la sua evoluzione, le teorie che essa affaccia, il valore delle ipotesi, la critica dei principi, affannarsi in uno studio reso ancor più gravoso dal mancato sussidio delle cognizioni matematiche indispensabili. È vero

Digitized by Google

che il titolo del programma generale è " il problema della scienza nella sua storia „ quindi intende se non erro, che l'insegnante più che dei mezzi per la ricerca, parli dello spirito che la ricerca dettò; ma per esporre in modo utile qualsiasi questione, occorre conoscerla bene. Per conto mio dunque non toglierei al docente di filosofia l'insegnamento della storia della scienza, ma preparerei l'insegnante stesso convenientemente. Questo si potrebbe ottenere con un corso completo, obbligatorio, pei laureandi in filosofia, di lezioni all'Università, corso che, se non facesse percorrere allo studente in modo completo le lunghe vie tracciate attraverso il tempo, dai vari rami dell'umano sapere, gliele aprisse per lo meno davanti, o gli indicasse il modo di proseguire su di esse. Ma " l'obbligatorietà „ di tale corso è contrario allo spirito della Riforma Gentile, che vuole nelle università la libertà più assoluta. Debbono, secondo la Riforma, essere gli alunni nella loro libera scelta a sentire il bisogno di frequentare un Corso di storia delle Scienze; e debbono essere coloro che professano tale insegnamento che, con la loro valentia, sappiano attirare a sè gli studenti e renderli persuasi che tale cultura scientifica è indispensabile alla loro coltura filosofica, non dimenticando mai che si tratta di un problema, non di scienza pura, ma di filosofia, che abbraccia cioè l'unità dello spirito. È da augurarsi quindi che tale corso venga istituito e affidato a docente che sappia farne sentire ai giovani l'alto valore e la grande utilità, così che traggano in folla, convinti, alle lezioni stesse, traendone vantaggio indelebile. Si può obbiettare che lo svolgimento dei progressi della scienza sarebbe reso con maggiore competenza, se ne fosse affidato il compito ad ogni singolo insegnante di disciplina scientifica: e ciò è indubitabile, se si considera ogni scienza a sè.

Però, siccome tutte le scienze formano un insieme organico, in cui nessuna è indipendente dalle altre, il suddividere l'insegnamento della loro storia può togliere, nella mente dello scolaro, una parte dell'impressione dei vari, molteplici e indissolubili legami che hanno fra di loro i rami del sapere: e ciò mi par contrario anche all'intimo del programma

Digitized by Google

ministeriale, il quale chiede, in sostanza una storia complessiva del progresso e del pensiero umano. Quindi a tale suddivisione ricorrerei soltanto in via transitoria, cioè fino a quando le facoltà filosofiche delle Università, con l' introduzione degli opportuni corsi cui ho accennato, dessero insegnanti convenientemente preparati.

L' insegnamento della storia della scienza, ben compreso e ben impartito, può contribuire grandemente a far riconoscere " il significato della scienza e il suo valore formativo.... e può educare i giovani a comprenderne l' importanza per la coltura contemporanea „ non solo, ma in un istituto che avvia alle facoltà scientifiche dell' Università, può chi lo sa " destare energie creatrici di opere memorande! „.

* * *

Venendo alla seconda parte di questo mio ragionamento, comincio con l' affermare che l' insegnamento della storia dovrebbe far parte del programma di ogni scuola media: non solo, ma parrebbe a me cosa logica, che ogni Università, oltre al corso complessivo testè considerato istituisse presso ogni facoltà scientifica un corso obbligatorio di storia di quella scienza nella quale la facoltà stessa addottora: questa mia opinione è confortata dalla sentenza antica " Nessuna parte della scienza si può accuratamente e completamente conoscere senza indagarne la storia „.

Naturalmente, la triplice finalità formativa, educativa, patriottica dell' insegnamento della storia della scienza non potrà essere tutta ricercata in ogni ordine di scuole: ma in ogni tipo di scuola si potranno raggiungere le ultime due.

Se è vero che la scienza non ha patria perchè le sue conquiste son dominio e diritto di tutto il genere umano, è anche vero che maggior affetto ci lega agli scienziati che sono usciti dalla nostra terra: se la scienza moderna ha carattere d' internazionalità, favorito dalle facili e regolari comunicazioni che sostituiscono alle indagini solitarie dei nostri antecessori, opere collettive indirizzate a un fine comune dagli scienziati di tutto il mondo, è anche vero, ad esempio, che ancora un secolo prima di Dante, Leonardo Fibonacci

Digitized by Google

dava all'Europa i rudimenti dell'algebra, ed è vero in generale, che, pure nei tempi politicamente più tristi, l'Italia ha saputo conquistare e mantenere il primato nel campo scientifico: così chè, dice Gino Loria " nelle terre dove volarono le Aquile e ruggì il Leone, ove furon spiegati al vento i vessilli gloriosi di S. Giorgio e di S. Marco, il nome d'Italia suonò e echeggia tuttora, non soltanto come araldo di vittoria, ma come sinonimo di genio inesauribile „.

Il non far sentir questo in ogni ordine di scuole, è mancare a un dovere verso la grande madre, tanto più in questo tempo, nel quale essa attinge forza ed esempio nei grandi ricordi del passato, per procedere sicura verso un glorioso avvenire. Più i nostri giovani sapranno quanto vale la Patria loro, più sarà forte in essi il desiderio di rendersene degni.

Questo fine patriottico può essere raggiunto anche nella modesta scuola complementare che ha l'ufficio di preparare " buoni cittadini e modesti artefici „.

Io mi domando perchè sia fatto obbligo a tali " buoni cittadini e modesti artefici „ di conoscere il nome di Virgilio e di Omero e non quello di Archimede; perchè non debban conoscere qualcosa della vita e delle opere di Galileo, di Leonardo, ecc.

Non sarebbe il caso di andar più in là di cenni biografici, di grandi scienziati italiani, dati, questi cenni però dal professore di materie scientifiche, il quale, sia pure in modo intelligibile a menti acerbe, saprà illustrare l'opera dello scienziato, in relazione al tempo in cui egli visse e all'efficacia da essa esercitata sui posteri. Così verrebbe anche raggiunto il fine educativo, poichè anche un fanciullo, se si sa farglielo vedere, può raccogliere il monito che esce dalla vita di ogni grande.

Molto si può fare all'Istituto Magistrale o all'Istituto Tecnico dove l'insegnamento della storia delle scienze dovrebbe far parte del programma del corso superiore. Naturalmente, qui la suddivisione del lavoro diventa indispensabile fra i vari insegnanti: il professor di chimica o di chimica e scienze naturali dovrebbe tracciare una breve storia della

Digitized by Google

chimica, che metta in luce anche quanto da questa scienza che, dalla generalità delle persone è circoscritta in ricerche di laboratorio, sian derivate scoperte che beneficarono il mondo, com'è quella del gas illuminante; come essa sia sussidio alle applicazioni della fisica e come essa pure abbia potuto perfezionarsi valendosi dell'ausilio della matematica. Al professore di matematica e fisica non sarà difficile tracciare, per ogni ramo della fisica, la storia del suo svolgimento: il fatto che parecchi nomi ricorrono nell'uno e nell'altro campo serve ancora a ribadire l'idea dei legami che uniscono i diversi rami del sapere. In queste scuole l'insegnamento può raggiungere il suo valore formativo; si posson benissimo metter in luce le successive conquiste dell'esperienza e del pensiero che condussero a una determinata scoperta o a una invenzione, come si può pure dar un cenno delle moderne teorie o per lo meno, tentare di darlo. Meno facile può essere il tracciare una storia delle matematiche pure, poichè questa è essenzialmente storia di conquiste astratte, e non ha, per gli scolari, quella parte, direi tangibile, che ha la storia della fisica nel riferire le invenzioni.

Quindi mi parrebbe opportuno regolarsi così: limitarci a mostrare come si sia formato il modesto edificio delle nozioni che il programma prescrive di apprendere; dovendo parlare, ad esempio, del numero π far un po' di storia del suo calcolo e far rilevare come dai tentativi stessi per calcolarlo sia venuta l'indagine sulla natura del numero; dovendo parlar dei logaritmi, far brevemente la storia della loro invenzione, di ciò che in precedenza ad essa era possibile, del come si assestò il calcolo in seguito, e così via per altri argomenti.

Per scuole come l'Istituto Tecnico e il Magistrale ciò mi par sufficiente; ma dovrebbe esser fatto specialmente nell'Istituto Magistrale, da cui uscirebbero maestri con menti più robuste e più educate.

Quanto al Liceo classico, l'insegnare la storia dell'arte e non quella della scienza è come insegnare la storia della figlia senza quella della madre: la scienza è in sè armonia e equilibrio, e non c'è arte senza armonia ed equilibrio. Mi par che nel liceo classico potrebbe trovar posto un programma simile

Digitized by Google

a quello per il Liceo scientifico, s' intende in proporzioni ridotte, data la mole del lavoro della, scuola stessa e sempre affidate al docente di filosofia.

* * *

Gli insegnanti della scuola complementare, dell' Istituto Tecnico, dell' Istituto Magistrale non hanno certo, allo stato attuale delle cose, tempo di aggiungere materia al loro corso, e non è il caso di chiedere, dato l' orario gravissimo che già li affligge, un aumento settimanale di ore di lezione; ma è il caso di sperare che, qualora l'Autorità superiore si decidesse a prendere in considerazione il sovraccarico di lavoro loro chiesto e a rimaneggiar programmi e orari, tenesse conto di quanto sarebbe utile far conoscere ai giovani, gli abitanti di un tempio che sta degnamente a fianco di quello della Patria, della Religione dell' Arte.

* * *

Un' ultima considerazione, molto soggettiva, mi si permetta di aggiungere. Anche agli insegnanti attuali della singola disciplina scientifica, può riuscir fatica il prepararne un corso di storia: oppressi come sono dal lavoro di scuola. costretti talvolta, dalla necessità dei tempi, a cercar altre occupazioni fuori della scuola, possono mancare del tempo di attingere a larghissime fonti, mentre ripugna all'abitudine della loro mente valersi di manuali o di opere affrettate. Per questo son da benedirsi quegli storici della scienza che in volumi profondi, ma comprensivi, ne hanno riassunto lo svolgimento, ed è grandemente utile, ad esempio, quella collana di pubblicazioni " per la storia e la filosofia delle matematiche „ (a cui presiede l' Enriques e di cui sono usciti cinque o sei volumi) dove una data opera, o un dato scienziato son visti nella propria luce e a quella della critica contemporanea e moderna.

E' il caso di augurare che opere del genere aumentino per diffusione e per numero, come aiuto a chi, sia pure in una cerchia modesta, procura nel miglior modo possibile di dar la propria opera alla scuola.

Digitized by Google

PICCOLE NOTE

Sulla estrazione di radice approssimata [1]

È comune nei giovani studenti la credenza che per estrarre la radice mn^a a meno di $1/p$ di un dato numero basti estrarre la radice m^a di quel numero a meno ai $1/p$ e poi la radice n^a a meno di $1/p$ della radice trovata (intendendosi per radice n^a di un dato numero reale assoluto a meno di $1/p$ la massima frazione di denominatore p la cui potenza n^a non supera il numero dato).

Mi propongo di indicare un modo che permetta di formare degli esempi nei quali il fatto ora accennato ha luogo e altri nei quali non ha luogo.

Sia $\frac{y}{p}$ la radice m^a di un dato numero a a meno di $\frac{1}{p}$ e $\frac{z}{p}$ la radice n^a a meno di $\frac{1}{p}$ di $\frac{y}{p}$, cosicchè hanno luogo le limitazioni

$$\left(\frac{y}{p}\right)^m \leq a < \left(\frac{y+1}{p}\right)^m \qquad (1)$$

$$\left(\frac{z}{p}\right)^n \leq \frac{y}{p} < \left(\frac{z+1}{p}\right)^n \qquad (2)$$

elevando la (2) alla potenza m^a e tenendo presente la (1), si deduce

$$\left(\frac{z}{p}\right)^{mn} \leq \left(\frac{y}{p}\right)^m \begin{cases} \leq a < \left(\frac{y+1}{p}\right)^m \\ < \left(\frac{z+1}{p}\right)^{mn} \end{cases}$$

Ora affinchè abbia luogo il fatto indicato sopra, occorre che a sia minore

---

[1] (*N. d. D.*) Nel pubblicare questa Nota favoritaci dal nostro chiaro collaboratore, prof. Francesco Palatini, vogliamo rinnovargli le nostre più vive condoglianze pel gravissimo lutto che lo colpì il 1° di maggio, con la perdita della sua adorata figlia Olga, di anni 22.

Digitized by Google

di ciascuno dei due numeri $\left(\frac{y+1}{p}\right)^m$, $\left(\frac{z+1}{p}\right)^{mn}$, bisogna cioè che sia

$$\text{o } \left(\frac{z}{p}\right)^{mn} \leq \left(\frac{y}{p}\right)^m \leq a < \left(\frac{y+1}{p}\right)^n \leq \left(\frac{z+1}{p}\right)^{mn} \tag{3}$$

$$\text{o } \left(\frac{z}{p}\right)^{mn} \leq \left(\frac{y}{p}\right)^m \leq a < \left(\frac{z+1}{p}\right)^{mn} \leq \left(\frac{y+1}{p}\right)^m \tag{4}$$

I. Dalla (3) si ricava

$$\frac{z^n}{p^{n-1}} \leq y < y+1 \leq \frac{(z+1)^n}{p^{n-1}} \tag{5}$$

Per soddisfare a questa relazione si prendano due interi z, p in modo che fra $\frac{z^n}{p^{n-1}}$ e $\frac{(z+1)^n}{p^{n-1}}$ siano compresi almeno due interi, il che avverrà certo se si prende $z > p$, chè allora si ha

$$\frac{(z+1)^n}{p^{n-1}} - \frac{z^n}{p^{n-1}} = \frac{1}{p^{n-1}}\left[(z+1)^{n-1} + \ldots + z^{n-1}\right] > n\left(\frac{z}{p}\right)^{n-1} > n$$

Presi allora due interi consecutivi y, $y+1$ compresi tra $\frac{z^n}{p^{n-1}}$ e $\frac{(z+1)^n}{p^{n-1}}$, basta prendere a compreso tra $\left(\frac{y}{p}\right)^m$ e $\left(\frac{y+1}{p}\right)^m$ per soddisfare alla (3).

Si voglia p. e. un numero tale che la sua radice quarta a meno di $\frac{1}{5}$ sia eguale alla radice quadrata a meno di $\frac{1}{5}$ della sua radice quadrata a meno di $\frac{1}{5}$. È $p = 5$, $m = n = 2$. Si prenda $z = 7$. Allora si ha $\frac{z^n}{p^{n-1}} = \frac{49}{5}$, $\frac{(z+1)^n}{p^{n-1}} = \frac{64}{5}$. Fra questi due numeri sono compresi gl' interi 10, 11, 12. Si prendano p. e. 11 e 12. Allora $\left(\frac{y}{p}\right)^m = \frac{121}{25}$, $\left(\frac{y+1}{p}\right)^m = \frac{144}{25}$; un numero compreso tra questiè 5, 2 Posto $a = 5, 2$, la sua radice quadrata a meno di $\frac{1}{5}$ è $\frac{11}{5}$ e laradice quadrata di questo a meno di $\frac{1}{5}$ è $\frac{7}{5}$ che è anche la radice quarta di 5, 2 a meno di $\frac{1}{5}$, essendo

$$\left(\frac{7}{5}\right)^4 < 5,\ 2 < \left(\frac{8}{5}\right)^4.$$

Digitized by Google

II. Dalla (4) si ricava

$$\frac{z^n}{p^{n-1}} \leq y < \frac{(z+1)^n}{p^{n-1}} \leq y+1 \qquad (6)$$

Per questo basta prendere p e z come in I e poi il massimo intero y compreso tra $\frac{z^n}{p^{n-1}}$ e $\frac{(z+1)^n}{p^{n-1}}$ e il suo successivo $y+1$ e prendere a compreso tra $\left(\frac{y}{p}\right)^m$ e $\left(\frac{z+1}{p}\right)^{mn}$. Così nell'esempio precedente si prenderà $y = 12$ e $y+1 = 13$. Allora è $\left(\frac{y}{p}\right)^m = \frac{144}{25}$, $\left(\frac{z+1}{p}\right)^{mn} = \frac{4096}{625}$; fra questi due numeri è compreso 6, 3. La radice quadrata di 6, 3 a meno di $\frac{1}{5}$ e $\frac{12}{5}$ e la radice quadrata di questo a meno di $\frac{1}{5}$ è $\frac{7}{5}$ che è anche la radice quarta di 6, 3 a meno di $\frac{1}{5}$.

Affinchè poi avvenga che la radice n^a a meno di $\frac{1}{p}$ della radice m^a a meno di $\frac{1}{p}$ di a non sia la radice mn^a di a a meno di $\frac{1}{p}$, deve essere

$$\left(\frac{z}{p}\right)^{mn} \leq \left(\frac{y}{p}\right)^m < \left(\frac{z+1}{p}\right)^{mn} \leq a < \left(\frac{y+1}{p}\right)^m$$

dalla quale si deduce ancora la (6). Perciò si prenderà p, z, y, $y+1$ come in II e poi si sceglierà a compreso tra $\left(\frac{z+1}{p}\right)^{mn}$ e $\left(\frac{y+1}{p}\right)^m$. Così nell'esempio recato in II si ha $\left(\frac{z+1}{p}\right)^{mn} = \frac{4096}{625}$, $\left(\frac{y+1}{p}\right)^m = \frac{169}{25}$ e un numero a compreso tra questi due è 6, 6. La radice quadrata di 6, 6 a meno di $\frac{1}{5}$ è $\frac{12}{5}$ e la radice quadrata di questo a meno di $\frac{1}{5}$ è $\frac{7}{5}$ che non è la radice quarta di 6, 6 a meno di $\frac{1}{5}$, non essendo

$$\left(\frac{7}{5}\right)^4 < 6,6 < \left(\frac{8}{5}\right)^4.$$

Francesco Palatini (Torino)

Digitized by Google

CORRISPONDENZA

Al nuovo Ministro della Pubblica Istruzione

(Copia della lettera inviata a S. E. il Ministro Belluzzo il 23 luglio 1928).

Eccellenza,

Il Bollettino di Matematica fermò già la propria attenzione sulle saggie considerazioni che l'E. V. svolse in un articolo « Scienza e tecnica » apparso, più d'un anno fa, sulla Rassegna Italiana di T. Sillani. Da queste considerazioni il Bollettino trasse il convincimento e la fiducia salda, di avere, nell'E. V., un validissimo cooperatore per una revisione delle condizioni fatte, dalla Riforma Scolastica del 1923, all'insegnamento della matematica e della fisica nelle Scuole medie, e ai docenti di tali discipline.

Questo convincimento e questa fiducia il Bollettino riconferma adesso all'E. V. in occasione del Suo passaggio al dicastero della P. I., passaggio che pone l'E. V. nelle condizioni più propizie per esaminare benevolmente la questione e per risolverla, in modo da favorire il maggiore e miglior sviluppo degli studi scientifici, a cui si collega così intimamente il progresso della nostra Patria.

La stampa quotidiana è stata unanime nell'affermare che il Duce, chiamando l'E. V. a dirigere il Ministero della P. I. ha voluto che anche questo Ministero fosse affidato *a un temperamento essenzialmente pratico e realistico.*

Il Bollettino di Matematica associandosi al giudizio della stampa politica, confida in questo temperamento dell'E. V. per l'esaudimento dei voti che da cinque anni propugna.

Pertanto, con profondo e devoto ossequio, mi dico

Dell'E. V. dev.mo
ALBERTO CONTI
Direttore - responsabile del Bollettino di Matematica

***

Dopo l'articolo della Sig.na CHIAPPELLO " *Sulle varie dimostrazioni del principio di identità dei polinomi* ".

Ci scrive il prof. ALBERTO LA BARBERA una lettera in data 27 giugno; la riassumiamo, sia per ragione di spazio, sia per la forma polemica che non ci piace di incoraggiare.

Il prof. La Barbera desidera che sia detto che è completamente

Digitized by Google

errato qnello che la Sig.na Chiappello ha asserito riguardo ad una modificazione che il Tortorici avrebbe apportato alla dimostrazione data dal La Barbera medesimo pel principio di identità dei polinomi.

Il prof. La Barbera afferma che nelle Lezioni litografate di Analisi matematica del Tortorici (Anno 1926-27) non si fa altro che ripetere, parola per parola, quanto scrisse il La Barbera medesimo nell'Annuario del Liceo Garibaldi di Palermo dell'anno 1926.

Il prof. La Barbera aggiunge che lo stesso prof. Tortorici nelle sue ricordate Lezioni dichiara, in modo esplicito, che la dimostrazione che Egli riporta del suddetto Principio di identità è del tutto del La Barbera.

LA DIREZIONE

Congresso internazionale matematico

Il Congresso sarà inaugurato a Bologna il 3 settembre.

Il Bollettino di Matematica sarà rappresentato al Congresso dai suoi Direttori: esso porge, pertanto, fin d'ora, il più deferente e il più cordiale saluto a tutti coloro che vi parteciperanno, ed esprime l'augurio che il Congresso sia fecondo di resultati utili alla Scienza e alla Scuola.

Sappiamo che saranno presentate alla Sezione 6ª (Questioni didattiche) delle proposte di particolare interesse per gli insegnanti di matematica delle scuole medie, d'Italia e dell'Estero.

SPIGOLATURE

Di una legge del Malthus e delle sue conseguenze [1]

Dall'Opuscolo: **Pedanterie** di VALENTINO MARTELLI (Cagliari - Tip. S. Giuseppe 1928).

A pag. 49 e sag.

MALTHUS ESALTATO — Una legge fortunata è quella del Malthus che conta già la bellezza di centotrenta anni ed ha di vanto, fra gli altri, d'avere ispirato al Darwin l'idea della scelta naturale. Vediamo come si enuncia: tolgo, per non peccare d'imprecisione, dall'*Economia politica* del GIDE (Traduz. di BROGLIO D'AJANO):

---

[1] (*N. d. D.*) L'anno passato sentii, per un centinaio di volte almeno, recitare dai candidati all'esame di maturità la legge di Malthus, anzi le leggi di Malthus come diceva il Presidente della Commissione nell'interrogare i candidati durante la prova di economia politica. Quest'anno, nella sede di Modena, il Presidente prof. Saitta ha avuto il buon senso di non chiedere mai queste Leggi.... ed intanto mi è capitato, tra mano, un interessante opuscoletto del prof. V. Martelli (di Cagliari) dal quale mi è piaciuto estrarre due paginette, ove appunto si parla di queste pretese leggi e delle conseguenze amene che se ne possono trarre; donde viene un ammonimento salutare, per chi vuol metter la matematica in tutte le salse!

Digitized by Google

« In una formola che ha raggiunto una prodigiosa celebrità, il « Malthus aveva affermato che *ogni popolazione tendeva ad accrescere « secondo una progressione geometrica mentre che i mezzi di sussistenza « non potevano crescere che seguendo una progressione aritmetica.* Egli « esprimeva l'aumento della popolazione con una progressione geome- « trica avente per ragione 2, come dicono i matematici, cioè in cui le « cifre si raddoppiano — *questo i matematici non lo dicono* — e l'au- « mento della sussistenza con la progressione aritmetica la più semplice, « quella che ha per ragione 1 e che non è altro che la serie dei numeri « interi. Ed egli scriveva così queste due linee di cifre

« Progressione della popolazione

« 1 2 4 8 16 32 64 128 256

« Progressione della produzione

« 1 2 3 4 5 6 7 8 9

« Malthus valutava in 25 anni il periodo di tempo che doveva passare « fra due termini consecutivi della sua progressione.

« Ne resultava quindi che dopo due secoli la popolazione, se il suo « sviluppo era lasciato libero sarebbe nel rapporto coi mezzi di sussistenza « come 256 a 9, dopo tre secoli come 4096 a 13 e dopo qualche migliaio « d'anni la differenza passerebbe ogni cifra immaginabile ».

I cultori delle *scienze affini* amano di ammantare di espressioni matematiche le loro elucubrazioni ma la poca famigliarità coi numeri, che rappresentano idee — non colle cifre com'essi dicono, che son semplici segni — li porta spesso alla confusione o all'errore. Domando, per esempio, che cosa significa quell'*uno* che è il primo termine delle due progressioni. Si risponderà: quello della prima è la popolazione in un dato momento e l'altro della seconda è la produzione totale corrispondente. Ed allora risulta che dopo 25 anni la produzione si è raddoppiata come la popolazione. Perchè poi non avverrebbe altrettanto dopo altri 25 anni?

Si dirà che questa è un'obbiezione puramente formale.

Veniamo al sodo; oltre un secolo d'esperienza ha veramente stabilita la necessità di limitare con misure preventive questo aumento terrificante della popolazione per non venire troppo presto ad un tesseramento esagerato?

Bisogna convenire che *praticamente* questa legge non ha avuto una grande fortuna. Diverse nazioni, come la Francia, se ne sono infischiate allegramente e doppiamente, cioè non solo non hanno aumentato — neppure nella progressione aritmetica più modesta — la popolazione, ma hanno aumentato assai più che aritmeticamente, i mezzi di sussistenza.

Vorrei poi timidamente osservare che essa urta tanto contro l'esperienza posteriore quanto contro quella anteriore: vorrei dire « urta contro il senso comune ».

Perchè non v'è bisogno d'essere nè economisti illustri, nè biologi sommi per sapere che i mezzi di sussistenza della popolazione sono gli altri organismi, astraendo da quel po' di sale che non entra sempre in circolazione, e per accorgersi che tutti gli animali di cui si nutre l'uomo, il bove, il porco, la pecora, la gallina e la selvaggina varia, hanno una prolificità di gran lunga maggiore di quella della specie umana. Prendo il caso dell'animale meno prolifico: il bue. Due coniugi bovini possono, quattro anni dopo il loro matrimonio, assistere al lieto evento della nascita dei loro nipoti, mentre dovranno attendere circa vent'anni due coniugi umani. Che dire poi se ai bovini si sostituiscono i suini o gli

Digitized by Google

ovini? Mi sembra superfluo accennare alla enorme prolificità delle piante. Ammesso che un chicco di grano ne dia dopo otto mesi 30, ne avremo il secondo anno 900, il terzo 27000, il quarto 810000...

È quindi da concludere che se le faccende si svolgono regolarmente cioè se non vi sono cause speciali di distruzione di alcuni mezzi di sussistenza — e possono esservi anche per la popolazione — il minore incremento tra questi esseri sarà quello dell'umanità.

Ci sarà solo da preoccuparsi dello spazio diaponibile se si pensa che l'Europa potrebbe ancora quadruplicare la sua popolazione, l'Asia decuplicarla, l'America e l'Africa quarantuplicarla, l'Oceania contuplicarla, si potrà concedere qualche secolo d'aspettativa agli economisti per lo studio dei rimedi eventuali.

Curiose queste ferree leggi economiche!

I semplicisti d'un tempo guarivano tutte le malattie con qualche erbetta innocua: il buon Dio provvedeva al resto. I semplicisti d'oggi salvano la società da tutti i pericoli coi loro specifici avvalorati da un nome esotico. *Vulgus vult decipi!* E tanto meglio s'inganna quanto più è istruito.

Ancora un'osservazione. È strano che i cultori delle scienze sociali così ricchi di logica, non abbiamo intravisto nella legge del Malthus la possibilità di risolvere il problema della data di nascita della prima coppia umana. Infatti la progressione geometrica sopra riportata ha in realtà come primo termine 2 (Adamo ed Eva) e come ultimo termine la popolazione odierna della terra che valuteremo, mettiamo, abbondando, in 2 miliardi la ragione è 2.

I matematici, direbbe il Gide, sanno allora trovare il numero dei termini della progressione, che è 31; ed essendo l'intervallo di tempo necessario perchè la popolazione si raddoppi eguale a 25 anni, secondo il Malthus, ne segue che Adamo ed Eva sarebbero nati circa 800 anni or sono, ossia sarebbero stati contemporanei di Federico Barbarossa.

Forse il lettore non accorderà troppa fede a questa conseguenza, ma altrettanto credito merita la conseguenza tratta dal Malthus che fra tre secoli i mezzi di sussistenza, in confronto alla popolazione, saranno un trecentesimo di quelli odierni.

***

La scienza alla Minerva

(*Dal Comunicato ufficiale sul Consiglio dei Ministri del 23 luglio*).

In principio di seduta, il Capo del Governo, dopo aver rivolto un saluto ai nuovi Ministri che per la prima volta partecipano ai lavori del Consiglio, ha fatto le seguenti dichiarazioni:

. . . . . .

. . . . . .

Sempre in tema di situazione interna, va ricordato il cambiamento dei titolari di tre Ministeri, verificatosi il 9 luglio. Si tratta di colleghi che avevano compiuto in un triennio un ciclo di feconda attività. L'on. Fedele resta un benemerito della scuola italiana in tutti i suoi gradi. **L'on. Belluzzo ha svolto un'attività altamente proficua all'Economia nazionale. È bene che, con lui, entri alla Minerva, la scienza, dopo la filosofia e la storia** . . . . . .

. . . . . .

Digitized by Google

Anno XXIV dalla fondazione - Fasc. IV - Annata VII Nuova Serie

La prova scritta nel recente concorso di materie scientifiche nelle scuole medie inferiori

Osservazioni di un vecchio esaminatore

di ROBERTO MARCOLONGO (Napoli)

In Francia l'" *Association des Professeurs de Mathématiques de l'enseignement secondaire public* " pubblica ogni trimestre, e da ben tredici anni, un interessantissimo *Bulletin* in cui si raccolgono i risultati delle proposte, delle discussioni sulle più vitali questioni riguardanti l'insegnamento; in cui figurano anche, assai parcamente, brevi note scientifiche sempre inerenti alle matematiche elementari; e infine, e sopratutto per ciò il *Bulletin* è specialmente importante ed istruttivo, esso pubblica gli svariatissimi temi di matematica pura ed applicata proposti nelle numerose sedi e pei diversi concorsi (1).

Questi temi proposti dalle varie commissioni; l'esame minuzioso degli elaborati sono oggetto di lunghe ed accurate relazioni da parte di un comitato centrale (abbiamo sott'occhio quella del concorso de l'*Agrégation des sciences mathématiques* pel 1928; Bull. n. 55) che è un documento ufficiale.

(1) Ecco la lista e nemmeno completa:

1. *Concours communs des bourses nationales dans les enseignements publics du 2e degre*; 2. *Idem d'enseignement secondaires (garçons et jeunes filles)*; 3. *Idem des lycées et collèges de garcons et de jeunes filles*; 4, *Concours générale des Lycées et Collèges*; 5. *Ecole spéciale militaire*; 6. *Ecoles nationales d'agricolture*; 7. *Ecole normale supérieure et Courses de Lycées*; 8. *Certificat d'aptitude*; 9. *Agrégation des Sciences mathématiques*; 10. *Baccalaureat*; ecc.

Digitized by Google

Di più la stessa associazione dà poi incarico a qualcuno dei suoi membri di far relazioni, osservazioni e critiche sui temi di matematica proposti nei vari concorsi.

Così nel citato numero del *Bulletin*, p. 123, è inserito uno studio critico " *sur les sujets de compositions de mathématiques aux différents examens et concours* „ pel 1927; e si rileva che a Caen fu proposto un tema in cui vi era un errore in un esponente; che molti candidati furono riprovati prima che fosse appurato l'errore; ma per l'intervento della Facoltà di Caen " *tout le monde eut finalement satisfaction* „; e non si manca infine di deplorare gli esaminatori che amano le lungaggini; ecc. ecc.

Ho voluto ricordar ciò (certamente sono cose ben note a tutti i miei colleghi delle scuole secondarie), per deplorare che niente di analogo si sia fatto da noi, dove da venti anni (salvo una breve interruzione) si fanno prove scritte per i concorsi a cattedre di scuole medie, ora anche esami di abilitazione o di stato; per non parlare degli esami di licenza della defunta sezione fisico-matem. degli Istituti tecnici; degli Istituti magistrali, licei scientifici, ecc. Non è agevole trovare una raccolta dei temi ministeriali proposti in circa un cinquantennio nelle nostre scuole medie; per quelli dei concorsi a cattedre di scuole medie ha sempre e lodevolmente provveduto questo *Bollettino* (1). Ma ciò non basta; un po' di critica ai temi o di discussione serena non sarebbe certo inopportuna; ma sopratutto la conoscenza un po' particolareggiata dello svolgimento fatto dai concorrenti, dei loro errori più comuni e delle mende da cui dovrebbero in avvenire correggersi; tutti questi ed altri particolari che non possono naturalmente risultare dalle sintetiche relazioni delle Commissioni; farebbero, s' io non m' inganno, un gran bene a

---

(1) Questo « *Bollettino* » anni VII fino a XII. Oltre i temi esso ha sempre anche pubblicato i quesiti proposti agli esami orali dei numerosi concorsi (*).

Gli ottimi « *Annali dell' Istruzione media* » hanno tutt'altre finalità.

(*) *(N. d. D) Il p. n. conterrà l'elenco di più di 30 temi proposti, dal 1907 al 1928. Per comodità dei nuovi Soci saranno ripubblicati pure i temi che già comparvero nelle precedenti annate, dalla VII alla XII.*

Digitized by Google

coloro che si presenteranno ai futuri concorsi e forse agli insegnanti stessi.

Approfitto della fedele e generosa ospitalità di questo benemerito *Bollettino* e faccio un primo e modesto tentativo in questo nuovo genere di critica; nella speranza che esso sia imitato e migliorato da chi ha più dottrina e più esperienza di me (ma non più amore e passione) per la nostra scuola. Sono, purtroppo, tra i più vecchi commissari di concorsi (fin dal 1907!); ho avuto l'onore di collaborare con maestri insigni, Pincherle, Torelli, Pittarelli, Berzolari, Bortolotti, coi compianti Capelli e Frattini; e i concorsi di cui sono state commissario non si contano più. Spero quindi non mi si taccerà di soverchia presunzione.

***

La prova scritta di matematica nei concorsi a cattedre di scuole medie fu saggiamente istituita dopo la riforma del 1906. Le commissioni giudicatrici dei primi concorsi (alla fine del 1907) furono molto perplesse nella scelta dell'argomento del tema d'esame. Qualche commissario propose senz'altro di seguire i metodi da lungo tempo applicati in Francia; ma la proposta parve troppo ardita, e prevalse invece l'idea dei temi didattici; salvo a saggiare poi la cultura del candidato nella prova orale, con facili questioni e applicazioni delle teorie apprese nei vari corsi del primo biennio universitario (1).

Le varie commissioni, che si succedettero per sette od otto anni, non mutarono sostanzialmente il sistema inaugurato nel 1907.

Esso presentò ben presto i suoi noti inconvenienti, aggravati dal fatto che le prove scritte si facevano in tutte le sedi dei Provveditorati agli studi e che quindi veniva a mancare la uniforme sorveglianza per tutti i concorrenti (in alcuni casi mancò completamente qualunque sorveglianza). I candi-

(1) Si può consultare un mio vecchio articolo: *I recenti concorsi generali di matematica nelle scuole secondarie* [Nuovi Doveri, anno II, p. 75-77 (1908)].

Digitized by Google

dati erano a priori sicuri di avere un ottimo spunto al probabile tema nei molti ed ottimi libri che noi (e lo diciamo con orgoglio) possediamo; senza ricorrere al sospetto (non sempre infondato del resto) di una volgare copiatura del libro, fedele e celato compagno del candidato evoluto e cosciente, è ben noto come vi sia una categoria di candidati assai destri negli spettacolosi esercizi mnemonici, i quali, anche senza frode, anzi in perfetta buona fede, ricordano troppo e scrivono... copiando!

Ed appunto per ciò da taluno si insisteva sulla proposta di far consistere l'esame nella risoluzione di una facile questione; p. e. sul genere dei problemi per gli esami di licenza della sezione fisico-matem. dell'Istituto tecnico. Non poteva infatti il giovane professore trovarsi proprio al caso di essere presente ad uno di questi esami e di dover risolvere e discutere il tema ministeriale? Tale prova doveva infine mostrare, per una volta tanto, quel che il candidato fosse capace di cavar dalla testa propria e, senza dover più o meno palesamente ricorrere a libri e senza un grave sforzo di memoria, ciò che aveva effettivamente digerito ed assimilato.

Una prima attuazione di queste nuove idee si ebbe nel concorso generale a cattedre negli Istituti nautici nel 1911; l'esito fu brillantissimo (1).

Poi venne la guerra e la soppressione delle prove scritte! Ma io sono stato sempre un fautore ostinato e convinto (Dio mi salvi dalle maledizioni dei concorrenti passati, presenti e futuri) della prova scritta, sostenendo del pari che essa fosse fatta sempre in Roma e non dovesse costituire una prova totalmente eliminatoria. Il candidato (abbia fatto bene o male la prova) è sempre bene vederlo, parlargli e sopratutto farlo parlare! (2).

---

(1) Il tema fu pubblicato dal « *Bollettino* », anno X, p. XII. Una delle migliori soluzioni (del prof. Guido Ascoli) fu pubblicata parimenti dal « *Bollettino* » anno XI, p. 104. E tra i concorrenti, lo ricordo con vivo compiacimento, erano i prof. Cecioni, Ascoli, Cherubino, Teofilato, Cattaneo; ecc.

(2) Diressi un lungo memoriale al compianto Comm. Fiorini, allora direttore generale dell'Istruzione media.

Digitized by Google

Siamo ora ritornati (e speriamo si continui) alle prove scritte; quasi tutte le Commissioni, dal 1923 in poi, si sono uniformate al principio, così largamente applicato in Francia, di proporre più o meno facili questioni (secondo la specie del concorso o speciale o generale); inconvenienti gravi non sono accaduti che raramente (una sola volta un caso come quello accaduto a Caen); e i risultati vanno migliorando sensibilmente.

I temi, specialmente quelli dei concorsi generali, dato anche il tempo breve concesso per lo svolgimento, non debbono essere nè difficili, nè lunghi. Il candidato non deve inventar nulla; non deve torturare il cervello per trovare l'artifizio riposto; deve saper applicare, senza grande sforzo mnemonico, metodi noti e mostrare di averne chiara e sicura conoscenza. Quindi il tema deve essere piano, risolubile con l'applicazione immediata di regole generali e che purtuttavia presenti qualche altra via di risoluzione rapida ed elegante da tentarsi dai meglio adatti e preparati, dai più intelligenti che vogliano mostrare il loro valore; e che infine, con una sola parola, abbia una parte facoltativa.

La preparazione di un tema siffatto non è facile; e di regola i temi di concorso non si improvvisano. Quando si è riusciti a combinarlo, è assolutamente indispensabile che il proponente lo risolva mettendosi, possibilmente, alla pari colla mentalità di un giovane laureando alle sue prime prove; che tenti e saggi tutte le vie di risoluzione che si possono presentare al candidato; le difficoltà inerenti a ciascuna di esse. La dicitura deve essere chiara ed offrire una guida o un tenue filo al candidato che, se è intelligente, deve saperla abilmente sfruttare.

Non bisogna infatti non tener conto dello stato d'animo dei candidati, specie dei novellini e di quelli che sostengono per la prima volta un pubblico esame scritto di matematica, delle minime circostanze che possono fin da principio farlo smarrire o possono far addirittura cadere dei giovani anche bravi.

Guai se il candidato comincia ad aver difficoltà d'inter-

Digitized by Google

pretazione; la perdita dei primi e più proficui momenti, compromette tutto l'esame!

Non ridano i miei due lettori (compreso l'egregio amico direttore); ho dato già (ma spero di aver finito) molti e molti temi di concorso e non esagero dicendo che la preparazione di ognuno di essi mi è costata varie settimane di lavoro.

Rispondono i temi dati in questi ultimi anni a queste caratteristiche, cui, mi auguro, aderiranno tutte le persone di buon senso? Quali critiche possono esser fatte, quali difetti essi presentano?

Io pongo la domanda, ma non vi rispondo e perchè son parte interessata, capacissimo di fare però un' autocritica, e perchè non sono così orgoglioso da erigermi a giudice di maestri. Se vi risponderà qualche candidato non fortunato, io sono un uomo bello e liquidato!

*
* *

Ed ora, dopo questo forse lungo ma indispensabile preambolo, veniamo finalmente a parlare di uno di questi ultimi temi, e delle considerazioni che il suo svolgimento ci ha condotti a fare.

Si tratta del recente concorso a 36 cattedre di materie scientifiche negli Istituti medi inferiori; il tema proposto dalla Commissione comprendeva (a scelta del candidato) due parti, una di matematica, l'altra di scienze naturali. La parte di matematica, che fu proposta da me, era questa:

" Le x ed y sono espresse mediante un parametro variabile t colle formule:

$$(1) \qquad x = a \cos t \quad ; \quad y = a \cos (t - \alpha),$$

" in cui a ed α sono costanti. Si richiede

1° di eliminare il parametro t tra le due equazioni (1);
" di interpretare geometricamente il risultato, considerando
" in particolare i casi di $\alpha = 0, \pi/2, \pi$;

" 2° di trovare i valori di t che rendono massima o
" minima la funzione

$$x^2 + y^2,$$

Digitized by Google

" o con considerazioni geometriche, o con un opportuno im-
" piego delle formule di duplicazione degli archi, oppure
" applicando i metodi generali.

" È in facoltà del candidato di trattare le stesse que-
" stioni quando nelle (1) si sostituisca il coseno iperbolico a
" quello circolare; poscia, assimilando la variabile t al tempo,
" di assegnare la grandezza e la direzione della accelerazione
" del punto le cui coordinate ortogonali sono espresse dalle (1) ".

E prima di tutto qualche osservazione generale.

La mia lunga pratica in questo genere di esercitazioni; i grossi peccati di coscienza per la compilazione di libri di testo e di esercizi, sono di gran lunga superati da quanto io ho appreso dai concorrenti. Avete un bel pensare a tutte le possibili cause di errore; alle vie più strane e più recondite per la soluzione del tema; agli errori più impensabili e singolari; voi sarete sempre immensamente al disotto del vero. Tengo nota, da più di mezzo secolo, di questi errori (i miei occupano naturalmente un largo posto d'onore) e mi accorgo che ho molto da imparare ancora.

La gran maggioranza dei candidati (*) ha scritto, sarebbe più esatto dire scrive, in modo caotico, disordinato e, non poche volte, senza il minimo riguardo alla grammatica e alla povera lingua italiana. Non si ha nemmeno la cortesia di numerare le pagine, le molte pagine scritte ed il povero commissario, che deve correggere, è costretto ad un lungo e penoso studio per seguire lo svolgimento del tema; e a volte si imbrattano sette e fino a dieci fogli senza poter distinguere quale sia, almeno nella intenzione del concorrente, la brutta o la bella copia.

Se gli elaborati fossero venti o trenta, la cosa potrebbe non avere importanza; ma quando sono centinaia, pensate voi quale tortura, quale enorme perdita di tempo (e qualche volta di pazienza) costituisca tale disordine pel commissario.

Si raccomanda quindi a tutti i candidati un maggior ordine e, per quanto è possibile in un argomento scientifico

(*) Ecco qualche dato statistico. Candidati presenti alla prova 296. Due candidati svilupparono i due temi; 20 la sola parte di sc. nat. Superarono la prova scritta 257 concorrenti; 214 donne e 43 uomini.

Digitized by Google

(e lo è certamente) un maggior rispetto della grammatica. Ho fatto ben poco nella mia vita; quel poco che ho fatto è dovuto all'ordine e alla regola con cui ho sempre lavorato.

I candidati poi sono in generale troppo schiavi delle formule, e credono che tutto debba ridursi ad un puro giuoco di memoria. Certi risultati, se si avesse un po' l'abitudine alla riflessione, alle semplici considerazioni geometriche (*l'esprit de finesse* diventa assai raro) si dedurrebbro a colpo d'occhio, senza il sussidio di formole; le quali, per difetto di memoria, sono applicate e trascritte erroneamente.

Quasi tutti poi non si curano quasi mai di corredare lo svolgimento del tema con qualche figura illustrativa, con un piccolo disegno, uno schizzo, magari uno sgorbio qualunque a penna o a matita. Il futuro professore deve pur sapere disegnare le figure a mano libera; e se fa alla lavagna disegni non chiari o semplicemente poco felici, si espone (usiamo un eufemismo) al compatimento degli allievi. Non bisogna poi credere che occorra essere artisti per fare un chiaro disegno.

Venendo ora specificatamente a dire dello svolgimento del tema, dirò che la prima parte, evidentemente la più facile, anzi di una incredibile facilità, non ha presentato difficoltà; tutti, più o meno felicemente, hanno eseguito la eliminazione.

Un gruppo esiguo non ha reso razionale l'equazione risultante (non era ciò esplicitamente detto nel tema; ma come si fa a pensare a tutto?); un altro gruppo è giunto correttamente alla

$$x^2 - 2xy\cos\alpha + y^2 = a^2\operatorname{sen}^2\alpha \qquad (2)$$

e si è limitato ad osservare che interpretando x ed y come coordinate ortogonali di un punto — qualcuno si è anche valso delle coordinate oblique, non del tutto convenienti — la (2) rappresenta una conica, senza avere la curiosità di conoscerne la specie.

Un terzo gruppo ha notato che la conica (salvo particolari valori di α) è una ellissi, di cui ha faticosamente assegnato, con la brava applicazione delle formule (affatto inutili), centro, assi, ecc.

Digitized by Google

Un quarto gruppo, e anche ben numeroso, ha fatta la discussione in modo completo semplice elegante; pochi hanno disegnata (e bene) la facilissima figura.

Bastava notare, sia detto di volo, per la determinazione degli assi, la simmetria della (2) rispetto x ed y e che conduce subito a trovar tutto.

Sorvolo sulla discussione dei casi particolari, generalmente fatta bene; non mancarono tuttavia anche qui ingenuità..... e grosse. Non pochi hanno perduto un tempo prezioso a discutere, con lodevole lusso di particolari, le parabole (!)

$$x^2 \pm 2xy + y^2 = 0$$

(caso di $\alpha = 0, \pi$).

La seconda parte, cioè la questione di massimo o minimo, è quella che ha presentato le maggiori difficoltà, incertezze, divagazioni, errori; eppure l'enunciato indicava subito ed in modo esplicito e paternamente le vie da seguire. Precisamente:

a) la via geometrica: il problema era infatti identico con quello della ricerca degli assi della ellissi (2); che sono poi le bisettrici degli angoli degli assi coordinati: di modo che si trovano subito i valori di t corrispondenti al massimo o al minimo a seconda dei valori di α, ossia della posizione dell'ellissi rispetto alle x, y.

b) la via analitica elementare, cioè l'opportuno impiego delle formule di duplicazione degli archi, e quel minimo di cognizioni trigonometriche che si richiedono in un esame di maturità. Bastava infatti osservare che dalle (1) si ricava subito:

$$x^2 + y^2 = a^2(1 + \cos\alpha \cdot \cos(2t - \alpha));$$

riducendo così la questione del massimo o del minimo del primo membro, a quella del massimo (minimo) o del minimo (massimo) di $\cos(2t - \alpha)$, secondo che $\cos\alpha$ è positivo o negativo.

c) la via analitica col metodo, assai più lungo, delle derivate.

Un buon numero di candidati (in prima linea quelli che sostennero la prova a Torino; poi quelli di Napoli) ha seguito

Digitized by Google

egregiamente una e anche tutte e tre le vie indicate, rapidamente, senza incertezze, giungendo in modo perfetto ai veri risultati e discutendoli maestrevolmente.

La gran maggioranza o ha seguito una via mista o la terza esclusivamente; e qui ecco gli errori più comuni, oltre alla evidente mancanza di pratica di trasformazioni trigonometriche. Errori di derivazione (la derivata di $\cos^2 t$ è $2\cos t$!); di deplorevole distrazione, sostituendo $1 + \cos^2 t$ con $\text{sen}^2 t$ o anche con $\frac{1}{2}\cos t$; lungaggini e complicazioni inaudite di calcoli; al punto che per derivare $\cos^2(t - \alpha)$ si sviluppa $\cos(t - \alpha)$, poi si eleva a quadrato e finalmente (se Dio vuole) si deriva; giungendo così a formule lunghe parecchi centimetri; errori di omissione, cioè anche quando bene o male si è giunti alla

$$\text{sen } 2t + \text{sen } 2(t - \alpha) = 0$$

non si è saputo risolvere questa semplice equazione trigonometria, o nel migliore dei casi non si sono assegnate tutte le soluzioni. Pochi hanno osservato che essendo essa equivalente alla $\text{sen } 2t = \text{sen } (2\alpha - 2t)$, doveva subito ricavarsi, a meno di multipli di π, $t = \frac{\alpha}{2}$ oppure $t = \frac{\alpha + \pi}{2}$.

E come è stata tormentata quella povera equazione trigonometrica! Molti, dopo aver giustamente ricavato

$$\text{tg } 2t = \text{tg } 2\alpha$$

(e molti altri meno destri si sono arrestati a

$$\text{tg } 2t = \text{sen } 2\alpha / (1 + \cos 2\alpha))$$

non hanno saputo ricavare che $t = \alpha$.

Molti altri infine hanno addirittura inventato maniere molto semplici ma sventuratamente errate, o applicati teoremi di nuovo conio; p. p. questo: che la somma dei quadrati di due numeri è massima, quando i numeri sono eguali fra loro! La parte facoltativa è stata affrontata da ben pochi e in modo ottimo, anche con rapida applicazione di metodi vettoriali e con ovvio riferimento al noto problema cinematico della composizione di due moti armonici ortogonali di stessa

Digitized by Google

ampiezza e periodo. Altri l'hanno appena sfiorata e calcolando l'accelerazione iu un moto curvo come la derivata seconda dello spazio rispetto al tempo!!!

In conclnsione e giudicando, secondo il mio solito sistema, con qualche indulgenza e benevolenza, la gran maggioranza ebbe la sufficienza; una cinquantina di lavori si poterono giudicare tra *discreti* e *buoni;* una ventina e più *ottimi* sotto ogni punto di vista.

*
* *

Mi si consentano due parole per le prove orali.

E stato un bene, forse, limitare in certo qual modo la libertà delle domande di cultura generale, inquadrandole nelle tesi formulate dal Ministero; tesi che, per la parte matematica del concorso di cui mi occupo, trovo ottime — salvo al più qualche lieve ritocco — ordinate in veste succinta e completa e che fanno fare anzi una gran cattiva figura a quelle di scienze naturali! Quando si sappiano bene applicare (sta sempre qui il segreto di un buon esaminatore) sono più che sufficienti a saggiare la cultura di un candidato, integrando la prova scritta.

Trovo poi ottima la disposizione che vieta, nello stesso interesse dei candidati, l'antipatica ed inopportuna estrazione a sorte delle tesi.

Dei candidati laureati in scienze naturali alcuni (che riuscirono anche vincitori) mostrarono una buona preparazione matematica; altri si sarebbero dovuti riprovare all'esame di ammissione al Liceo!

Gli altri, in generale, forse distratti da quel mastodontico programma di scienze naturali, non pare che abbiano dato un gran peso o la dovuta importanza ad una seria e coscienziosa preparazione di tutte le parti del minuscolo programma di matematica.

Troppo spesso hanno dimenticato: *a*) molte e fondamentali cose studiate nel primo biennio di Facoltà; *b*) titolo e argomento della loro tesi di laurea; *c*) i metodi sintetici della geom. elementare, i suoi più classici problemi.

Digitized by Google

Per la parte che mi riguardava e col caritatevole fine di agevolare il candidato, io ho sempre avuta l'abitudine di iniziare il colloquio informandomi dell'argomento della dissertazione di laurea. Quasi sempre il candidato non ricorda bene; è passato tanto tempo (tre o quattro anni)! E se poi infine ricorda, perchè la tesi è stampata e sta innanzi al crudele esaminatore, qualunque sia l'argomento, io ho avuto risposte (di cui tengo nota) incredibili, pazzesche. Ma gettiamo un pietoso velo su questo poco lieto argomento; tanto più che si può essere un eccellente insegnante di scuola media inferiore senza sapere che cosa sia un'equazione integrale o una curva iperellittica o un complesso di rette; ma.....

Poveri versi miei gettati al vento!

La cosa più grave è la lacuna, già accennata, cioè la ignoranza delle cose più belle e anche elementari della geometria e che possono proprio occorrere nella scuola; ignoranza che rivela purtroppo il fatto di non aver studiato bene nelle scuole medie e di non aver fatto debito e prolungato esercizio. E molti restavano impacciati innanzi a problemi elementarissimi: p. e. descrivere un cerchio passante per due punti e tangente ad una retta; ecc. Un buon candidato non deve coscienziosamente presentarsi ad un esame di concorso con lacune così gravi e vergognose.

Invece la gran maggioranza dei candidati (specialmente le donne) fece ottimamente la seconda parte della prova orale: la lezione, parte integrativa di non lieve importanza. Non poche lezioni, esposte con vero magistero, pianamente, senza emozione e con calore, rivelarono in candidati anche giovanissimi passione ed entusiasmo per la scuola: e questa mi pare sia la cosa più confortante!

Se i vincitori, per ferrea disposizione di legge, furono 86 (33 donne e 3 uomini), più del doppio meritavano di aver vittoria e cattedra. A tutti costoro il vecchio insegnante augura miglior fortuna e piena vittoria in una prossima futura battaglia, in cui faranno tesoro del passato e di queste paterne parole ammonitrici!

Digitized by Google

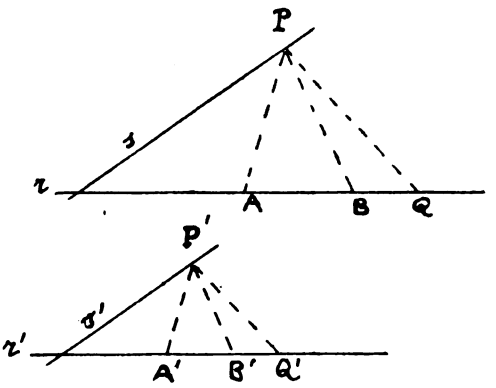
Alcune costruzioni elementari di similitudine

di GIACINTO GUARESCHI (Genova)

1. - Il Prof. Severi negli " *Elementi di geometria* „, che ha pubblicato di recente (1), definisce la *similitudine tra piani* come una corrispondenza biunivoca tra i punti di questi, *tale che ai punti di ogni segmento di ciascuno dei due piani corrispondano i punti di un segmento dell'altro, e ad ogni angolo di ciascuno, un angolo eguale dell'altro.* Dopo aver dimostrato che in una similitudine tra piani il rapporto di due segmenti corrispondenti è uguale a quello di altri due segmenti corrispondenti qualunque (per il che occorre far ricorso unicamente a triangoli simili) enuncia il seguente problema: " *Costruire una coppia qualunque di punti o di rette corrispondenti in una similitudine tra due piani* α, α', *supposto di conoscere due segmenti corrispondenti* AB, A'B' *e due semipiani corrispondenti, aventi per contorni le rette* AB, A'B'.

La costruzione, semplice ed elegante, indicata dall'autore è la seguente:

" Preso un punto P fuori della retta $r \equiv AB$ e supposto " che al semipiano " rP di α corrisponda " su α' il semipiano " al di sopra della " retta $r' \equiv A'B'$, si " tirino su questo ul- " timo " due semi- " rette, di origini A',



(1) F. Severi: *Elementi di Geometria*, vol. II, pei Licei e pel corso superiore dell'Istituto Tecnico, Vallecchi edit.; Firenze - n. 46 pag. 41-42.

Digitized by Google

" B', che formino rispettivamente colle semirette $A'B'$ e $B'A'$,
" angoli uguali a $P\widehat{A}B$, $P\widehat{B}A$. Le due semirette costruite
" s'incontreranno in un punto P' che sarà il corrispondente
" di P nella data similitudine.

" La costruzione vale qualunque sia la posizione di P,
" fuori di r. Se invece trattasi di un punto Q di r, si potrà
" determinare il quarto proporzionale dopo AB, AQ, $A'B'$, e
" riportare questo segmento su r', a partire da A', dalla parte
" di B' o dalla parte opposta, secondo che il segmento AQ
" è dalla parte di B o dall'opposta. L'altro estremo del
" segmento riportato è il punto Q' omologo di Q.

" Oppure, dopo costruito l'omologo P' del punto P esterno
" ad r, si tiri per P' la semiretta formante colla $P'A'$, dalla
" parte debita, un angolo uguale ad $A\widehat{P}Q$: allora Q' risulterà
" dall'intersezione di r' colla semiretta costruita.

" Per costruire la retta s' di α' corrispondente ad una
" retta qualunque s di α, si costruiranno i corrispondenti P',
" R' di due punti P, R di s: allora sarà $s' \equiv P'R'$; ovvero
" si terrà conto del fatto che gli angoli formati dalle r, s
" debbon essere eguali a quelli formati dalle r', s', cosicchè
" basterà conoscere un sol punto di s'; ecc. ecc. ".

Il Severi subordina questa costruzione, che in seguito chiamerò senz'altro " *costruzione di Severi* " al teorema: " *Esiste una ed una sola similitudine, fra due piani* α, α', *che faccia corrispondere due dati segmenti* AB, A'B', *rispettivamente tracciati su* α, α', *e due dati semipiani aventi per contorni le rette* AB, A'B' ". Di questo teorema fornisce due dimostrazioni, l'una basata sulle proprietà dell'omotetia piana l'altra invece su quelle dell'omotetia spaziale (1).

Il programma di matematica per gli esami di maturità classica pone la *similitudine nello spazio* tra quegli argomenti sui quali il candidato ha libertà di scelta nella sua preparazione. Poichè ho stabilito di trattare quest'anno nel mio in-

(1) Più precisamente: servendosi dell'omotetia spaziale dimostra che " Dati due semispazi Σ_0, Σ'_0; due semipiani α_0, α'_0, sui loro contorni; due segmenti AB, $A'B'$ sui contorni di questi, esiste una ed una sola similitudine, che faccia corrispondere a Σ_0, α_0, A, B rispettivamente Σ'_0, α'_0, A', B'. Loco citato, n. 290; pag. 246.

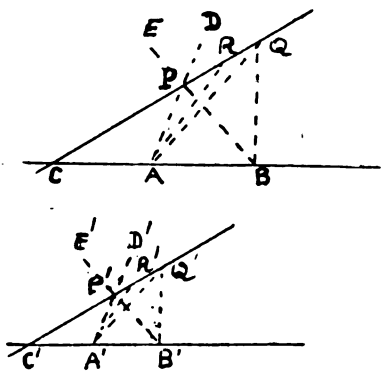
Digitized by Google

segnamento liceale, in misura limitatissima la similitudine nello spazio ed, in generale, di non parlare di omotetie (la cui trattazione sarebbe cosa naturale invece per chi svolgesse in modo completo questa parte del programma; come ho fatto io stesso in alcuni degli anni scorsi), ho fornito ai miei alunni la costruzione di Severi dapprima come costruzione atta a stabilire una corrispondenza biunivoca fra i punti di due piani, dimostrando di poi direttamente che questa corrispondenza è una similitudine.

Scopo di questa nota è l'esposizione di questo procedimento didattico, e di qualche estensione che si può trarne, a scopo di esercizio, relativamente alle similitudini spaziali.

2. - Propos. I. *La costruzione di Severi determina tra i punti dei piani α, α' una corrispondenza biunivoca che presenta i caratteri definitori della similitudine.*

Che la costruzione di Severi stabilisca una corrispondenza biunivoca tra i punti dei piani α, α' è senz'altro evidente; e, così pure, è evidente che ai punti di un segmento situato su una retta passante per A (o per B) corrispondono i punti di un segmento situato su una retta passante per A' (o per B'). Consideriamo, quindi, un segmento PQ di α, non avente gli estremi su r, situato su una retta t non passante nè per A nè per B. Indichiamo con PD, PE le semirette opposte rispettivamente alle semirette PA, PB, e con $P'D'$, $P'E'$ le semirette opposte rispettivamente alle semirette $P'A'$, $P'B'$; nella corrispondenza in questione i punti delle semirette $P'A'$, $P'B'$, $P'D'$, $P'E'$ corrispondono evidentemente ai punti delle semirette PA, PB, PD, PE.



È immediato che Q', corrispondente di Q, è interno all'angolo $B'\widehat{P'}D'$ o a $D'\widehat{P'}E'$ o a $E'\widehat{P'}A'$ o a $A'\widehat{P'}B'$, secondo che Q è interno all'angolo $B\widehat{P}D$ o a $D\widehat{P}E$ o a $E\widehat{P}A$ o a $A\widehat{P}B$.

Digitized by Google

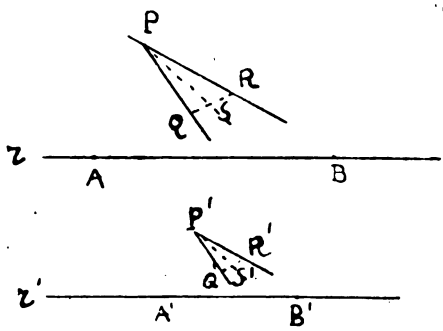
Per fissar le idee, supponiamo Q interno all'angolo $\widehat{BPD}$ e, quindi, Q' interno all'angolo $\widehat{B'P'D'}$. Si congiungano Q con A e B, e Q' con A' e B'; dalle coppie di triangoli simili APB, $A'P'B'$ ed AQP, $A'Q'P'$ si trae che $AQ:A'Q' = AB:A'B' = AP:A'P'$; da qui e dall'eguaglianza manifesta degli angoli $\widehat{PAQ}$, $\widehat{P'A'Q'}$ si trae ancora che sono simili i triangoli APQ, $A'P'Q'$ e, quindi, che si ha $\widehat{AQP} = \widehat{A'Q'P'}$. Dall'uguaglianza $\widehat{BAQ} + \widehat{AQP} = \widehat{B'A'Q'} + \widehat{A'Q'P'}$ risulta poi subito che la retta $P'Q'$ è parallela ad r' oppure incontra r' sulla semiretta opposta alla $A'B'$, oppure sulla semiretta opposta alla $B'A'$, secondo che la retta PQ è parallela ad r, oppure incontra r sulla semiretta opposta alla AB, oppure sulla semiretta opposta alla BA. In questi ultimi due casi, detti C e C' rispettivamente i punti di incontro della retta PQ con la r e della retta $P'Q'$ con la r', dai triangoli ACQ, $A'C'Q'$ simili, per l'avere $\widehat{CAQ} = \widehat{C'A'Q'}$, $\widehat{AQC} = \widehat{A'Q'C'}$, si trae dapprima che $AC:A'C' = AQ:A'Q' = AB:A'B'$ e, quindi, che C e C' si corrispondono nella corrispondenza determinata dalla costruzione di Severi, di poi che $\widehat{ACP} = \widehat{A'C'P'}$.

Se R, avente R' per omologo, è un punto della retta PQ (diverso da C), un ragionamento analogo al precedente ci dice che la retta $P'R'$ dev'essere parallela alla r' oppure incontrare r' in C', secondo che PR è parallela alla r oppure incontra r in C. L'uguaglianza degli angoli $\widehat{RAB}$ ed $\widehat{R'A'B'}$ ci dice poi che R' sta nel segmento $P'Q'$ o nella semiretta $P'Q'$ o in quella a questa opposta, secondo che R sta nel segmento PQ o nella semiretta PQ o in quella o questa opposta; inoltre, alla semiretta CP ed alla sua opposta corrispondono la semiretta $C'P'$ e la sua opposta. Qualora la semiretta PQ fosse parallela ad r ed equiversa (o controversa) con la semiretta AB, la semiretta $P'Q'$ sarebbe parallela ed equiversa (o controversa) con la semiretta $A'B'$.

È chiaro, ormai, che se le semirette PQ, PR sono i lati di un angolo di α, allora le semirette $P'Q'$, $P'R'$ ad esse corrispondenti saranno i lati di un angolo eguale di α'; di più che ad una semiretta qualunque dell'angolo $\widehat{QPR}$, che incontri

Digitized by Google

il segmento QR in un punto S, dovrà corrispondere una semiretta, avente origine in P', che incontri il segmento $Q'R'$ nel punto S' corrispondente di S; dunque, ai punti di un angolo di α corrispondono i punti di un angolo uguale in α'.

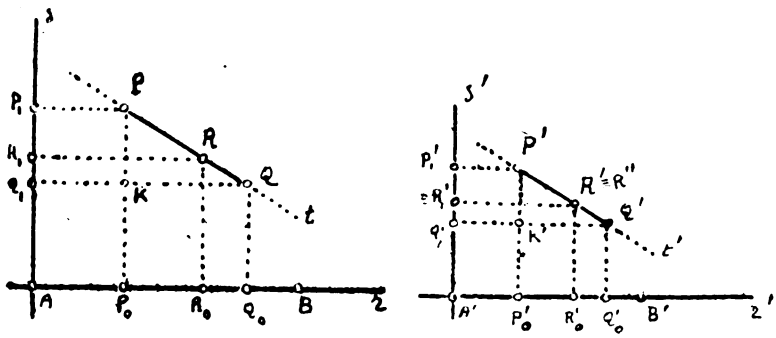


E così dimostrato che la corrispondenza determinata tra i piani α, α' dalla costruzione di Severi possiede i caratteri definitori della similitudine.

Corollario - *Esiste una ed una sola similitudine tra due piani* α, α' *che faccia corrispandere due dati segmenti* AB, A'B' *rispettivamente tracciati su* α, α' *e due dati semipiani aventi per contorni le rette* AB, A'B'.

3. - Del teorema precedente si può dare quest'altra dimostrazione diretta, assai semplice in sè, ma che non conduce però ad una costrnzione altrettanto espressiva come quella di Severi.

Per A ed A' si conducano le perpendicolari s, s' rispettivamente alle rette AB, $A'B'$; ad ogni punto P_1 della retta s si faccia corrispondere quel punto P'_1 della retta s' che sta dalla parte debita di A' e pel quale si ha che $A'P'_1 : AP_1 = A'B' : AB$. Ai punti della retta r si facciano corrispondere i punti della retta r' col criterio che è già stato indicato nella costruzione di Severi.



Digitized by Google

Preso un punto P del piano α, da esso si conducano le perpendicolari alle rette r ed s nei punti P_0 e P_1; si costruiscano i corrispondenti P'_0, P'_1 di questi; per P'_0 e P'_1 si conducano le perpendicolari alle rette r' ed s'; queste s'incontrano in un punto P' che chiamiamo corrispondente di P.

Consideriamo in α un segmento PQ, e siano P', Q' i corrispondenti di P e Q in α'. Sia R un punto del segmento PQ; la proiezione R_0 di R su r starà nel segmento P_0Q_0 (proiezione di PQ su r); costruito su r' l'omologo R'_0 di R_0, da esso si conduca la perpendicolare ad r' fino ad incontrare il segmento $P'Q'$ nel punto R'' (il che accade, poichè R'_0 sta tra P'_0 e Q'_0); da questo si conduca la perpendicolare su s', di piede R''_1. Poichè si ha, detti R_1 ed R'_1 la proiezione di R su s ed il suo omologo, $P'_1R'_1 : Q'_1R'_1 = P_1R_1 : Q_1R_1 = PR : QR =$ $= P_0R_0 : Q_0R_0 = P'_0R'_0 : Q'_0R'_0 = P'R'' : Q'R'' = P'_1R''_1 : Q'_1R''_1$; ed inoltre i punti R'_1, R''_1 sono entrambi interni al segmento $P'_1Q'_1$, si trae che $R'_1 \equiv R''_1$ e quindi che $R' \equiv R''$.

Dunque: ai punti del segmento PQ corrispondono i puuti del segmento $P'Q'$. In modo analogo si vedrebbe che alle semirette PQ e QP corrispondono le semirette $P'Q'$ e $Q'P'$.

Detti K il puuto d'intersezione delle rette Q_1Q, P_0P, e K' quello d'intersezione delle rette Q'_1Q', P'_0P'; dalla similitudine manifesta dei triangoli PKQ, $P'K'Q'$ risulta che gli angoli che la retta $PQ \equiv t$ forma con le rette r ed s sono uguali agli angoli che la retta $P'Q' \equiv t'$ forma con le rette r' ed s'.

Così, facilmente si vede che i punti in cui t' incontra le rette r' ed s' sono i corrispondenti dei punti in cui t incontra le rette r ed s.

È immediato, allora, dimostrare che ad un angolo di α, concepito come parte di un fascio di raggi, corrisponde un angolo uguale in α'.

4. - Ho già detto come il teorema espresso dal corollario dell'articolo 2 sia stato dato dal Severi come conseguenza di un teorema spaziale (1), il cui enunciato è riportato nella

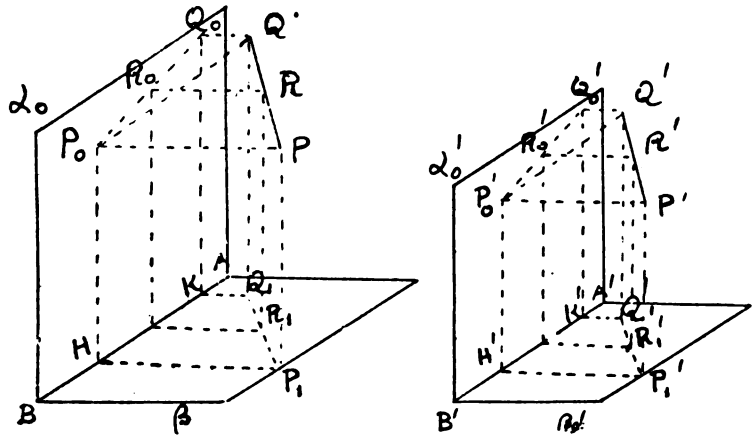
(1) Oltre che essere dimostrato mediante le proprietà dell'omotetia piana. Vedi loco citato, pag. 56, Es. 87.

Digitized by Google

nota a piè della pag. 2. Orbene, quest'ultimo teorema spaziale può ottenersi anch'esso come corollario di una costruzione spaziale che, in certo qual modo, è l'estensione di quella che il Severi ha data per le similitudini piane.

La costruzione in parola è la seguente:

Dati due semispazi Σ_0, Σ'_0; due semipiani α_0, α'_0 sui loro contorni; due segmenti AB, $A'B'$ sui contorni di questi; si considerino i semipiani β_0, β'_0 aventi rispettivamente le rette AB, $A'B'$ per contorni; ortogonali rispettivamente ai semipiani α_0, α'_0; situati rispettivamente nei semispazi Σ_0, Σ'_0. Si costruiscano la similitudine tra i piani α, α' (cui α_0, α'_0 ap-



partengono) nella quale ad α_0 corrisponde α'_0 e ad A, B corrispondono A', B'; e quella tra i piani β, β' (cui β_0, β'_0 appartengono) nella quale a β_0 corrisponde β'_0 e ad A, B corrispondono A', B'. Dato un punto P qualunque dello spazio, se ne costruiscano le proiezioni P_0 e P_1, rispettivamente sui piani α e β; si determinino il corrispondente P'_0 di P_0 nella similitudine tra α ed α', ed il corrispondente P'_1 di P_1 nella similitudine tra β e β'. Poichè le perpendicolari condotte da P_0 e da P_1 sulla retta AB s'incontrano nel piede H della perpendicolare condotta da P sulla retta AB, ne verrà che le perpendicolari condotte da P'_0 e da P'_1 sulla retta $A'B'$ dovranno incontrarsi nel punto H' che corrisponde ad H tanto nella similitudine tra α ed α' quanto in quella tra β e β'. Di conseguenza, le perpendicolari condotte da P'_0 e da P'_1

Digitized by Google

rispettivamente ai piani α' e β' dovranno incontrarsi in un punto P', che *chiameremo corrispondente* di P.

Si individua in tal modo una corrispondenza, evidentemente biunivoca, tra i punti dello spazio.

Propos. II. *La corrispondenza definita dalla costruzione precedente è una similitudine.*

Dimostriamo dapprima che ai punti di un segmento corrispondono i punti di un segmento. La cosa è evidente se il segmento giace o su α o su β. Consideriamo, quindi, un segmento PQ non giacente nè su α nè su β, e siano P', Q' i corrispondenti dei punti P, Q. Sia R un punto del segmento PQ; i punti R_0, R_1 (proiezioni di R su α e su β) staranno rispettivamente nei segmenti P_0Q_0, P_1Q_1 (proiezioni di PQ sui piani α e β); i punti R'_0, R'_1 corrispondenti di R_0 e di R_1 nelle similitudini tra α, α' e tra β, β', dovranno stare rispettivamente nei segmenti $P'_0Q'_0$, $P'_1Q'_1$ (corrispondenti di P_0Q_0 e P_1Q_1 nelle dette similitudini); il punto R', intersezione delle perpendicolari ad α' e β' condotte per R'_0 ed R'_1, dovrà stare necessariamente nel segmento $P'Q'$.

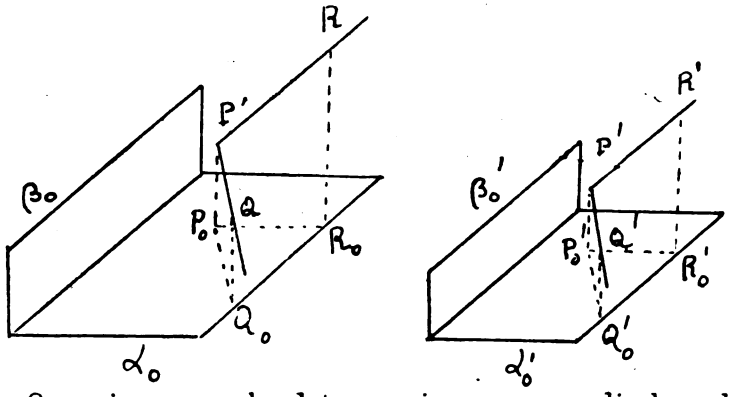
In modo analogo si vedrebbe che alla semiretta PQ corrisponde la semiretta $P'Q'$ e che alla semiretta QP corrisponde la semiretta $P'Q'$ e che alla semiretta QP corrisponde la semiretta $Q'P'$.

Detti H e K i piedi delle perpendicolari condotte da P e Q sulla retta AB, aventi per corrispondenti i piedi H' e K' delle perpendicolari condotte da P' e da Q' sulla retta $A'B'$, si ha $KQ_1 = Q_0Q$, $K'Q'_1 = Q'_0Q'$, $HP_1 = P_0P$, $H'P'_1 = P'_0P'$. Dalle uguaglianze di rapporti $P_0Q_0 : P'_0Q'_0 = KQ_1 : K'Q'_1 = Q_0Q : Q'_0Q' = HP_1 : H'P'_1 = P_0P : P'_0 : P' = AB : A'B'$, derivanti dalle similitudini che intercedono tra α, α' e tra β, β'; e dalla considerazione dei triangoli rettangoli simili P_0Q_0Q, $P'_0Q'_0Q'$ si trae che $\widehat{Q_0P_0Q} = \widehat{Q'_0P'_0Q'}$, $P_0Q : P'_0Q' = P_0P : P'_0P'$, $\widehat{QP_0P} = \widehat{Q'P'_0P'}$; quindi, che sono simili i triangoli QP_0P, $Q'P'_0P'$, ed infine che sono uguali gli angoli $\widehat{P_0PQ}$ e $\widehat{P'_0P'Q'}$ (qualora P coincidesse con P_0, basterebbe sostituire alle semirette PP_0, $P'P'_0$ le semirette normali ai piani α, α' rivolte, ad es., dalle parti di β_0 e β'_0).

Dimostriamo ora che ai punti di un angolo corrispondono

Digitized by Google

i punti di un angolo uguale. Preso un angolo $\widehat{QPR}$ non situato in un piano perpendicolare alla retta AB, ad esso corrisponderà un angolo non situato in un piano perpendicolare alla retta $A'B'$. Se $Q_0\widehat{P_0}R_0$ ad es. è la proiezione non nulla dell'angolo $\widehat{QPR}$ sul piano α, dovrà aversi $Q_0\widehat{P_0}R_0 = Q'_0\widehat{P'_0}R'_0$ e, quindi, che il diedro avente P_0P per spigolo, le faccie passanti per le semirette PQ, PR e l'angolo $Q_0\widehat{P_0}R_0$ come sezione normale, dovrà essere uguale al diedro avente P'_0P' per spigolo, le faccie passanti per le semirette $P'Q'$, $P'R'$ e l'angolo $Q'_0\widehat{P'_0}R'_0$ come sezione normale. Dall'uguaglianza degli anzidetti diedri e da quelle degli angoli $P_0\widehat{P}Q$, $P'_0\widehat{P'}Q'$ e degli angoli $P_0\widehat{P}R$, $P'_0\widehat{P'}R'$, prima constatate, risulterà che sono uguali i triedri PP_0QR, $P'P'_0Q'R'$ e, quindi, che sono uguali gli angoli $\widehat{QPR}$ e $Q'\widehat{P'}R'$.



Osserviamo ora che dato un piano π perpendicolare alla retta AB in un suo punto H, ogni retta t di esso ha per corrispondente una retta t' giacente nel piano π' perpendicolare alla retta $A'B'$ nel punto H' corrispondente di H; che i punti di incontro di t con le intersezioni di π con α e β hanno per corrispondenti i punti in cui t' incentra le intersezioni di π' con α' e β'; che gli angoli di t con le rette $\pi\alpha$ e $\pi\beta$ sono uguali agli angoli che la retta t' forma con le rette $\pi'\alpha'$ e $\pi'\beta'$; si conclude allora che ogni angolo giacente in un piano perpendicolare alla retta AB ha per corrispondente un angolo uguale giacente in un piano perpendicolare alla retta $A'B'$.

Aprile 1928

Digitized by Google

Il Congresso internazionale matematico di Bologna [1]

3-10 Settembre 1928 (VI)

Primo incontro dei Congressisti.

La sera del 2 settembre, alle ore 21,30, ha avuto luogo un primo incontro dei Congressisti coi Soci dell' Unione Matematica Italiana nelle Sale del Circolo di Coltura, nel Palazzo Hercolani. Gli ospiti sono stati ricevuti dai componenti il C. D. del Circolo e hanno assistito ad un concerto di musica classica, dopo il quale è stato loro servito un sontuoso rinfresco.

Il manifesto del Comune.

Cittadini,

Bologna vede oggi inaugurarsi un Congresso che, dopo la grande celebrazione dell' VIII centenario dell' antico Studio, è la maggiore solennità dovuta all' iniziativa ed all' attrattiva dell' Universitd nostra, e a questa stessa sarà nuovo motivo di compiacenza e di gloria.

Molti tra i più insigni Cultori delle Scienze Matematiche di ogni parte del mondo si adunano e la nostra città ha l' alto onore di porgere

---

(1) (*N. d. D.*) Riproduciamo il disegno delle due facce della medaglia commemorativa distribuita come distintivo a tutti i Congressisti, rinnovando il nostro plauso all'esimio Scultore prof. Borghesani Alfonso.

Digitized by Google

ad Essi il saluto augurale di tutta la Nazione, espresso, in nome di Sua Maestà il Re, da S. A. R. Adalberto di Savoia, Duca di Bergamo.

Cittadini,

Ancora una volta, per virtù dell'Augusto Sovrano, sotto i validi auspici di Benito Mussolini, la feconda impresa della Scienza è festa della Nazione.

Abbiano gli Ospiti illustri l'attestazione della nostra gratitudine perchè il felice consenso, frutto della serenità spirituale che tutti ci accomuna al di sopra di ogni confine, è arra sicura di sempre maggiore grandezza per la Patria e per la Scienza.

Dalla Residenza Municipale, li 2 settembre 1928 - Anno VI.

Il Podestà Leandro Arpinati.

Seduta inaugurale.

Il 3 settembre alle 9.30 il magnifico salone dell'Aula Magna dell'Archiginnasio è già gremito di Congressisti e di Autorità: nella parete di fondo sono disposte artisticamente, attorno ad un trionfo di tricolori, le bandiere di tutte le Nazioni rappresentate al Congresso, più di trenta Nazioni. Valletti del Comune e dell'Università recano i gonfaloni municipali e del glorioso Ateneo bolognese. Alle ore 10,10 fa il suo ingresso nella Sala S. A. R. il Duca di Bergamo che siede al posto d'onore, avendo allla destra S. E. il Cardinale Nasalli Rocca, l'on. Arpinati, S. E. il Prefetto, S. E. il Procuratore Generale e il rappresentante di S. E. il Primo Presidente della Corte d'Appello; alla sinistra del Principe siedono: S. E. il Ministro della P. I., S. E. il Comandante del Corpo d'Armata, il Sen. Albini, Rettore della R. U. di Bologna, il prof. Birkhoff di Filadelfia in rappresentanza dei Delegati Congressisti e il prof. Pincherle Presidente della C. E. del Congresso.

Il discorso dell'on. Arpinati.

È con viva commozione che a nome della città che ho l'onore di rappresentare porgo a Voi il saluto augurale. Bologna vi è grata di averla scelta come sede di questo vostro grande convegno; vi è grata per l'atto di riconoscimento alla secolare gloriosa tradizione universitaria. Bologna fascista è orgogliosa di ospitarvi e di potersi mostrare a voi così quale è, quale è divenuta, dopo un torbido periodo di demagogia sovvertitrice, sotto l'impulso vivificatore del fascismo; del fascismo che non è quello che alcuni connazionali rinnegati — ai quali è stato reso impossibile qui di proseguire l'opera di inganno per il popolo, di demolizione per la Patria — vanno dicendo all'estero e che molta stampa di nobili paesi qui rappresentati con troppa fretta ha riportato. Il fascismo

Digitized by Google

è fervore di opere, ordine e disciplina ed i fascisti sono, non dei violenti irrequieti e faziosi, ma uomini di fede che amano di sconfinato amore la loro Patria, che lavorano con ardore nei campi, nelle officine, nelle università, che con gioia ciecamente ubbidiscono il loro Duce, il Duce amato, non dall'aspetto truce, intento a creare beghe o a preparare guerre, ma animatore di ogni buona attività del popolo italiano, conciliatore di ogni passione e di ogni interesse, garanzia sicura di pace e di prosperità.

In questo vostro breve soggiorno in Italia spero potrete vedere e rendervi esatto conto del nostro stato e del nostro spirito; ed io mi auguro che voi finiti i lavori del congresso, ritornando in Patria, possiate serbare un grato ricordo di Bologna e dell'Italia.

Con questo augurio io rinnovo il saluto di Bologna, il saluto del fascismo.

Il discorso del Senatore Albini.

Il Magnifico Rettore sen. Albini legge quindi un dotto discorso in lingua latina. Dopo avere salutato i congressisti a nome dell'antica Università degli Studi ed essersi compiaciuto per l'intervento dei Rappresentanti della Casa Regnante e del Governo Nazionale, prosegue:

Bologna, credo, non era indegna che ci conveniste, in lunga serie di generazioni quasi per suo fato benigno fautrice e ospite di studi e di studiosi, non meno che madre di probi e di prodi; il cui Ateneo, come già la gloriosa acropoli ateniese, amò sempre mostrare rigogliosa la fronda di Pallade, non ultima certo tra quante possono adornare le fronti degli uomini e il cammino de' popoli. Sono quarant'anni che a celebrare l'ottavo centenario dalla fondazione dello Studio quì affluirono in gran numero da tutto il mondo maestri preclari, lieti di vedere la città che nel medio evo tra la selva delle sue torri quasi faro eminente e luminoso era stata mèta alla volonterosa gioventù di tutta Europa. E la città accolse quei maestri come aveva un giorno accolto i discepoli, e ad ognuno di essi per bocca di un suo poeta diceva: *Entra o cultor del vero; quì tu non sei straniero.* Del memorando convegno di otto lustri fa, sembra rinnovare l'imagine l'odierno vostro, e Bologna ripete a ciascuno di voi — sia con l'augurio viepiù fermo e felice — il saluto d'allora.

Proseguendo l'oratore accenna brevemente all'importanza che ebbe l'opera dei dottori bolognesi dal Rinascimento in poi e, ricordati i nomi degli scomparsi professori svedesi Mittag Leffler, dottore onorario di questa università, e Ilvar Fredholm, e l'italiano Luigi Bianchi, così termina la sua erudita orazione latina.

Ed ora io vorrei l'autorità di quei sapienti che formarono l'eredità di quest'*Alma madre degli studi*, vorrei la voce di quelli che fiorirono lungo i secoli maggiori maestri, per poter un istante adeguare le fuggenti parole all'altezza e saldezza della vostra dottrina, della dottrina che voi ogni dì accrescete com'essa voi, e per esprimere più alto l'augurio

Digitized by Google

alle fatiche vostre e a' suoi incrementi. Anche chi a questa è per sua disavventura profano, solo che non sia del tutto appartato da ogni cultura e dalla vita stessa, sa che **nella matematica è il principio e il segreto dei più dei miracoli che empiono l'età nostra, e che noi in pubblico e in privato godiamo straordinari. Per lei assistiamo ai prodigi della tecnica, per lei l'ali son date all'uomo, per lei conversiamo dall'uno all'altro emisfero e dalla solitudine dell'oceano e dell'immensità dell'aria udiamo le voci di chi trionfa e di chi implora.**

Essa, non meno che agli studiosi della compagine dell'universo, soccorre nelle sottili ricerche. pur ora ammirate sulla composizione dell'atomo, degne di un altro poema lucreziano onde apparirebbe che la realtà ha superato la fantasia, benchè la poesia pur sempre sorvoli la realtà e da una stella più in alto ci arrida. Quanto anche cotesta scienza non sia aliena da sublime poesia, solo ai fatui può sfuggire; dedita allo studio dei numeri e creatrice di meraviglie innumerevoli, associa e libra la vivace immaginativa e il ponderato ragionamento, ora leggiera sulle ali, ora curva su le cifre e il compasso. Può esser l'esempio di quella perfetta educazione e istruzione, a cui vorrei informata la gioventù e tutta la vita civile, anzi tutto della patria, ma insieme di tutti i popoli da schietto senso di umanità affratellati. Perchè istituzione compiuta è quella che insegna egregi fatti e ogni ardimento al cenno di una cosciente probità e col vanto d'intemerati costumi.

Il discorso del prof. Pincherle.

Altezza reale, Eccellenza, signore, signori,

Un saluto eloquente è stato ora porto nella lingua immortale di Roma agli scienziati qui convenuti da ogni parte del mondo. Il fatto che questo saluto sia pronunziato da un magnifico rettore dell'università di Bologna, trascende però da essere semplice manifestazione di cortese accoglienza. Nel pensiero di coloro che hanno preparato il presente convegno questo fatto deve rappresentare la fine di uno stato di disagio che come una delle tante conseguenze della guerra si è trascinato sino ad oggi. I congressi internazionali di matematica iniziati a Zurigo nel 1896 e quali olimpiadi del pensiero ripetutisi con periodo quadriennale vennero interrotti dalla guerra. Cessata questa furono ripresi per l'opera dell'Unione matematica internazionale la quale però, in connessione con uno stato d'animo che la psicologia dell'indomani della guerra basta a spiegare, se non a giustificare, escludeva dai congressi alcune nazioni il cui contributo alla scienza non poteva essere in alcun modo trascurato. Due congressi vennero tenuti con queste restrizioni: a Strasburgo nel 1920, a Toronto nel 1924; ma in questo ultimo i rappresentanti degli Stati Uniti d'America presentavano una mozione che riceveva sul mo-

Digitized by Google

mento l'adesione dei rappresentanti di numerose nazioni fra cui l'Italia, mozione diretta a togliere per l'avvenire ogni esclusione. Il Consiglio dell'Unione designava a sede del futuro congresso la città di Bologna, cui la fama della sua vetusta università valeva questo onore. Questa scelta suggeriva il modo di realizzare senza offendere alcuna suscettibilità ciò che era nei voti della maggioranza degli studiosi, il ritorno cioè alla pacifica collaborazione nel campo degli studi, l'oblio di un atteggiamento che aveva da una parte e dall'altra perduta la sua ragione di essere e perciò l'invito al congresso fu rivolto dal rettore dell'Università di Bologna ed il numero e la qualità degli aderenti che noi possiamo salutare in questa storica aula dimostra che il nostro procedere ha incontrato un consenso che possiamo dire universale. Questo nostro pensiero ha avuto l'alta approvazione dell'Uomo eccezionale che la fortuna d'Italia ha destinato a reggerne le sorti, e il suo appoggio, quello della locale autorità governativa, quello del primo magistrato della città hanno permesso alla commissione esecutiva di assolvere con grato animo il non facile compito.

Il congresso al quale la maestà del Re ha non solamente voluto concedere il Suo alto patronato ma ha fatto anche l'onore di designare a suo rappresentante un Augusto Principe della sua Casa, il congresso, di cui il Capo del Governo ha accettata la presidenza d'onore e a cui ha voluto essere rappresentato da S. E. Belluzzo ministro della pubblica istruzione, che è pure un insigne studioso di un ramo importante della matematica applicata, il congresso diciamo sta per iniziare i suoi lavori ponderosi poichè oltre diciasette conferenze generali su svariati argomenti della matematica pura e applicata tenute da scienziati di alta fama, sono annunziate oltre 400 comunicazioni su oggetti pertinenti ai campi più vari di cui più d'una darà luogo ad interessanti discussioni nell'aritmetica. nell'algebra, nell'analisi, nella meccanica pura e applicata; e nelle applicazioni della matematica alla statistica, e nella didattica saranno trattati argomenti del maggiore interesse, della maggiore attualità. Nella sezione storica verrà messo in rilievo il contributo dato alle matematiche a partire dal secolo XV dall'Italia ed in particolare dallo studio bolognese. Pertanto è lecito sperare che il congresso di Bologna segnerà una pietra miliare sul cammino della nostra scienza come è lecito sperare che esso aprirà una feconda serie di congressi in cui i dotti di tutti i paesi segneranno periodicamente i progressi raggiunti in quel dominio dello spirito che insieme alle più alte e delicate associazioni del pensiero dà le direttive a quelle applicazioni tecniche che in mille forme contribuiscono al benessere dell'umanità.

Il discorso del prof. Birkhoff.

Altezza Reale, Signori,

« Vi rivolgo da parte dei matematici qui presenti e rappresentanti più di trenta Nazioni di tutte le parti del mondo il saluto per la vostra calorosa accoglienza.

Digitized by Google

« Noi apprezziamo più che non possiamo esprimere a parole le accoglienze che ci ha riservato il grande Governo italiano, della città antica e famosissima di Bologna e della vostra Università, così giustamente celebre. È naturalissimo che questo Congresso internazionale si svolga qui ed è per noi un onore essere fra di voi. La nostra ammirazione per l'opera splendida dei matematici italiani ed il ricordo dell'amicizia e della ospitalità usata a nostro riguardo altra volta in passato è uno stimolo per noi.

« Si preannuncia frattanto una settimana memorabile di lavori, e noi vi rivolgiamo i nostri vivissimi ringraziamenti ».

Il discorso di S. E. il Ministro della P. I. on. Belluzzo.

Altezza Reale, Signori,

Sono lieto di portare agli illustri matematici qui convenuti a Congresso da ogni parte del mondo il saluto augurale del Governo Fascista.

Penso che non a caso Bologna sia stata prescelta a sede di questo convegno internazionale: le tradizioni matematiche dell'Ateneo bolognese e la luce di sapere che da esso si è sparsa per il mondo sono ben degne di accogliere una così eletta schiera di scienziati.

La presenza a questa cerimonia di un Principe della gloriosa Casa attorno alla quale si stringono con il cuore e la mente tutti gli italiani ne accresce la solennità e l'importanza.

Personalmente son onorato di rappresentare quì il Governo, che alla scienza intende dare il posto più degno, sia come Ministro della Pubblica Istruzione, che come Ingegnere e Professore che della scienza matematica molto si è giovato negli studi, nell'insegnamento e nelle costruzioni meccaniche.

Io sono infatti, e da tempo, un caldo fautore della necessità degli studi matematici per gli ingegneri che della ingegneria intendono fare una scienza e **penso talvolta non senza malinconia, alle somme ingenti che si sarebbero risparmiate nelle costruzioni che formano le nuove meraviglie della tecnica se il calcolo infinitesimale fosse stato dai progettisti più intimamente conosciuto e severamente adoperato.**

La tecnica ha infatti nella matematica un'arma di grande efficacia che le permette di risolvere i problemi più complessi e difficili e di trovare sempre delle soluzioni di massimo rendimento o di minimo peso ed ingombro, ossia di minima spesa.

Non c'è ramo della tecnica, dalla meccanica all'elettrotecnica, dalla idraulica all'edilizia, che alla scienza matematica non debba il proprio progresso: sono infatti gli studi matematici che hanno permesso di assoggettare a leggi e regole fisse le grandi trasmissioni dell'energia, di spingere le tensioni delle correnti elettriche alternate, trasmesse per fili sospesi o per

Digitized by Google

fili imprigionati in cavi, a dei valori di migliaia di Volta; è grazie ai risultati degli studi matematici sulle velocità critiche degli alberi, sulle vibrazioni delle masse ruotanti che si possono oggi far girare delle macchine potenti alla velocità di migliaia di giri al minuto primo; è perchè la matematica ha permesso di determinare le leggi del moto perturbato dell'acqua nelle tubazioni in pressione che si possono utilizzare dei salti d'acqua di centinaia di metri, è perché essa ha insegnato a calcolare gli archi e le volte e le travate che le grandi strutture in ferro, in pietra, in cemento armato sono state rese economiche e sicure.

La matematica è l'arma formidabile che penetra nelle zone più in ombra del sapere e le illumina; è arma potente che con la fisica e la chimica si sforza di demolire la parete dietro la quale sta il mistero della creazione, conquistando lentamente e con tenacia nuove posizioni, aprendo nuovi vasti orizzonti alle indagini sperimentali.

La matematica è la collaboratrice intima della fisica; dove questa con l'esperienza scopre nuove leggi, mette in luce nuovi fenomeni, la matematica con le sue formule consolida le posizioni conquistate e le estende.

Il grande Maxwell ha dimostrato quale istrumento possa essere la matematica nella mente di un genio, giacchè egli con le sue formule è arrivato dove solo più tardi è giunta la fisica. È la matematica che ha indicato agli astronomi l'esistenza e la posizione di un nuovo pianeta nel sistema solare. È la matematica che ha permesso di calcolare le distanze infinitamente grandi dei sistemi planetari — quelle che si esprimono in anni-luce — e le distanze infinitamente piccole dei sistemi atomici che si esprimono in frazioni di milionesimo di millimetro.

È la matematica che ha permesso di calcolare la massa di stelle lontane migliaia di anni-luce dalla terra e quella degli elettroni che formano un sistema atomico. È la matematica che una volta fissata l'ipotesi della dipendenza della massa di un corpo dalla sua velocità e della costanza nella velocità della luce, ha permesso di creare la teoria della relatività e di arrivare a conclusioni che aprono alla mente attonita degli uomini nuovi insospettati orizzonti.

Su tutte le strade vecchie e nuove, per le quali il progresso si è incamminato, la matematica è sempre stata un propulsore potente ed efficace.

Giacomo Watt ha inventato la macchina a vapore, ma la matematica posta al servizio della termo-dinamica l'ha perfezionata indicando le condizioni necessarie per aumentare il suo rendimento e diminuire quindi il consumo di combustibile.

Le trasmissioni telegrafiche attraverso gli oceani sono state permesse dagli studi matematici di Lord Kelvin.

Digitized by Google

La missione dei matematici nel mondo è certamente tra quelle più illuminate dall'idea, giacchè se il fisico ed il chimico, scoprendo un nuovo fenomeno o una nuova reazione possono talvolta volgere la scoperta a proprio profitto, al matematico, che riesce a risolvere un problema complesso che ha occupato la sua mente per ore, per giorni, per settimane e talvolta per anni, non rimane che la soddisfazione intima della ricerca compiuta, della soluzione trovata.

Ed è certamente perchè le scoperte matematiche dànno solo delle intime soddisfazioni e dei compensi morali che fra i matematici di una stessa nazione e fra quelli di diverse nazioni esiste una solidarietà ed uno spirito di collaborazione che non sempre è la regola nei rami della scienza applicata.

Certo può essere doloroso il constatare che mentre le folle prodigano applausi e milioni a degli uomini che hanno l'abilità di scambiarsi dei pugni imbottiti e pongono a loro disposizione linee telefoniche e telegrafiche e pagine di giornali, gli uomini di scienza sono ignorati dalle folle e ricordati fugacemente dalla stampa quotidiana quando il ciclo della loro vita fisica ed intellettuale si chiude.

Ma è bene che così sia, perchè la scienza è aristocratica, **la scienza matematica è aristocrazia fra le aristocrazie che deve operare lontano dalle folle scendendovi in silenzio e in incognito per contribuire a migliorarne o a perfezionarne l'esistenza.** Solo la storia distingue coloro che con la mente sono vissuti molto vicini alla terra, dagli uomini di scienza che col pensiero sono vissuti vicini a Dio: essa dimentica rapidamente i primi per ricordare e glorificare solo questi ultimi.

Io non so se verrà un giorno in cui la cultura sarà talmente diffusa nelle classi medie da permettere anche a queste di rendersi conto degli sforzi che hanno affaticato l'intelletto dei matematici, della nobiltà che è stata la guida di questi sforzi. del disinteresse che ne è l'emblema, della grandezza che ne è l'anima.

Augurando prossimo il giorno nel quale la gratitudine dei migliori volgerà un pensiero memore e riconoscente ai grandi matematici che furono ed onorerà come meritano quelli che sono, mi permetto come tecnico e come Ministro, sicuro interprete del pensiero di tutti i tecnici del mondo, di compiere questo atto e di ringraziare voi tutti per il contributo che portate al progresso in generale e a quello della tecnica in modo particolare.

Con questo ringraziamento e con i più fervidi auguri per i risultati dei vostri lavori, nel nome Augusto della Maestà del Re, dichiaro aperto il Congresso Internazionale dei matematici in Bologna.

Ha così termine la seduta inaugurale.

Digitized by Google

Prima Seduta del Congresso.

Nomina del Presidente e dei Vice-presidenti.

Alle ore 15 del 3 settembre, l'Aula Ciamician, dell' Istituto di Chimica generale, ha accolto un numero imponente di congressisti, un migliaio circa. Ha aperto la Seduta il prof. BORTOLOTTI ETTORE Segretario del Comitato ordinatore del Congresso: egli ha invitato il Congresso ad eleggersi un Presidente ed immediatamente, da più parti, è stato fatto, il nome del prof. PINCHERLE che, per acclamazione, è stato eletto Presidente del Congresso.

Una triplice salve d'applausi ha salutato l'insediamento del Presidente, il quale, ringraziati i congressisti dell'onore fattogli, ha proposto la nomina a Vice-presidenti delle più spiccate personalità dei vari Stati rappresentati al Congresso, e tutti i nomi proposti sono stati votati per acclamazione. La Presidenza del Congresso è quindi resultata costituita nel modo seguente:

Presidente del Congresso: il Prof. S. PINCHERLE.

Vice-presidenti: Prof. DE LB VALLÉE POUSSIN. per il *Belgio* - Prof. J. HADAMARD, per la *Francia* - Prof. D. HILBERT, per la *Germania* - Prof. W. H. YOUNG e J. C. FIELDS, per l'*Inghilterra* ed i Dominions - Prof O. VEBLEN, per l'*America* - E. TERRADAS, per la *Spagna* e l'*America latina* - Prof. W. SIERPINSKI, per la *Polonia* - Prof. H. BOHR, per l'*Olanda*, la *Svezia*, la *Norvegia*, la *Danimarca* - Prof. N. LUSIN, per la *Russia*, Prof. S. KAKEYA, per il *Giappone*.

Conferenze generali del 3 settembre.

Alle ore 16 del 3 settembre sotto la presidenza del prof. Pincherle, prende la parola il prof. D. HILBERT per esporre la sua Conferenza sul tema: *Probleme der Mathematischen Logik.*

Dopo un breve intervallo ha luogo la seconda Conferenza del prof. HADAMARD sul tema: *Le developpement et le rôle scientifique du Calcul functionnel.* Terza ed ultima della giornata, è la Conferenza del Direttore della R. Scuola di Applicazione degli Ingegneri di Bologna, prof. U. PUPPINI sul tema: *Le bonifiche in Italia.*

Conferenze generali del 4, 5, 6, 8, 10 settembre.

Alle ore 9 del 4 settembre, sotto la presidenza del prof. HADAMARD, che annuncia che per impedimento di E. BOREL, ne leggerà il discorso il prof. CARTAN, questi procede alla lettura della Con-

Digitized by Google

ferenza Borel sul tema: *Le calcul des probabilités et les sciences exactes.* Segue la Conferenza di O. VEBLEN sul tema: *Differential Invariants and Geometry* e poi la conferenza di G. CASTELNUOVO sul tema: *La Geometria algebrica e la Scuola Italiana.*

Alla fine di questa Conferenza, il prof. Severi, dopo aver ringraziato il prof. Castelnuovo dell'accenno fatto ai propri lavori di geometria algebrica, annuncia al Congresso un ulteriore notevole resultato a cui è giunto in questi giorni.

Nella mattinata del giorno 5, sotto la presidenza del prof. LA VALLÈE POUSSIN hanno luogo successivamente le tre Conferenze seguenti: del prof. W. H. YOUNG, sul tema: *The mathematical methods and its limitations;* del prof. V. VOLTERRA sul tema: *La teoria dei funzionali applicata ai fenomeni ereditari* e del prof. H. WEYL sul tema: *Darstellung Kontinuirlichen Gruppen.*

Nella mattinata del giorno 6 sotto la presidenza del prof. H. W. JOUNG hanno luogo successivamente le tre conferenze seguenti: del prof. V. KÀRMÀN sul tema: *Mathematische Probleme der modernen Aerodynamik;* del prof. L. TONELLI sul tema: *Contributo italiano alla Teoria delle funzioni di variabili reali;* e del prof. L. AMOROSO sul tema: *Le equazioni differenziali della dinamica economica.*

Nella mattinata del giorno 8 hanno luogo le Conferenze del prof. M. FRÉCHET sul tema: *L'analyse générale et les espaces abstraits;* del prof. R. MARCOLONGO sul tema: *Leonardo da Vinci nella storia della matematica e della meccanica;* e del prof. N. LUSIN sul tema: *Sur les voies de la thèorie des ensembles.*

Il giorno 10, a Firenze, nel Salone dei Cinquecento, a Palazzo Vecchio, il prof. G. BIRKHOFF ha tenuto una Conferenza sul tema: *Quelques éléments mathématiques de l'art* (cfr. 156).

Sedute di Sezione.

Nel pomeriggio di ciascuno dei giorni 4, 5, 6, 8 settembre, dalle ore 16 in poi, hanno luogo le sedute di Sezione, col seguente inquadramento:

Sezione I — Aritmetica, Algebra, Analisi. Sede: Istituto matematico: Presidente: Leonida Tonelli. Introduttori: Cipolla, Fubini, Scorza.

Sezione II — Geometria. Sede: Istituto Chimico: Presidente: Luigi Berzolari. Introduttori: Bompiani, Fubini, Severi.

Sezione III — Meccanica - Astronomia - Geodesia - Geofisica - Fisica matematica - Fisica Teorica. Sede: R. Università: Presidente: Pietro Burgatti. Introduttori: Armellini, Levi Civita, Somigliana.

Sezione IV — Statistica - Economia matematica - Calcolo delle probabilità - Scienze attuariali. Sede: R. Università: Presidente: Guido Toia. Introduttori: Amoroso - Cantelli - Gini.

Digitized by Google

Sezione V — Ingegneria - Applicazioni industriali. Sede: Istituto matematico: Presidente: V. Kàarmàn. Introduttori: Albenga, Di Pirro, Giorgi, Lori, Panetti, Porro, Puppini, Silla, Vacchelli, Vallauri.

Sezione VI — Matematica elementare - Questioni didattiche - Logica matematica. Sede: Istituto matematico: Presidenti: H. Fehr, G. Castelnuovo, Ugo Amaldi. Introduttore: Perna.

Sezione VII — Filosofia e Storia della matematica. Sede: Anfiteatro di Anatomia comparata: Presidenti: Ettore Bortolotti e Gino Loria. Introduttori: Marcolongo, Vacca.

E' stato distribuito fin dal primo giorno un Volumetto ove sono raccolti gli Argomenti delle Comunicazioni che, in numero di circa quattrocento, sono state presentate da oltre trecento Congressisti, tra cui un centinaio di italiani: ABATE DAGA - AMATO - ARTOM - BABINI - BIASI - BIEZENO - BOMPIANI - BORTOLOTTI ENEA - BORTOLOTTI ETTORE - BROGGI - BRUSOTTI - BURGATTI - CABRAS - CACCIOPOLI - CALABRESE - CAMINATI - CANDIDO - CANTELLI - CASAZZA - CASTELLANI - CAVALLI - COLOMBO - COMMESSATTI - CORINI - DA RIOS - DE CESARE - DE FINETTI - DELL'AGNOLA - DEL VECCHIO - DONATI - FANO - FARAGO - FANTAPPIÈ - FINZI - FUBINI - GALVANI - GIANFRANCESCHI - GIORGI - IVALDI - LABOCCETTA - LAMBERTI - LAMENZA - LANZAVECCHIA - LAPPO - LRJA - LELLI - LEVI CIVITA - LOPERFIDO - LORIA - LUZZATTO - MADIA - MAGGI - MARCOLONGO - MARONI - MIGNOSI - MINETTI - MOLINA - MUZZIOLI - NALLI - NOBILE - ONOFRI - ORE - PADOA - PALOZZI - PASCAL - PICONE - PINCHERLE - PISTOLESI - POLETTI - PROSCIUTTO - RAIMONDI - ROSATI - SANNIA - SANSONE - SBRANA - SEGRE - SEVERI - SIBIRANI - SITTIGNANI - SOLE - SOMIGLIANA - STRANEO - STURANI - SUPINO - TERRACINI - TESTA - TIMPANARO - TONELLI - TRICOMI - TRAVAGLINI - VANNI - VÀNNINI - VARELA - VASILESCO - VITALI.

I lavori della Sezione VI

Noi abbiamo seguito in modo particolare i lavori della Sezione VI nella quale sono state presentate le seguenti Comunicazioni:

il 4 settembre:

J. LUCASIEWICZ. Systheme mehrwertiger Logic.

J. LUCASIEWICZ. Zur Geschichte des Aussasagrnkalkuls.

J. LUCASIEWICZ. Ueber den Aussasagrnkalkul.

A. VASSILIEFF. Est-il possible d'introduire dans l'enseignement secondaire les élements de la philosophie mathématique?

A. PADOA. Proposizioni assiomatiche.

L. CHWISTEK. Nouvelles rechérches sur les fondements de mathématiques.

H. HARLEN. Ueber Axiomensysteme als Satzfunktionen.

A. TARSKI. Vollständigkeitsproblem einer mathematischen Systeme.

Digitized by Google

il 5 settembre:

H. Fehr. Les travaux de la commission internationale de l'enseignement mathématique.

N. Sakellarios. Projet pour la constitution d'une commission....

J. E. Von van Steenwyk. Remarques sur l'enseign. mat. dans les écoles second.

R. Marcolongo. Il calcolo vettoriale nell'insegnamento secondario.

T. Vannini. Proposta di nominare una commissione per lo studio dell'unificazione della nomenclatura della mat. elem.

E. Artom. Intorno all'insegnamento dell'arit. e dell'algebra.

il 6 settembre:

A. Maroni. Osservazioni relative ai poliedri.

C. Clapier. Mèthode de recherche en géométrie élémentaire.

W. Lietzmann. Zur Aritmetik der Schulzengnisse.

P. Hergaard. La réprésentation des points imaginaires de Sophus Lie....

Marie Zrrvos. Sur nne expression nouvelle de la définition des nombres premiers.

U. Cassina. Teoria della radice quadrata graduale.

e l'8 settembre:

A. Farago. Vortrag ueber Kozepiskolai mathematikai es fizikai Lapok.

M. G. Sittignani. Matematica nell'insegnamento medio.

G. Casazza. Fondamenti di geometria e di fisica.

P. Caminati. Procedimento nuovo per la soluzione delle equ. di 3° grado.

P. Caminati. Postulato nuovo della geometria euclidea.

G. Ivaldi. Sul principio fondamentale di una nuova e vecchissima meccanica.

Particolarmente interessante è stata la seduta del 5 settembre, nella quale, dopo le Comunicazioni dei Prof.i Fehr e Sakellarios, si è accesa un'ampia discussione. Ha aperta la discussione il prof. A. Conti per sviluppare il seguente ordine del giorno:

La Sezione VI del Congresso Int. Mat. di Bologna;

udita la interessante Comunicazione del prof. Fehr;

preso atto, con compiacimento, dello sviluppo che ebbero i lavori della Commissione internazionale sorta, nel 1908, in seguito al voto del Congresso internazionale di Roma;

dolente della sospensione di questi lavori;

rinnovando il voto del Congresso di Roma, propone che si proceda alla costituzione di una nuova Commissione intern. col mandato di pro-

Digitized by Google

seguire detti lavori con tutte quelle semplificazioni suggerite dall'esperienza della precedente Commissione e tenendo conto delle nuove situazioni formatesi negli ordinamenti scolastici dei vari Stati;

in particolare afferma la convenienza di una rapida inchiesta internazionale sullo stato di fatto dell'abbinamento dell'insegnamento della matematica con quello di altre discipline e sui resultati di tale abbinamento ed inoltre sui provvedimenti da proporre ai vari Governi a tale riguardo affinchè l'insegnamento scientifico abbia nella Scuola media un posto adeguato e riesca veramente efficace.

Hanno partecipato alla discussione i prof. Marcolongo, Padoa, Fehr, Sakellarios ed altri, e si è concluso con l'approvazione, *unanime*, di un ordine del giorno presentato dal prof. Fehr col quale, *rivolto un ringraziamento ai Governi che già diedero efficace aiuto alla Commissione internazionale e a tutti coloro che comunque collaborarono ai lavori della Commissione stessa, rivolto un pensiero affettuoso alla memoria dei membri della Commissione che sono morti, si delibera che siano prolungati i poteri del Comitato centrale della Commissione internaz. costituito dal prof. Smith Presidente, dal prof. Castelnuovo Vice Presid. e dal prof. Fehr Segretario, che sia completato il Comitato Centrale con la nomina di altri membri in sostituzione di quelli defunti e che poi il Comitato centrale completato, formi la Commissione internazionale plenaria di guisa che vi siano rappresentati tutti gli Stati.*

Nella stessa seduta del 5 settembre, il prof. MARCOLONGO, incidentalmente, nello svolgere la sua interessante Comunicazione sul Calcolo vettoriale nell'insegnamento secondario, ha espresso il voto *che gli insegnanti di matematica e fisica della Scuola classica italiana siano alleggeriti di tutte le ore d'insegnamento oggi loro affidate nel ginnasio, cosicchè il loro insegnamento si svolga soltanto nelle classi liceali.*

Nell'ultima seduta di questa Sezione VI abbiamo avuto anche quattro Comunicazioni poco serie, una da parte del sig. CASAZZA ben noto per le sue teorie che lo accomunano al famigerato PANERONI nella lotta contro GALILEO GALILEI e le sue maggiori scoperte; due altre da quel venerando uomo di 92 anni, il prof. CAMINATI la cui canizie gli valse d'essere ascoltato... e un'altra infine da quel Sig. IVALDI che pure è ben noto in Italia e che anche a questo Congresso si è presentato col suo strumento del *moto perpetuo*... omettendo però di farlo funzionare... Sarebbe augurabile che pei futuri Congressi internaz. si adottasse un sistema

Digitized by Google

analogo a quello che non permette che tutte le pitture siano ammesse alla Esposizione biennale di Venezia!

L'ultima seduta del Congresso.

Il 10 settembre ha avuto luogo in Firenze, in Palazzo Vecchio, nel Salone dei Cinquecento, la seduta di chiusura del Congresso.

Questa seduta ha avuto inizio col seguente discorso del Senatore ANTONIO GARBASSO, Podestà di Firenze (1):

« Eccellenze, Signore e Signori,

« Sono lieto e orgoglioso di porgere ai membri del Congresso Internazionale dei Matematici il saluto e l'omaggio del Comune e del popolo di Firenze.

« E sono lieto di poter esprimere alla Commissione Esecutiva e al suo illustre Presidente in particolare, al Prof. Salvatore Pincherle, la nostra viva gratitudine.

« È per noi un grande onore che il Congresso chiuda la sua nobile fatica, riunendosi per l'ultima volta in questa vecchia Casa del Popolo fiorentino. Riconosciamo però, se me lo permettete, senza falsa modestia, che in nessun luogo forse avrebbe potuto svolgersi più degnamente che qui, la conferenza del Prof. Birkhoff « Quelques éléments mathématiques de l'art ».

« Voi sapete, Signore e Signori, che se Firenze e la Toscana furono, a partire dal medioevo, la culla delle arti, esse hanno dato anche un contributo di primissimo ordine alla rinascenza delle matematiche.

« Avrò il piacere, fra poco, di mostrarvi le pergamene della nostra nobiltà scientifica.

« S. E. il Ministro della Pubblica Istruzione ha voluto infatti autorizzare i benemeriti direttori della Biblioteca Nazionale e della Biblioteca Laurenziana, i proff. Bruschi e Rostagno, ad esporre qui in Palazzo Vecchio i documenti che provano il nostro diritto di primogenitura.

« Fu un toscano, Leonardo Fibonacci di Pisa, che al principio del secolo Decimoterzo rivelò all'Europa cristiana l'Algebra degli indiani e degli arabi. Il suo « Liber abbaci » fu composto nel 1202.

« Fu un toscano, Raffaello Canacci, di Firenze, che nel secolo decimo quarto pubblicò il primo trattato d'algebra che sia stato scritto in lingua moderna.

« Fu un toscano, Leonardo da Vinci, che alla fine del quattrocento divinò la nuova meccanica.

---

(1) Riproduciamo integralmente questo discorso, anche pel valore storico che ha acquistato per la circostanza delle dimissioni da Podestà presentate lo stesso dì 10 settembre dal sen. Garbasso, per cui questo viene ad essere l'ultimo discorso solenne da Lui pronunciato come Podestà di Firenze.

Digitized by Google

« Fu un toscano, Galileo Galilei, che alla fine del secolo decimosesto e al principio del decimosettimo fondò l'astronomia moderna e la meccanica razionale.

« Galileo Galilei fu anche il primo che, dopo Archimede, fece ciò che ora chiamiamo una integrazione. Tre discepoli di Galileo: Bonaventura Cavalieri, Evangelista Torricelli e Vincenzo Viviani lavorarono fra i primi a fondare il calcolo infinitesimale. Se la scoperta dei metodi generali ha fatto dimenticare i precursori, i resultati del Cavalieri, del Torricelli e del Viviani, sono citati però, quasi ad ogni pagina nella « Nova methodus fluxionum » di Isacco Newton e questo basta alla gloria dei nostri italiani.

« Quando si è riassunto così, rapidamente, il contributo che Firenze diede allo sviluppo della più perfetta fra le scienze, non si è posta ancora in luce l'influenza che le matematiche hanno esercitato sulla formazione del genio elegante, sobrio e limpido del popolo toscano.

« Le nostre biblioteche conservano, a decine, dei trattati d'aritmetica, d'algebra e di geometria, composti nel '300 e nel '400 per quei mercanti che erano allora i banchieri dei papi, degli imperatori, dei re di Francia e dei re d'Inghilterra.

« E conservano, le nostre biblioteche, saggi numerosissimi su le matematiche e la meccanica, dovuti ad artisti che si chiamavano Lorenzo Ghiberti, Leon Battista Alberti, Antonio Filarete, Francesco di Giorgio Martini e Leonardo da Vinci.

« A Firenze, come nella Grecia antica, le matematiche sono state dunque un elemento principalissimo della civiltà.

« Ma a Firenze, come nella Grecia antica, la fioritura maggiore delle arti ha preceduto la fioritura massima delle scienze.

« E se negli orti di Accademo i sapienti fissavano le verità immortali all'ombra delle statue immortali, sembra fosse necessario che Sandro Botticelli ritrovasse la grazia perfetta e Raffaello Sanzio, qui a Firenze, la perfetta bellezza, perchè Galileo Galilei, potesse rivelare da ultimo il pensiero del Dio geometra di Platone.

« Ma io mi accorgo, Signore e Signori, che vi sto facendo un discorso su gli elementi artistici delle scienze, discorso che non è compreso nel programma compilato dal mio illustre collega, il Professore Pincherle.

« Vi chiedo scusa di avere deviato e vi prego di permettermi soltanto di formulare la speranza che voi possiate riportare dalla vostra visita a Firenze il ricordo di una città che non fu soltanto, come dicono le guide, « une ville d'art célèbre », ma anzi, e in tutti i tempi, uno dei fari luminosi della civiltà universale ».

Quindi il prof. Birkhoff dell'Università di Chicago svolge la sua conferenza sul tema « Gli elementi matematici nell'arte ».

L'egregio scienziato americano dimostra con originali concetti come la proporzione matematica sia fondamentale nell'arte, che è poi continua ricerca della simmetria geometrica.

« Per comprendere veramente un'opera d'arte — egli dice — bisogna

Digitized by Google

prima afferrarne l'oggetto, compiendo uno sforzo proporzionale alla sua complessività per averne una percezione esplicita della simmetria ed armonia più o meno nascosta ».

In base a questo principio il prof. Birkhoff si pone la questione di conoscere fino a qual punto la quantità delle relazioni d'ordine, che intercorrono fra gli elementi d'un oggetto artistico, ha rapporto con la complessività dell'oggetto stesso.

Problema ch'egli sottilmente risolve riaffermando l'importanza del fattore geometrico nella comprensione di un'opera artistica poichè l'espressione estetica varia al variare delle dimensioni.

L'illustre conferenziere che ha parlato per circa un'ora fra l'attenzione intensa dell'uditorio, riceve al termine del suo discorso una viva dimostrazione di plauso da parte di tutti gli intervenuti.

Pronunzia quindi alcune parole il prof. Pincherle, presidente del Congresso, ringraziando il Podestà per la gentile accoglienza ricevuta, e tutti i più illustri matematici del mondo che con la loro presenza hanno reso solenne questo congresso.

Annunzia anche che il prossimo congresso avrà luogo a Zurigo nel 1932. Termina auspicando che nuovi legami di cameratismo si vadano stringendo fra gli scienziati moderni per un sempre crescente sviluppo della scienza e della civiltà.

Le parole del prof. Pincherle sono accolte con vivissimi applausi.

La seduta è quindi tolta; un signorile rinfresco, offerto dal Comune di Firenze, riunisce poi i congressisti.

Terminata la cerimonia i congressisti si recano a visitare la interessantissima mostra di rari libri di scienze matematiche, ordinata nello stesso Palazzo Vecchio dal Direttore della Biblioteca Nazionale Comm. Bruschi, e da quello della Biblioteca Laurenziana comm. Rostagno.

Festeggiamenti, doni e agevolazioni.

Ai festeggiamenti del primo incontro dei Congressisti e della Seduta di chiusura di cui già si è fatto menzione, sono da aggiungersi:

Libera circolazione su tutti i tram di Bologna.

Ufficio posta e telegrafo, ufficio Cambio, Salone amplissimo di scrittura con tutte le relative comodità nei locali del Congresso.

A disposizione dei Congressisti le Sale della Casa del Fascio e quelle del Circolo di Cultura.

Ricevimento offerto dal Podestà di Bologna nelle sale del Palazzo Comunale la sera del 5 settembre.

Concerto orchestrale storico di musica italiana al Teatro Comunale la sera del 6 settembre.

Visite a Ravenna, a Ferrara, al Lago di Ledro nel giorno 7

Digitized by Google

settembre con ricevimenti da parte dei Comuni di Ravenna e di Ferrara, Pranzo nella Pineta di Ravenna offerto dal Comune e negli Alberghi di Riva, offerto dal Consorzio Rovereto-Riva.

Pranzo al Littoriale offerto dal Governo l' 8 settembre.

Ricevimento offerto dal Governo la sera dell' 8 settembre, nelle sale del Palazzo Montpensier.

Cenno storico su la Scuola di matematica di Bologna per cura di E. Bortolotti.

Prefazione ai Libri inediti dell' Algebra di R. Bombelli per cura di E. Bortolotti.

Diario delle Sedute delle Sezioni del Congresso.

Distintivo del Congresso, un' artistica medaglia eseguita dallo Stabil· Jhonson su disegno del prof. Borghesani.

Argomenti delle Comunicazioni.

Guida della Città di Bologna e Piccola piantina dei quartieri della città adiacenti agli Istituti universitari.

L' ultima Memoria di Luigi Bianchi: Congruenze di sfere di Ribaucour e Superficie di Peterson (pubblicazione *postuma* per cura di *O. Nicoletti*. Il compianto A. già ne aveva rivedute le bozze e si proponeva appunto di fare omaggio di questo Suo lavoro al presente Congresso).

Annali di Matematica pura ed applicata. Serie IV. Tomo V. Fasc. 4.

Album di 34 fotografie artistiche di monumenti e vedute di Bologna.

Annuario del Circolo Matematico di Palermo.

Bollettino di Matematica. Serie II. Tomo VII. Fasc. III.

..... e non sarà stato ricordato tutto! ossia, involontariamente, saremo certamente caduti in qualche omissione di cui chiediamo venia al solerte Comitato ordinatore e a quanti altri cooperarono perchè il Congresso riuscisse, come riuscì, magnificamente!

Intervenuti.

La Segreteria del Congresso aveva registrato, fin dall' apertura, l' emissione di un migliaio e più di *tessere*, fra Congressisti effettivi e Congressisti aggregati (persone di famiglia dei congressisti effettivi); ma durante i giorni del Congresso il numero dei Congressisti salì ancora, tanto che fu necessaria l' ordinazione di altre 300 medaglie di distintivo dopo le 1100 già consegnate dall' artista prof. Borghesani.

Digitized by Google

A tutto il giorno 8 settembre resultavano presenti, secondo l'elenco compilato dalla Segreteria del Congresso, 617 Congressisti effettivi, dei quali oltre 400 stranieri, ciascuno dei quali aveva seco una o più persone di famiglia quale congressista aggregato.

Noi avemmo il piacere di incontrarci, al Congresso, coi più illustri Matematici delle Università italiane e degli Istituti Superiori Commerciali e Navali: PINCHERLE, VOLTERRA, CASTELNUOVO, LORIA, SEVERI, TONELLI, FUBINI, MARCOLONGO, VIVANTI, LEVI CIVITA, VITALI, BOMPIANI, BORTOLOTTI, BRUSOTTI, CANTELLI, PUPPINI, SIBIRANI, MAIORANA, COMMESSATTI, PICONE, ROSATI, DELL'AGNOLA, DE FRANCHIS, BORDIGA, CIANI, FANTAPPIÈ, GIORGI, SANSONE, AMALDI, MARTINETTI, LAZZERI, LOPERFIDO, FANO, SOMIGLIANA, TRICOMI; coi Comm. prof. PERNA e prof. MINETOLA delegati del Ministero della P. I. e del Ministero dell'Economia Nazionale; colle Colleghe Sig.ne MOSSINI, MAZZELLI, RIPAMONTI, PASTORE, PRAOLINI, SABBATINI, SITTIGNANI, SERAZZI, PALAZZO, BACCIN CRESPI, MADIA e con altre di cui ci è sfuggito il nome; coi Presidi AMALDI, BONAVENTURA, CANDIDO, PODETTI; coi Colleghi Prof.i ARTOM, ASCOLI, CASSINA, GALVANI, MARONI, PADOA, SOLUSTRI, FURLANI, BENEDETTI, RUGGERI, VANNINI, VITALI (junior), VITI, CHERUBINO e con altri di cui ora non ci sovviene; ed avemmo il piacere di rivedere il prof. FEHR, il valoroso direttore dell'*Enseignement Mathématique*, che avevamo conosciuto venti anni fa a Roma; ed avemmo l'onore di parlare con l'illustre prof. YOUNG, con la sua Signora e con la sua figliola, pure buone cultrici della matematica, col prof. ZERVOS dell'Università d'Atene, col prof. SLUTSKY di Mosca, col prof. DU PASQUIER dell'Università di Neuchatel e con altri stranieri, inglesi, polacchi, russi, indiani, cekoslovacchi, dei quali non rammentiamo i nomi.

Impressioni.

Dobbiamo concludere col dire la nostra impressione? Ma essa balza evidente da quanto abbiamo riferito, pur nei limiti angusti del poco spazio disponibile, cioè non abbiamo che da ripetere la parola detta da tutti coloro che parteciparono a questo Congresso: magnifico! magnificamente organizzato! *Congresso dunque riuscitissimo dal lato scientifico, come ancor meglio resulterà dalla pubblicazione degli Atti, e pur dal lato politico, trattandosi come fu fatto notare, più volte, dall'illustre Presidente del Congresso nelle sue felici parole di risposta a Bologna e a Ravenna, del primo Congresso veramente internazionale che si fosse raccolto dopo la guerra. E fu di grande successo politico il dimostrare l'ordine che*

Digitized by Google

regna presentemente in Italia, e il colmare di cortesie gli stranieri, che ne apparvero veramente ammirati!

Ne va data dunque la più ampia lode al Comitato ordinatore, e in modo speciale al Prof. Pincherle che vedemmo occuparsi dei più minuti particolari, perchè tutto si svolgesse nel più perfetto ordine e perchè fossero anzi prevenuti tutti i minimi desideri dei Congressisti.

A Salvatore Pincherle, *pura gloria italiana, anima fervente di patriotta triestino, onore degli studi matematici italiani, Maestro insuperabile, che tanto ha onorato la cattedra del glorioso Studio bolognese, a Lui vada il nostro più vivo plauso per la riuscita magnifica di questo Congresso; e a Lui vada ancora l'augurio fervido che, prossimamente, il Governo Nazionale voglia chiamarlo all'onore del laticlavio!*

Con la morte di Luigi Bianchi *la matematica ha perduto un seggio nell'Alta Camera Vitalizia: Salvatore Pincherle è ben degno di occuparlo!*

29 Settembre 1928 (VI)

Alberto Conti

Un voto del Congresso della Società Italiana pel Progresso delle Scienze

(Torino - Settembre 1928)

Dal *Corriere della Sera* del 22 settembre 1928:

. . . . . .

In rapporto alla relazione che il prof. Severi ha tenuto, nella seduta di mercoledì 19 settembre sulle condizioni attuali delle scienze matematiche, è stato votato dall'assemblea il seguente ordine del giorno.

Si reputa generalmente necessario negli ambienti scientifici che vengano migliorate le condizioni degli insegnamenti di matematica e di fisica nelle scuole medie, non già nel senso di rendere più ampi i programmi d'insegnamento (che potrebbero forse in qualche punto essere ulteriormente sfrondati), ma **nel senso di rendere più efficiente lo svolgimento con orari meglio distribuiti, anche nei riguardi del carico enorme cui sono sottoposti gli insegnanti di matematica e di fisica, ai quali sono affidate troppe e troppo varie classi.**

Provvedimenti di questo genere si impongono anche nell'interesse spirituale della Nazione.

Digitized by Google

S. E. Belluzzo al recentissimo Congresso internazionale dei matematici tenutosi a Bologna, esaltò con parole entusiastiche l'alta funzione delle matematiche nelle scienze applicative; onde è da ritenersi ch'egli esaudirà il voto surriferito.

Siamo sicuri di interpretare il pensiero dei nostri Lettori esprimendo all'illustre prof. SEVERI *la maggiore riconoscenza per aver Egli provocato l'approvazione di questo Ordine del giorno da parte di un'Assemblea così importante, e la cui voce avrà sicuramente eco nelle alte sfere ministeriali.*

CORRISPONDENZA

Copia di una nuova Lettera a S. E. il Ministro della P. I.

30 settembre 1928 (VI)

Eccellenza,

le parole, magnifiche, con le quali l'E. V. inaugurando il recente Congresso internazionale matematico, indicava, in modo scultoreo, tutto ciò che si deve alla matematica e ai cultori di essa, suscitavano le più rosee speranze nei Congressisti italiani e in tutti quegli altri docenti, che pur non avendo avuto la fortuna di sentirle pronunziare, ne avevano preso conoscenza attraverso i resoconti dei giornali.

Queste parole dell'E. V. inspiravano l'importante ordine del giorno approvato, in questi giorni, dal Congresso della Società Italiana per il Progresso delle Scienze, per una revisione degli obblighi, attuali, d'insegnamento e d'orario, dei professori di matematica delle Scuole medie.

Riprendo quindi il concetto fondamentale della lettera che io mi permisi di inoltrare all'E. V. il 23 luglio u. s. e lo riprendo con tanta maggior fiducia dopo una così esplicita manifestazione quale è stata quella fatta dall'E. V. a favore della matematica.

La grande massa dei Lettori del Bollettino di Matematica, a cui nome mi permetto di rivolgermi nuovamente all'E. V., confida che nella elaborazione dei provvedimenti legislativi destinati ad integrare la legge 17 giugno u. s. n. 1314, si presenti l'occasione propizia per l'esaudimento dei voti che questa massa di docenti propugna, in armonia con l'ordine del giorno votato dal Congresso di Torino, per esser posta in grado di assolvere, degnamente, il compito affidatole e per meglio cooperare, così al benefico influsso esercitato dalla matematica in tutti i campi del sapere e delle pratiche applicazioni scientifiche ed industriali.

Col più profondo ossequio

Dell'E. V. dev.mo
ALBERTO CONTI
Direttore del Bollettino di Matematica

Digitized by Google

ESERCITAZIONI MATEMATICHE

È il titolo di un volume che sta per uscire per cura del chiaro Prof. Pietro Tortorici *ord. di Matematica e fisica del R. Liceo Scientifico di Palermo e Libero docente di Analisi infinitesimale nella R. Università di Palermo e con la collaborazione dell'egregio Prof.* Pietro Scirè *del R. Liceo di Fermo. Il volume, particolarmente dedicato ai giovani laureati che si preparano a sostenere i concorsi per le cattedre delle scuole medie, comprenderà una prima serie di cinquanta questioni completamente risolute, tra cui pure alcuni dei temi proposti ai recenti concorsi.*

Il volume si pubblicherà in formato 8° grande.

Il prezzo del volume è di L. **60** *ridotto a L.* **45** *pei soci del nostro Bollettino.*

Per le prenotazioni — sia per proprio conto personale sia per la Biblioteca della propria Scuola — i Lettori sono pregati di dirigere una cartolina-vaglia all'Autore: prof. Tortorici Pietro, Via Garibaldi 50 - Palermo (151), unendo la fascetta del Bollettino per poter fruire della riduzione loro concessa sul prezzo d'acquisto.

La Direzione

***

SOLIDARIETÀ

Tutta la nostra solidarietà ci piace porgere alla gentile collega Prof. Quintili Pierina, vigliaccamente aggredita, in un giorno dello scorso ottobre, a Pavia, nell'aula stessa degli esami di maturità scientifica, dove essa si era recata per un'ultima riunione della Commissione di cui aveva fatto parte.

Ci compiacciamo con essa per lo scampato pericolo, ma ci duole della troppo benevola sentenza pronunziata dalla Magistratura contro quel forsennato, e più ancora ci dolgono i fragorosi battimani con cui i degni amici dell'imputato accolsero, prima la sentenza, e poi l'eroe.... al limitare del carcere da cui la mite sentenza veniva a liberarlo! Il triste episodio suggerirà certamente al Ministero la convenienza di qualche provvedimento che meglio garantisca, per l'avvenire, la incolumità di chi si assume il delicato incarico di Commissario per gli Esami di Stato.

La Direzione

Digitized by Google

INDICE DELL' ANNATA

A) Articoli generali d' indole scientifico-didattici.

ARTOM EMILIO - Sul concetto di rapporto secondo Galileo Galilei Pag. 50
BARLETTA UMBERTO - Sulla discussione delle equazioni parametriche di 2° grado . . . . . » 33
BURNENGO GIUSEPPE - Una genesi uniforme dei luoghi geometrici di primo ordine . . . . . » 98
CAVALLARO VINCENZO - Su una nuova classificazione dei poligoni regolari stellati . . . . . » 65
CHIAPPELLO MATILDE - Sulle varie dimostrazioni elementari del Principio d' identità dei polinomi . . . . . » 20
GUARESCHI GIUSEPPE - Alcune costruzioni elementari di similitudine . . . . . » 133
LO VOI ANTONIO - Il numero *e* e l'estensione del concetto di potenza . . . . . » 53
MARCALETTI MARIA - Intorno all' insegnamento della Storia delle Scienze nella Scuola media . . . . . » 105
MARCOLONGO ROBERTO - La prova scritta nel recente concorso di materie scientifiche nelle Scuole medie inferiori . . . » 121
SERINI ROCCO - Sulla discussione delle equazioni parametriche di 2° grado . . . . . » 101
SIBIRANI FILIPPO - Sul calcolo di certe somme . . . . . » 45
VOLTA LUIGI - La figura di Alessandro Volta un secolo dopo . » 1

B) Piccole Note.

Alcune proprietà metriche della parabola (*A. Chiellini*) . . . Pag. 81
Sulle estrazioni di radice approssimata (*F. Palatini*) . . . . » 114

C) Per la riforma degli ordinamenti scolastici . . . Pag. 40-84

D) Corrispondenza.

Al nuovo Ministro della P. I. . . . . Pag. 117
Una nnova lettera della Direzione del Bollettino a S. E. il Ministro della P. I. . . . . » 161
Dopo l'articolo della Sig.na Chiappello (Osservazioni del prof. LA BARBERA . . . . . » 117

Digitized by Google

E) Necrologio.

Giuseppe Sforza (*La Direzione*) . . . . . Pag. 43
In memoria di Luigi Bianchi (*A. Conti*) . . . . . » 89
» » (*G. Fubini*) . . . . . » 95
In memoria di E. Veneroni . . . . . » 42

F) Congressi.

Congresso Internazionale Matematico . . . . . Pag. 86-118-142
Congresso della Società Italiana pel Progresso delle Scienze . . . . . » 161

G) Varia.

Spigolature: Dall'opuscolo « Pedanterie » di V. Martelli . . . Pag. 118
» : Dalla stampa quotidiana . . . . . » 120
Concorso al premio U. Dini . . . . . » 44
Errata-Corrige (G. Capello) . . . . . » 44
Esercitazioni matematiche di P. Tortorici e P. Scirè . . . . » 162
Solidarietà (La Direzione alla Prof. Quintili) . . . . . » 163

Digitized by Google

Sezione storico-bibliografica

PUBBLICATA PER CURA

DI

GINO LORIA

SOMMARIO del Fasc. 5° - Gino Loria. Note sulla storia della matematica greca. **Recensioni.** Eugenio Bertini. Complementi di Geometria proiettiva (*E. Ciani*). — L. E. Dickson. History of the Theory of Numbers (*G. L.*). — W. Lietzmann. Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen. Beispiele aus der Unterhaltungsmathematik (*G. L.*). — F. Heiland. Sammlung von Aufgaben aus der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Mit 26 Figuren (*G. L.*). — G. Kowalewski. Grundzüge der Differential-und Integralrächnung (*G. L.*). — **Notizie.**

GINO LORIA

Note sulla storia della matematica greca

I. Segmento e Settore sferici in Archimede.

Chi intende risalire alla fonte delle nostre cognizioni intorno alle aree e ai volumi di corpi rotondi deve ricorrere ai due Libri di Archimede *Su la Sfera e il Cilindro*. Ivi sono, fra l'altro, considerati il « segmento sferico », che è la porzione staccata in una sfera da un piano segante e il « settore sferico » che è il pseudo-cono avente per base una zona sferica e per vertice il centro della sfera. Riguardo al primo, il grande geometra dimostra (Lib. I, prop. 42) che è equivalente in superficie a un cerchio avente per raggio il segmento rettilineo condotto dal vertice del segmento sferico a un punto della base; mentre sul secondo fa vedere (Lib. I, prop. 44) che è in volume equivalente a un cono la cui base è equivalente alla zona-base e la cui altezza è il raggio della data sfera. Nessun teorema dell'opera citata insegna l'espressione del volume del segmento sferico. Tuttavia si trovano nella stessa indicazioni sufficienti per chi voglia eseguire il calcolo relativo. Infatti fra i problemi risolti nel II Libro di essa alcuni si riferiscono a segmenti sferici; in particolare quello che reca il n, 4 ha per iscopo di tagliare una sfera mediante un cono per modo che i volumi dei due risultanti segmenti abbiano fra loro un assegnato rapporto ed è chiaro che, per risolverlo, fa mestieri conoscere le espressioni di tali volumi. Ed infatti Archimede virtualmente ottiene il volume del segmento sferico procedendo come segue.

Digitized by Google

Chiamisi R il raggio della sfera su cui si ragiona e a la distanza (supposta inferiore a R) del centro dal piano segante. Applicando il primo dei surriferiti teoremi si vede subito che la superficie della corrispondente zona è data da $2\pi R(R-a)$, mentre il secondo insegna che il volume del corrispondente settore è dato da $\frac{2}{3}\pi R^2(R-a)$. Ora il raggio della base di quella zona ha per quadrato $R^2 - a^2$, perciò il volume del cono che ha stessa base e per vertice il centro della sfera è dato da $\frac{1}{3}\pi a(R^2 - a^2)$; emerge da ciò che il volume S del segmento considerato è dato da:

$$S = \frac{2}{3}\pi R^2(R-a) - \frac{1}{3}\pi a(R^2-a^2) = \frac{\pi(R-a)}{3}(2R^2-a^2-aR) =$$

$$= \frac{\pi(R-a)^2(2R+a)}{3}.$$

Questo risultato può esprimersi dicendo che: « il volume di un segmento minore di un emisfero è equivalente a un cono avente per base un cerchio di raggio eguale all'altezza di questo e per altezza l'apotema aumentata del diametro della sfera ».

Notisi che volendo calcolare similmente il volume S' di un segmento maggiore d'un emisfero si ha:

$$S' = \frac{4\pi R^3}{3} - \frac{\pi}{3}(R-a)(2R^2-aR-a^2) = \frac{\pi}{3}(R+a)^2(2R-a)$$

espressione di cui è evidente la dipendenza da quella dianzi trovata per S.

D'altronde introducendo l'altezza h le due espressioni trovate coincidono nella seguente $\frac{1}{3}\pi h^2(3R-h)$.

Si sarebbe tentati di criticare Archimede per non avere esposto nella sua opera il calcolo esplicito del volume del segmento sferico, ma lo stato dei manoscritti esige la massima circospezione, per non imputare all'autore ciò che è dovuto ad amanuensi in cui l'ignoranza era spesso superata soltanto dalla superba disinvoltura. Tale prudenza è tanto più doverosa in quanto il II dei Libri citati presenta una lacuna, non mai abbastanza deplorata. La s'incontra appunto nella soluzione del succitato problema (Lib. II, prop. 4). Per chiarire in che consista indichiamo con $1/m$ il rapporto (che supporremo < 1) dei volumi delle due parti in cui si vuol tagliare una sfera di raggio R con un piano che stia alla

Digitized by Google

distanza x dal centro; tale condizione equivale al dovere essere $= \frac{l}{l+m}$ il rapporto del minore dei segmenti cercati all'intera sfera; il problema si traduce, quindi, nell'equazione:

$$\frac{\pi(R-x)^2(2R+x)}{3} : \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{l}{l+m}$$

ossia

$$(R-x)^2(2R+x) = \frac{4l}{l+m} R^3$$

e finalmente

$$x^3 - 2R^2x + 2\frac{l-m}{l+m} R^3 = 0.$$

Ora Archimede promette bensì di risolvere il problema equivalente a questa equazione, ma nei fogli da lui relitti la si cerca indarno.

Un'ultima osservazione. Mentre, come dicemmo, Archimede non dà l'esplicita espressione del volume di un segmento sferico, non ha mancato di stabilire l'analoga per la corrispondente figura dell'ellissoide rotondo. Infatti nella prop. 31 dell'altra sua opera *Sopra i conoidi e gli sferoidi* egli istituisce il paragone fra il volume del segmento determinato da un piano perpendicolare all'asse di un ellissoide di rotazione e il cono di egual base e di eguale altezza. Ora per vedere se questo risultato sia o meno in accordo con la espressione trovata per S, notiamo che il volume V del cono avente la stessa base e la stessa altezza del segmento sferico considerato è dato dalla formola seguente:

$$V = \frac{\pi}{3}(R-a)^2(R+a)$$

per conseguenza:

$$\frac{S}{V} = \frac{2R+a}{R+a}$$

e questa relazione rientra in quella stabilita nel c. l. dall'antico geometra.

II. Il cosidetto " Teorema di Talete „.

Nell'elenco dei matematici Greci, Talete occupa il primo posto, perchè, a quanto viene concordemente riferito, sostituì alle

Digitized by Google

poche proprietà avvertite empiricamente nelle figure geometriche dagli astrologi babilonesi e dai geodeti egiziani, alcune proposizioni capaci di destare l'interesse soltanto di spassionati contemplatori del vero, Sono a lui attribuite le seguenti proposizioni:

I. Ogni cerchio è bisecato da un suo diametro.

III. Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono fra loro eguali.

III. Gli angoli opposti al vertice sono fra loro eguali.

Nessuno riferisce i ragionamenti con cui egli stabiliva la verità; ma è facile vedere che allo scopo poteva servire il metodo di sovrapposizione, cioè quel proeedimento sperimentale che da taluno viene presentato sotto l'aspetto di un « piegamento della carta » (1). Allo stesso filosofo viene attribuita la conoscenza del fatto che è retto un angolo inscritto in una semicirconferenza, donde fu tratta la conseguenza che egli conoscesse che la somma degli angoli di un triangolo è uguale a due retti. A lui sono ancora attribuite le soluzioni dei seguenti problemi:

I. Determinare l'altezza di una piramide.

II. Determinare la distanza di una nave dal porto supponendo questa visibile dal porto stesso.

Entrambi si possono risolvere senza ricorrere alla similitudine dei triangoli (2). Ad esempio, riguardo al primo, si può scioglierlo applicando l'osservazione che in uno stesso istante della giornata tutti gli oggetti projettano un'ombra eguale alla loro altezza e tale istante si può determinare agevolmente infiggendo un bastone nel terreno e descrivendo una circonferenza col centro nel punto d'immissione e con raggio eguale alla lunghezza del bastone usato. Altri invece suppose che quel problema venisse risolto applicando l'osservazione che in un istante qualunque della giornata è costante il rapporto fra l'altezza di un oggetto e l'ombra da esso projettata. Ciò suppone in Talete la conoscenza, almeno in un caso speciale, del teorema che afferma la proporzionalità dei lati di due triangoli equiangoli: da ciò la spiegazione del nome dato dal Cournot (3) di « teorema di Talete » alla proposizione surriferita.

Si può certamente nutrire qualche ragionevole dubbio sulla

---

(1) Cfr. T. Sundara Row: *Geometrie Exercises in Paper Folding* (Chicago, 1905).

(2) V. *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, II ed. (Milano, 1914) p. 19-20.

(3) In vari passi dell'opera *De l'origine et des limites de la correspondance entre l'algèbre et la géométrie* (Paris, 1847).

Digitized by Google

legittimità del sistema di attribuire a un autore la conoscenza generale di una proposizione da lui applicata in un solo caso speciale. Ma che il nome di Talete venga annesso a una proposizione così raffinata, così lontana dall'intuizione e dalla pratica, quale è quella che afferma la proporzionalità delle punteggiate determinate sopra due rette concorrenti da un fascio di rette parallele, è cosa che può destare la meraviglia anche in chi abbia constatato come frequentissimi siano, in matematica, i casi di paternità illegittime.

Per concludere, se il detto nome viene dato alla surriferita proposizione *in onore* di Talete, come si dà il nome di un grande personaggio a una via, alla costruzione della quale egli non ebbe parte alcuna, trattandosi di questione sentimentale, si può accettarla o respingerla, ma è impossibile discuterla al lume di dati storici; ma chi adotti questo criterio deve dichiararlo chiaramente, onde non aumentare le giá numerose imperfezioni della nomenclatura matematica.

RECENSIONI

EUGENIO BERTINI - *Complementi di Geometria proiettiva*. Bologna, N. Zanichelli, 1928. p. VIII + 361. Prezzo L. 60.

1. — Più che che un libro di *Complementi di Geometria proiettiva* è da riguardare questo bel volume (di cui mi accingo a dar contezza ai lettori del nostro Bollettino) come una vera e propria introduzione a quel complesso di dottrine che si trattano, nelle nostre Università sotto il titolo di Geometria Superiore ed hanno per iscopo la interpretazione geometrica delle equazioni algebriche. Premetto dunque che, nell'attuale ordinamento dei nostri Studi Universitari di Matematica, non mi pare che il contenuto del libro possa adattarsi ad alcun corso del primo biennio di tali studi, ma che invece trovi il suo posto più utile e più naturale nel secondo biennio quale primo capitolo di Geometria Superiore e quindi quale degna preparazione ai corsi monografici, oggi tanto in voga, di geometria sulle curve e sulle superficie algebriche.

2. — L'opera è divisa in dodici capitoli. Nel primo l'A. dopo avere richiamato le nozioni di Geometria proiettiva inerenti alla

Digitized by Google

proiettività, fra forme di prima specie, identificandola a una sostituzione lineare binaria, a modulo non nullo, estende queste nozioni agli enti ∞' razionali e passa al concetto più ampio di corrispondenza algebrica (mn) definita da una relazione del tipo $\Sigma a_{rs} x^r y^s = 0$; $(r = 0, 1, 2, \ldots m\ ,\ s = 0, 1, 2, \ldots . n)$ dove $a_{r,s}$ sono costanti e x, y cordinate (non omogenee) di punti corrispondenti sopra i due enti, i quati vengono a essere così riferiti secondo la suddetta corrispondenza. Dal computo delle costanti effettivamente indipendenti che figurano nella precedente equazione, l'A. desume il numero $mn + m + n$ di coppie di punti corrispondenti che individuano la corrispondenza.

Nel caso che i due enti sieno sovrapposti, si presenta spontaneamente il problema degli elementi uniti e quindi il celebre principio di corrispondenza di Chasles che stabilisce il numero di questi elementi in $m + n$. Se inoltre la relazione in parola è simmetrica in x e y (il che richiede $m = n$, $a_{rs} = a_{sr}$) il numero delle coppie individuanti la corrispondenza si riduce a $\frac{m(m+3)}{2}$ e quello dei punti doppi a $2m$ (per $m = 1$ si ha la ordinaria involuzione) e si ha allora il sistema simmetrico. Quando questo non accada, ma i sostegni sieno sempre sovrapposti è interessante di conoscere il numero delle coppie involutorie (senza che tutte lo sieno) stabilito dall'A. in $\frac{n(n-1) + m(m-1)}{2}$.

3. — Le cose più notevoli del capitolo 2° riguardano la proiettività fra forme di 2ª e 3ª specie e fra queste, particolarmente, le correlazioni involutorie.

L'A. ponendosi il problema relativo, contemporaneamente nel piano e nello spazio, trova nel piano il solo caso della polarità rispetto ad una conica; nello spazio invece, al caso, per così dire parallelo, della polarità rispetto ad una quadrica, viene ad aggiungersi il sistema nullo di Moebius. L'A. mette bene in evidenza il fondamento algebrico di questa differenza, dipendente dal fatto che un determinante emisimmetrico è sempre nullo se è di grado dispari ed è invece diverso da zero se il grado è pari. Seguono le proprietà più importanti del sistema nullo riguardanti le coppie di rette reciproche, le rette unite ecc. ecc. le quali proprietà verranno di poi collegate alla teoria della cubica gobba e a quella dei complessi lineari. Il capitolo si chiude con la estensione delle proiettività, fra forme di 2ª e 3ª specie, ai sistemi lineari di curve e di superficie algebriche, in vista specialmente delle applicazione relative che l'A. si propone nel seguito.

Digitized by Google

4. — Il capitolo terzo è destinato allo studio della cubica gobba ed alla quartica gobba di 1ª specie ed è uno dei più interessanti di tutto il libro.

La definizione proiettiva della cubica gobba adottata dall'A. è quella di Seydewitz mediante due stelle collineari. Premessi alcuni casi particolari in cui la curva si spezza, l'A. passa al caso generico della cubica irriduttibile e comincia dall'osservare che per un punto generico passano due piani corrispondenti delle due stelle la cui intersezione è manifestamente una corda della curva. Dunque la proiezione piana della curva, da un punto generico, ha un punto doppio ove la corda suddetta incontra il piano di proiezione. A seconda poi che i punti di appoggio della corda (con la curva) sono reali distinti, reali coincidenti, o immaginari coniugati, il punto doppio in parola è rispettivamente un nodo, o una cuspide, ovvero un punto isolato. Se invece di fare la proiezione da un punto generico, la si fa da un punto della curva, la proiezione è una conica. Rappresentando le due stelle collineari nel modo consueto

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0 \ , \ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$

dove le u_i, v_i, sono lineari omogenee nelle coordinate di punto, l'A. è tratto a considerare la curva quale luogo del punto comune ai piani corrispondenti dei tre fasci proiettivi.

$$u_1 - \lambda v_1 = 0 \ , \ u_2 - \lambda v_2 = 0 \ , \ u_3 - \lambda v_3 = 0 \ , \qquad (1)$$

da cui è breve il passo a dimostrare che i centri delle stelle in parola non sono punti speciali della curva generata, che cioè la curva può esser generata collocando i centri delle stelle collineari in due punti qualunque di essa.

Eliminando il parametro λ fra le (1) precedenti si viene a riconoscere che la curva giace sulle tre quadriche

$$u_1 v_2 - u_2 v_1 = 0 \ , \ u_2 v_3 - u_3 v_2 = 0 \ , \ u_3 v_1 - u_1 v_3 = 0$$

e quindi su qualsiasi quadrica della rete seguente

$$\mu_1 (u_1 v_2 - u_2 v_1) + \mu_2 (u_2 v_3 - u_3 v_2) + \mu_3 (u_3 v_1 - u_1 v_3) = 0$$

e si ha così la totalità delle quadriche passanti per la curva, la quale dunque così apparisce come parte residua delle intersezioni di due quadriche aventi una retta in comune, onde consegue subito la nota rappresentazione parametrica della cubica. Con opportuna scelta degli elementi di riferimento, tale rappresentazione assume la forma canonica dalla quale l'A. desume l'equazione del piano osculatore e conseguentemente la rappresentazione analitica del sistema nullo (N. 3) che la curva individua.

Digitized by Google

Dalla considerazione della cubica gobba, quale parziale intersezione di due quadriche, l'A. è tratto allo studio di tale intersezione quando essa è irriduttibile, cioè quando essa sia la quartica gobba di 1ª specie curva-base di un fascio di quadriche. Siccome l'A. svilupperà in seguito (nel capitolo 16) la teoria del complesso tetraedrale, così Egli coglie l'occasione adesso di associare, ad ogni punto dello spazio. l'asse del fascio dei piani polari del punto rispetto a tutte le quadriche del fascio suddetto, o dualmente, ad ogni piano, la retta luogo dei poli del piano rispetto alle quadriche di una schiera. Si perviene così a un sistema ∞^3 di rette componenti ciò che in seguito sarà chiamato un complesso tetraedrale. La ricerca dei coni appartenenti al fascio delle quadriche in discorso, conduce l'A. a mettere in evidenza particolare il tretraedro autoconiugato rispetto alle quadriche del fascio e tutta la interessante configurazione collegata alla quartica base e avente per nucleo il tetraedro suddetto. Infine l'esame di alcuni casi particolari notevoli, inerenti al fascio, chiude l'interessante capitolo.

5. — È noto quanto giovi a semplificare lo studio delle sezioni circolari, degli ombelichi e dei fuochi delle quadriche la considerazione dell'assoluto dello spazio. A questo studio l'A. destina il capitolo 4° con trattazione elegantemente sintetica. Prendendo le mosse dalla nozione di assoluto, nel piano, stabilita dalla Geometria analitica, l'A. passa a considerare il luogo di tutti i punti ciclici dello spazio pervenendo così al cerchio immaginario all'infinito (assoluto dello spazio) e trasformando tutte le relazioni di ortogonalità in altrettante relazioni di coniugio rispetto al cerchio suddetto. Seguono quindi le applicazioni alle quadriche.

La prima riguarda gli assi: indicando con C e C_∞ rispettivamente la sezione del piano all'infinito con la quadrica che si vuole considerare e l'assoluto dello spazio, resulta subito che il triangolo diagonale del quadrangolo formato dai 4 punti comuni a C e C_∞ è autoconiugato rispetto a entrambe e quindi la proiezione di tal triangolo, fatta dal centro della quadrica, fornisce, nel modo il più rapido, il triedro degli assi cercato. La condizione poi perchè la quadrica sia di rotazione si esprime facilmente esigendo che C e C_∞ sieno fra di loro bitangenti.

Passando alla ricerca delle sezioni circolari, basta osservare che la sezione della quadrica con un piano sarà un cerchio se la retta all'infinito del piano passerà per due dei quattro punti comuni a C e C_∞. Ecco così trovati i sei fasci di piani (ad asse improprio) seganti la quadrica secondo cerchi: due soli sono reali,

Digitized by Google

perchè i quattro punti suddetti si dividono in due coppie AA', BB' ciascuna costituita da punti immaginari coniugati e quindi soltanto i piani passanti per AA', BB' dànno i due fasci reali. Tutto questo vale per le quadriche centrali. Nel caso dei due paraboloidi occorre tener presente che la C si compone di due rette reali per il paraboloide iperbolico (sul quale dunque non esistono sezioni circolari), di due rette immaginarie coniugate per il paraboloide ellittico (sul quale invece si troveranno due sistemi di tali sezioni prodotte da piani di due fasci ad assi improprio). In ogni caso poi le rette polari reciproche degli assi di questi fasci impropri servono alla determinazione (o meno) degli ombelichi.

In modo analogo vengono considerati i fuochi delle quadriche. L'A. osserva che un punto dello spazio (riguardato come vertice di un triedro trirettangolo e autoconiugato rispetto ad una quadrica) può presentare i seguenti casi: o esiste un solo di tali triedri, o ne esistono ∞' senza che lo siano tutti, o lo sono tutti. Nel 1° caso il punto ha posizione generica rispetto alla quadrica, nel 2° caso esso è un fuoco, nel 3° caso esso è un fuoco principale e la quadrica è di rotazione. Va da sè, bens' intende, il caso della sfera in cui ogni punto è fuoco principale. Se la quadrica è generica i fuochi sono ∞' e il luogo di essi si compone delle coniche focali della superficie.

6. — La tendenza dell'A. già manifestata in varie occasioni nei capitoli precedenti, di riunire le proprietà di Geometria piana a quella di Geometria dello spazio quando esse siano affidate al medesimo ordine di considerazioni, si accentua e diviene metodica in tutto il contenuto del capitolo 5°. Così, uguagliando a zero una ternaria, od una quaternaria, viene a rappresentarsi una curva, od una superficie, quale luogo dei punti le cui coordinate omogenee soddisfano la equazione che in tal modo si ottiene. Associando a tale equazione la rappresentazione analitica di una retta si deduce la definizione geometrica dell'ordine della curva, o della superficie.

Indicandolo con n, se esiste un punto tale che sopra ogni retta passante per esso sieno ivi assorbite r intersezioni ($r < n$) con la curva, o con la superficie, il punto sarà r^{-plo}; due curve piane degli ordini m ed n hanno in comune mn punti: tre superficie degli ordini m, n, p hanno in comune mnp punti. Il computo dei coefficienti che figurano in una ternaria, od in una quaternaria, serve a fissare il numero dei punti individuanti una curva piana, ovvero una superficie, tenendo conto (al riguardo) anche dei relativi casi di eccezione. Dopo di che l'A. presenta la definizione

Digitized by Google

algebrica dell'operazione di polarità di una forma $f_n = 0$ rispetto a un nuovo sistema di variabili y_i da cui seguono le proprietà fondamentali delle successive curve e superficie polari di un punto rispetto alla forma fondamentale e all'ente geometrico da esse rappresentato. Queste polari servono poi ad un primo studio intorno alla singolarità ordinarie delle curve piane e superficie ed anche a qualche esempio di singolarità straordinarie (ad esempio, nel caso delle curve piane, l'A. s'indugia a considerare quello in cui non tutte le tangenti agli r rami di un punto $r-$[illegible] sono distinte, ma più, o meno, variamente raggruppate).

7. — Nel capitolo sesto, l'A. comincia dal determinare la classe di una curva piana e di una superficie nel caso più semplice in cui non esistono punti singolari, passando di poi a qualche esempio meno semplice in cui tali punti esistono e spiegando così il famoso paradosso di Poncelet riassunto dall'A. nel modo il più espressivo allorchè afferma e dimostra che « *luogo e inviluppo aderenti non possono essere contemporaneamente generici* ». Il rimanente del capitolo è destinato esclusivamente alle curve piane, per le quali l'A. stabilisce le formule di Plücker e la nozione di genere dimostrando che, se la curva è irriduttibile, il genere è sempre positivo, o nullo, nel quale ultimo caso la curva è razionale, cioè la sua rappresentazione parametrica si fa con funzioni razionali. Tutte queste nozioni vengono poi applicate al caso particolare delle cubiche piane. Dalla nota proprietà che individua la satellite di una retta qualsiasi, l'A. è tratto al caso particolare in cui la retta è satellite di se stessa, da cui resulta immediatamente che la congiungente di due flessi ne contiene necessariamente un terzo e quindi l'esistenza di dodici tali rette lati dei quattro trilateri sizigetici, Degna di rilievo è la dimostrazione semplice e rigorosa che tre soltanto dei nove flessi sono reali (a differenza di altre, destinate allo stesso scopo, poco rigorose e contenute in qualche trattato ormai classico).

La considerazione dell'Hessiana conduce l'A. a quella del fascio sizigetico al quale appartengono i quattro trilateri dianzi nominati. Fin qui l'A. ha esposto il caso delle cubiche ellittiche (genere uno) ma alla fine del capitolo vengono presentate anche le proprietà principali delle cubiche nodali e cuspidali.

8. — Scopo principale del capitolo settimo è la dimostrazione delle formole di Cayley per le curve gobbe, alle quali l'A. ne aggiunge una, veramente notevole, che collega il numero dei punti doppi apparenti con l'ordine e col numero delle trisecanti della

Digitized by Google

curva uscenti da un punto e che l'A. desume dall'uguagliare due diverse espressioni del genere.

Le formule di Cayley servono poi all'A. a trovare le relative caratteristiche della quartica di 1ª specie di cui un primo cenno è già dato nel Capitolo quarto e che qui si completa con altre più interessanti proprietà. Ad esempio: la linea doppia della sviluppabile osculatrice si compone di quattro quartiche piane situate nelle quattro facce del tetraedro autoconiugato rispetto alla curva e aventi ciascuna tre punti doppi nei tre vertici del tetraedro che sono situati sulla faccia in cui giace; i sedici piani piani stazionari si organizzano in quattro quaderne di piani tangenti ai quattro coni che biproiettano la curva dai vertici del tetraedro suddetto ecc.

La quartica di seconda specie viene presentata dall'A. quale residua intersezione fra un cono cubico con una generatrice doppia e una quadrica passante per tale generatrice. L'A, ne calcola prima le caratteristiche Cayeleyane, poi dimostra la razionalità della curva, l'esistenza delle tre corde principali convergenti in un punto ecc. ecc.

Sulla fine del Capitolo l'A. ritorna al caso generale di una curva gobba facendo vedere che essa si può sempre riguardare come parte della intersezione di un cono che la proietta da un punto qualunque dello spazio, con un monoide che ha il vertice nel punto suddetto.

9. — Nel Capitolo ottavo l'A. svolge le proprietà essenziali della trasformazione quadratica piana considerando le curve che in essa si corrispondono e ponendo bene in evidenza il principio così fecondo pel quale da proprietà conosciute dell'una curva, si deducono proprietà nuove della trasformata E forse a questo punto sarebbe stato utile qualche esempio, anche semplice, di scomposizione di un punto multiplo di una curva attuata mediante una trasformazione quadratica e al quale accenna appena l'A. a piè di pag. 186. Seguono due costruzioni della trasformazione in parola dovute a Seydewitz e a Steiner non che l'esame di casi particolari in cui i punti fondamentali vengono infinitamente vicini E finalmente una applicazione veramente interessante della trasformazione quadratica è un'altra generazione della quartica di prima specie mediante i punti d'incontro dei raggi corrispondenti di due stelle fra le quali è istituita una corrispondenza quadratica (che si può ottenere, nel modo il più semplice, proiettando una corrispondenza quadratica piana, da due punti esterni al piano).

Digitized by Google

Il capitolo si chiude considerando i casi involutori della corrispondenza quadratica piana e cioè la inversione per raggi vettori reciproci e quella fra punti coniugati rispetto alle coniche di un fascio.

10. — La proiezione stereografica di una quadrica è l'oggetto principale del capitolo nono. L'A. comincia dal caso più generale in cui il centro di proiezione è un punto esterno alla quadrica. Allora la sua rappresentazione si attua sopra un piano doppio di cui è curva di diramazione la proiezione del contorno apparente. Più importante è il caso della proiezione stereografica vera e propria quando cioè il centro di proiezione è sulla quadrica (chè allora la rappresentazione è biunivoca). Essa può specializzarsi ulteriormente, dal punto di vista metrico, assumendo il piano di proiezione parallelo al piano tangente alla superfice nel centro di proiezione. Se la quadrica è una sfera accade, com'è ben noto, che un cerchio di essa si proietta in un cerchio del piano e che la proiezione conserva gli angoli: si suol dire allora che la rappresentazione è conforme, o isogonale.

Ritornando poi al caso generico della proiezione stereografica propriamente detta, l'A. considera in modo speciale le quartiche situate sulla superficie obbiettiva, ritrovando per questa via altre proprietà notevoli inerenti a tali curve; ad esempio, la esistenza delle quattro tangenti-secanti della quartica di seconda specie ecc. ecc.

Particolarmente interessante è il caso speciale, già studiato da Cremona, in cui la quartica di seconda specie possiede due rette osculatrici a causa dei due sistemi nulli che essa genera e per la esistenza di infinite corde principali.

11. — Il capitolo decimo è dedicato esclusivamente alle superficie rigate di terzo grado. L'A. comincia dal mettere in evidenza le due direttrici rettilinee (la doppia e la semplice) della superficie e dal dimostrare che due coniche proprie situate su di essa hanno sempre un punto comune ed uno solo, onde si possono ottenere le principali generazioni della superficie medesima mediante il movimento di una retta che si appoggia a tre direttrici fisse sfruttando il noto teorema del Salmon che stabilisce il grado della superficie così generata.

I casi considerati dall'A. sono i seguenti:

a) due rette sghembe ed una conica appoggiata in un punto a una delle rette;

b) due coniche ed una retta aventi a due, a due, un punto in comune;

Digitized by Google

c) una cubica gobba, una sua unisecante ed una sua bisecante;

d) una quartica di 2ª specie, una sua bisecante ed una sua trisecante.

Naturalmente nell'applicare il teorema di Salmon, bisogna tenere il dovuto conto dei coni che si staccano dalla superficie totale generata e che hanno il vertice in ciascuno dei punti comuni a due direttrici.

Se poi si esige che la retta mobile incontri due volte la stessa direttrice, il numero delle direttrici può ridursi a due assumendo ad esempio come tali una quartica di seconda specie ed una sua corda. Allora la retta mobile è vincolata a incontrare due volte la quartica e una volta la corda.

Altre due gnerazioni notevoli della superficie presenta l'A. mediante corrispondenze proiettive. L'una si ottiene riferendo proiettivamente una conica ed una retta (che sia esterna al piano della conica). La superficie è generata dalle rette che congiungono punti corrispondenti della retta e della conica. Se queste ultime hanno un punto in comune, si ottiene il caso-limite (segnalato da Cayley) nel quale le due direttrici rettilinee dellà superficie generata coincidono. L'altra generazione, mediante proiettività, consiste nel riferire proiettivamente due fasci di piani di cui uno semplice e l'altro doppio involutorio: la superficie si ottiene come luogo della rette comuni a piani corrispondenti dei due fasci. Quest'ultima generazione ha il vantaggio di mettere in evidenza due generatrici singolari della superficie (a carattere sviluppabile) che sono le intersezioni dei piani doppi del fascio involutorio con i piani corrispondenti del fascio semplice.

La trattazione esclusivamente sintetica, tenuta fin qui, sull'argomento, dal nostro A., cede poi il passo a quella analitica con l'assegnare varie forme delle equazioni (rappresentante la superficie) semplificate da particolari disposizioni del tetraedro di riferimento, così da potere concludere la identità proiettiva di tutte le superficie in parola (purchè abbiano le due direttrici rettilinee distinte).

Il capitolo termina con la rappresentazione piana della superficie e il conseguente studio delle curve tracciate sopra di essa.

12. — Alle superficie cubiche rigate trattate precedentemente, fa seguito (nel capitolo undecimo) lo studio delle superficie cubiche generali. L'esistenza delle 27 rette è desunta alla maniera di Sturm: segue quella dei 45 piani tritangenti. Le interessanti

Digitized by Google

configurazioni che ne nascono vengono studiate dall'A. mediante la rappresentazione piana della superficie ottenuta, come per la superficie rigata, mediante due rette sghembe fisse di essa, con la retta mobile che, partendo da un punto generico della superficie e appoggiandosi alle rette fisse suddette, specchia il punto suddetto laddove essa incontra il piano rappresentativo. Vengono così messi in luce i principali aggruppamenti delle 27 rette fra cui le 36 bissestuple di Schläfli. Di poi l'A. stabilisce la esistenza di superficie cubiche con le 27 rette tutte reali e, dopo qualche semplice considerazione intorno alle quartiche di 1ª e 2ª specie tracciate sulla superficie, passa alle due generazioni proiettive di essa dovute a Steiner e a Grassmann: la prima come luogo delle coniche comuni a due fasci proiettivi di piani e di quadriche, la seconda come luogo del punto d'incontro dei piani corrispondenti di tre stelle collineari.

13. — Nel capitolo 12° lo studio della superficie cubica generica è desunto da un sistema lineare ∞^3 di cubiche piane riferite proiettivamente ai punti dello spazio, il che dà modo all'A. di considerare anche i casi particolari dei punti doppi della superficie. Il caso massimo è quattro (ben s'intende senza che ve ne siano infiniti, cioè senza cadere nella superficie rigata). Esso è realizzato dalla duale della nota superficie Romana di Steiner, cosicchè dalla rappresentazione piana della prima, l'A. desume quella della seconda e le sue più importanti ed espressive proprietà, Il capitolo ha termine con lo studio della superficie dotata di un punto uniplanare la quale gode della proprietà di avere coincidenti in una sola le 27 rette, ne è possibile generarla (come ha dimostrato Segre) mediante tre stelle collineari.

14. — Argomento principale del capitolo 13° sono le asintotiche delle superficie rigate cubiche e della superficie di Steiner. L'A. si serve ingegnosamente di sistemi lineari di coniche-luogo e coniche-inviluppo coniugati per ritornare sulla rappresentazione piana delle superficie in discorso e dedurne le proprietà delle asintotiche. Per la superficie cubica rigata (a direttrici rettilinee distinte) Egli trova che le asintotiche (non rettilinee) sono quartiche di 2ª specie con due rette osculatrici (N. 10) che sono le generatrici singolari della superficie (N. 11): le asintotiche sono cubiche gobbe. Per la superficie di Steiner, l'A. ritrova (com'è ben noto) che le asintotiche sono quartiche di 2ª specie. L'A. nota infine due casi particolari della superficie di Steiner allorchè due delle rette doppie della superficie coincidono. Le asintotiche

Digitized by Google

relative sono quartiche di 2ª specie con due rette osculatrici coincidenti, o quartiche con una cuspide nel punto triplo della superficie.

15. — I tre rimanenti capitoli sono dedicati alla geometria della retta e compongono la parte più interessante di tutto il libro. L'A. segue il noto indirizzo di Plücker. Egli comincia (nel capitolo quattordicesimo) a definire le p_{ik} coordinate omogenee di retta mediante i determinanti

$$p_{ik} = \begin{vmatrix} x_i & x_k \\ y_i & y_k \end{vmatrix} \quad i, k = 1, 2, 3, 4 ,$$

dove $x_1 x_2 x_3 x_4$, $y_1 y_2 y_3 y_4$ sono le coordinate di due punti della retta. Si hanno così dodici p_{ik} a due, a due uguali ma di segno contrario. Esse quindi possono ridursi a sei che abitualmente si scelgono così

$$p_{12}, p_{23}, p_{31}, p_{14}, p_{24}, p_{34}$$

legate dalla relazione

$$p_{12}p_{34} + p_{23}p_{14} + p_{31}p_{24} = 0 \qquad (1)$$

Se le p_{ik} variano proporzionalmente la retta non varia.

Non esiste alcuna retta che abbia nulle tutte le p_{ik}.

Viceversa, l'A. osserva come dati sei numeri p_{ik} (non tutti nulli) soddisfacenti alla relazione (1) precedente, esista una, ed una sola retta le cui coordinate sono i sei numeri suddetti. Essi dunque hanno tutti i requisiti richiesti per potersi assumere come coordinate omogenee di retta nello spazio.

Valgono le considerazioni duali per cui si trovano altri sei numeri q_{ik} desunti dalle coordinate di due piani passanti per la stessa retta. Le p_{ik} sono proporzionali alle q_{ik} nella forma seguente

$$\frac{p_{12}}{q_{34}} = \frac{p_{23}}{q_{14}} = \frac{p_{31}}{q_{24}} = \frac{p_{14}}{q_{23}} = \frac{p_{24}}{q_{31}} = \frac{p_{34}}{q_{12}} .$$

e quindi le q_{ik} possono essere rimpiazzate dalle p_{ik} secondo la proporzionalità sopra indicata. La condizione d'incidenza di due rette (p_{ik}) (p'_{ik}) si rappresenta con la equazione

$$p_{12}p'_{34} + p_{23}p'_{14} + p_{31}p'_{24} + p_{14}p'_{23} + p_{24}p'_{31} + p_{34}p'_{12} = 0$$

che diviene la (1) se le due rette coincidono.

16. — Il capitolo quindicesimo è destinato allo studio dei complessi e congruenze lineari. Vincolando le coordinate p_{ik} con una equazione di primo grado, si ha la rappresentazione analitica di un complesso lineare da cui segue immediatamente che le rette del complesso passanti per un punto stanno in un piano e

Digitized by Google

viceversa, quelle che stànno in un piano passano per uno stesso punto. Nasce così una corrispondenza fra i punti e i piani dello spazio che è un sistema nullo (N. 3 e 4). Le rette doppie del sistema nullo sono tutte e sole quelle del complesso. Le rimanenti si distribuiscono in coppie di rette polari reciproche rispetto al sistema in parola. Due tali coppie appartengono ad una stessa serie rigata: la serie rigata coniugata è costituita, per intiero, da rette del complesso. Si ottengono così infinite serie rigate appartenenti al complesso il quale viene ad essere autopolare rispetto alla qudrica sostegno delle due serie suddette. Segue la generazione di un complesso lineare, mediante due punteggiate proiettive, come luogo di una retta tale che proiettando da essa le due punteggiate si ottengano due fasci di piani involutori (Aschieri). Ad un breve ma succoso cenno sopra le proprietà metriche dei complessi lineari, l'A. fa seguire le nozioni più importanti sopra le congruenze lineari rappresentando una congruenza lineare mediante due equazioni lineari nelle coordinate p_{ik}. In tal guisa una congruenza lineare apparisce come costituita da tutte le rette appartenenti a due complessi lineari e anche a tutti quelli del fascio che essi individuano (congruenza-base). Ne segue che le rette di una tal congruenza si possono sempre riguardare come costituite da quelle appoggiate a due rette fisse sghembe che non sono altro che gli assi dei due complessi speciali del fascio. L'A. presenta anche la definizione di complessi coniugati esigendo l'annullarsi del loro invariante simultaneo e da questa (che è condizione puramente algebrica) l'A. passa alla condizione geometrica equivalente che si esprime esigendo la invarianza dell'un complesso rispetto al sistema nullo individuato dall'altro.

Il capitolo si chiude con un cenno sopra le congruenze algebriche generali, stabilendo la nozione di superficie focale quale luogo dei fuochi e inviluppo dei piani fuocali.

17. — Nell'ultimo capitolo l'A. presenta al lettore lo studio di qualche complesso quadratico scegliendo i più semplici e i più adatti all'indole e allo scopo del libro.

Premessa la definizione di complesso generale di ordine n, di cono-complesso col vertice di un punto e di curva-complesso in un piano, l'A. passa al complesso tetraedrale (particolare complesso di 2° ordine) definito geometricamente dalle rette che segano le 4 facce di un tetraedro secondo un birapporto costante. Introducendo poi la nozione di superficie singolare di un complesso quadratico, l'A. osserva che, nel caso attuale, tale superficie è

Digitized by Google

costituita dal tetraedro suddetto e precisamente dalle sue facce come luogo dei punti i cui coni-complesso si spezzano in due piani e dai suoi vertici come inviluppo dei piani le cui coniche-complesso si compongono di una coppia di punti. Seguono alcune generazioni del complesso mediante proiettività binarie, ternarie e quaternarie e precisamente:

a) Con proiettività binarie, mediante due fasci proiettivi di raggi (in piani diversi) riguardando il complesso delle rette che si appoggiano a raggi corrispondenti dei due fasci,

b) Con proiettività ternarie, mediante una stella e un piano proiettivi e riguardando il complesso delle rette che dai punti del piano si appoggiano ai raggi corrispondenti della stella,

c) Con proiettività quaternarie, congiungendo i punti corrispondenti in una collineazione spaziale.

Un ultima generazione del complesso in parola viene considerata dall'A. mediante le rette polari dei punti dello spazio rispetto alle quadriche di un fascio (N. 4).

Un secondo complesso quadratico segnalato dall'A. è costituito da tutte le tangenti di una quadrica di cui l'A. scrive la equazione in coordinate di retta.

Infine, l'ultimo esempio addotto è quello di Battaglini caratterizzato dal fatto che nella equazione relativa compariscono soltanto i quadrati delle coordinate p_{ik}. Questo e il tetraedrale sono i soli complessi quadratici invarianti rispetto al gruppo delle collineazioni involutorie individuate da un tetraedro. L'A. chiude questo interessante capitolo dando le due principali generazioni del complesso di Battaglini: quella dovuta a Segre e così detta, per incidenza su due schiere rigate di due quadriche, e quella, più espressiva, di Aschieri mediante le rette seganti due quadriche in due coppie armoniche di punti.

18. — In tal guisa l'esame del libro è finito. Il giudizio riassuntivo è pienamente favorevole e per riguardo alle molte cose che il libro contiene e per riguardo alla sua utilità indiscutibile a chi si accinge ai corsi abituali di Geometria Superiore che si tengono nei secondi bienni delle nostre Scuole Universitarie di Matematica. Sarebbe davvero desiderabile che questi corsi si compissero in due anni, svolgendo nel primo la parte propedeutica, magnificamente rappresentata nel libro attuale, e sviluppando poi nel secondo la parte monografica.

Molti anni indietro « recensendo » il corso litografato di Geometria descrittiva dello stesso A. che, a gran parte del libro

Digitized by Google

attuale, riuniva la dottrina dei metodi di rappresentazione propri della Geometria descrittiva, chiudevo quelle poche pagine formulando il voto « che a quelle litografie fosse dato al più presto quella miglior veste tipografica che avesse potuto favorirne la meritata diffusione ». Il voto si è avverato (salvo l'imprevisto maggior lasso di tempo trascorso) arricchendo notevolmente quelle litografie di ciò che interessa in modo particolare l'insegnamento della Matematica teorica e spogliandole di quanto riguardava la Geometria descrittiva propriamente detta.

E della nobile, utilissima fatica durata dall'A. grave di anni ma ancor giovane di pensiero (« *ad multos annos* » caro e venerato Maestro!) noi tutti scolari e insegnanti dobbiamo essergli particolarmente riconoscenti!

Firenze, Università, Dicembre 1927.

EDGARDO CIANI

L. E. DICKSON, *History of the Theory of Numbers*. Vol. II: *Diophantine Analysis*. 8°. gr. p. XXV - 803. Published by the Carnegie Institution of Washington, 1920. Vol. III. *Quadratic and higher Forms. With a Chapter on the Class Numbers by* G. H. CRESSE p. V. + 313, 1923.

Ad una distanza di tempo insperatamente breve il II Vol. di questo magistrale Rapporto tien dietro al I e noi, nell'accingerci ad analizzarne brevemente il contenuto, confermiamo le osservazioni fatte all'apparire di questo (v. *Bollettino*, Vol. V, 1926, p. XI) le quali supponiamo presenti alla mente di chi attualmente ci legge.

Il I Cap. del volume che ci sta sott'occhio è dedicato alle ricerche che, a partire da Diofanto, vennero effettuate sopra i numeri figurati; mentre il II è dedicato all'analisi indeterminata di I grado, cioè alla risoluzione in numeri interi positivi delle equazioni lineari con due o più incognite; segue l'esposizione (Cap. III) delle ricerche sinora compiute sulla Partizione dei numeri. I due Capitoli seguenti concernono le applicazioni che furono fatte della teoria dei numeri alla geometria, a partire dal momento in cui Pitagora e Platone diedero regole sicure per costruire dei triangoli

Digitized by Google

in numeri interi, per merito di coloro che insegnarono a costruire triangoli, quadrilateri e tetraedri aventi tutti i loro elementi misurati da numeri interi. Nei quattordici Capitoli seguenti l'A. espone le innumerevoli investigazioni compiute da coloro che studiarono l'analisi indeterminata di II grado; nell'impossibilità di compendiare l'enorme materiale ivi raccolto ci limitiamo a riferire, con qualche commento, i titoli posti dall'autore: Cap. VI. *Somma di due quadrati* (cioè problemi in cui si tratta di determinare due numeri tali che la somma dei loro quadrati soddisfi a qualche condizione); VII. *Somma di tre quadrati*. VIII. *Somma di quattro quadrati*. IX. *Somma di* n *quadrati*. X. *Numero delle soluzioni di congruenze quadratiche con* n *incognite*, XI. *Serie di diciotto articoli di Liouville* (sono ivi esposte molte importanti formole semplicemente enunciate dal celebre geometra francese). XII. *Equazione* (impropriameute detta) *di Pell:* $ax^2 + bx + c$ *eguale ad un quadrato*. XIII. *Altre equazioni di secondo grado*. XIV. *Determinazione di un certo numero di quadrati in progressione aritmetica o geometrica*. XV. *Due o più funzioni lineari eguagliate a quadrati* (sono le ricerche originate dai passi dell'« Aritmetica » di Diofanto relativi alle doppie equazioni). XVI. *Due funzioni quadratiche di una o due incognite eguagliate a quadrati* (stessa osservazione di prima; fanno quì il loro ingresso i numeri congrui di Leonardo Pisano). XVII. *Sistemi di due equazioni quadratiche*. XVIII. *Tre e più funzioni quadratiche di una o due incognite eguagliate a quadrati*. XIX. *Sistemi di tre o più equazioni quadratiche con tre o più incognite*.

Proseguendo nell'intrapresa rassegna delle speciali equazioni indeterminate sino ad oggi studiate, l'A. considera (Cap. XX) quelle che si ottengono eguagliando una forma quadratica ad una potenza di esponente superiore a due; passa poi (Cap. XXI) a studiare le equazioni cubiche, arrestandosi sopra gli importanti teoremi che, in certi casi ne affermano la impossibilità; altrettanto fa poi (Cap. XXII) riguardo a quelle biquadratiche, per esporre quanto si conosce (Cap. XXIII) riguardo alle equazioni indeterminate di grado *n*. Il Cap. seguente abbraccia i problemi nei quali si tratta di trovare una serie di numeri interi di cui si conoscono la somma, la somma dei quadrati, ecc. Interesse ancor maggiore presenta il Cap. XXV, dedicato al Problema di Waring ed analoghi; come è noto il nome dell'egregio matematico inglese si connette all'asserzione che « ogni numero intero è esprimibile come somma di nove cubi » (alcuni eventualmente nulli) ed alle

Digitized by Google

analoghe proposizioni relative alle potenze superiori; è noto pure che gli enunciati da lui lasciati vennero soltanto in questi ultimi tempi giustificati e completati. All' *Ultimo teorema di Fermat* è consacrato l'ultimo Cap. del volume in esame, capitolo della massima importanza, per quanto l'A. abbia spesso dovuto narrare, non battaglie vittoriose, ma ignominiose sconfitte (1); auguriamo che la chiara completa esposizione dello stato della questione renda più vicino il momento in cui sia spiegato uno dei più tormentosi enigmi che s'incontrano nella storia della matematica!

Paragonando il volume ora esaminato col IV delle *Vorlesungen* di M. Cantor si vede come a esso permetterà di farvi importanti aggiunte, cosa di cui speriamo verrà tenuto il debito conto nelle venture edizioni di detto volume. E poichè all'A. in gran parte fu possibile completare le nostre cognizioni intorno all'evoluzione delle scienze esatte durante questi ultimi due secoli, perchè potè consultare alcuni periodici inglesi ignoti sul continente, così sarebbe sommamente interessante che, come avviamento verso una storia delle matematiche nella Granbretagna, fosse fatta, da persona competente, un esauriente esame della antica letteratura periodica inglese relativa alla materia che c'interessa: soltanto così sarà possibile giungere a delineare un quadro fedele della matematica postnewtoniana.

Mentre quanto dicemmo segnala l'opera del prof. Dickson ai futuri storici della nostra scienza, vi è un'altra ragione che la raccomanda a chi s'interessa maggiormente alle cose che alle persone: ed è che si trovano ivi sparse a larga mano le identità, sia algebriche che numeriche; per ciò, da un lato potrà venire sfruttata per rendere più completa la collezione delle une e delle altre, dall'altro lato riuscirà di sommo giovamento agli insegnanti che desiderano proporre ai loro alunni applicazioni differenti da quelle che si trovano negli ordinari trattati.

Il III Vol. tratta argomenti ben più elevati di quelli svolti nei due primi; invero i lavori analizzati appartengono a quelle regioni dell'aritmetica superiore in cui fu giudicato necessario l'intervento dei procedimenti più delicati e potenti dell'analisi matematica moderna, in cui (per tacere d'altro) i numeri complessi prestarono ottimi servigi a chi era intento a scoprire le proprietà più riposte dei numeri della serie naturale.

---

(1) Fra le critiche a pretese dimostrazioni dell'impossibilità dell'equazione $x^n + y^n = z^n$, l'A. non ha registrate quelle apparse, in varii tempi, in questo *Bollettino*.

Digitized by Google

Il metodo di esposizione seguito dall'autore è lo stesso da lui scelto scrivendo i primi due volumi della sua « History » : è quello adottato in generale dai compilatori dei rapporti sull' evoluzione e sullo stato attuale di speciali teorie piuttosto che dagli storici propriamente detti; esso consiste nel dividere tutta la materia in grandi sezioni in base agli argomenti trattati, riserbando l'ordine cronologico per quanto concerne lo svolgimento di ogni tema speciale.

Come è generalmente noto, nella teoria dei numeri si dà il nome di « forma » ad ogni funzione omogenea di un certo numero di variabili; le forme si classificano poi tanto in base al numero delle indeterminate che contengono (e si chiamano binarie, ternarie, quaternarie, ecc.), quanto tenendo conto del grado a cui salgono le indeterminate stesse. Ora i primi otto Capitoli del volume che ci sta sott'occhio trattano esclusivamente di forme quadratiche binarie, mentre nei tre successivi s' incontrano le forme analoghe con tre, quattro o n indeterminate; i Capitoli 12 e 13 hanno per seggetto le forme cubiche con due, tre o n variabili ed il seguente le binarie di grado superiore a tre. I capitoli 15 e 16 sono dedicati alle forme (dette di Hermite) lineari in n serie di variabili complesse e nelle loro coniugate ed il 17° alle forme bilineari, in relazione alle matrici ed alle sostituzioni lineari. Gli argomenti dei due ultimi Capitoli sono troppo complicati per potere essere caratterizzati in poche frasi.

Congedandosi dai lettori l' illustre professore dell' Università di Chicago invita coloro che avvertissero manchevolezze o lacune nella sua opera di farlo avvertito, affinchè egli possa tener conto delle osservazioni che gli verranno fatte in un volume di supplemento da lui progettato.

G. L.

W. Lietzmann - *Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen. Beispiele aus der Unterhaltungsmathematik.* Mit 102 Figuren im Text und 3 Tafeln auf Kunstdruckpapier. Breslau, 1922, F. Hirt. 8°, p. 187.

La completa libertà lasciata agli insegnanti universitari concesse all'autore (il quale da qualche anno è incaricato dell' insegnamento di didattica matematica nell' Università di Gottinga)

Digitized by Google

di tenere un gruppo di lezioni (una per settimana) sulle ricreazioni matematiche dal punto di vista dell'insegnamento secondario. Da esso trasse origine il bel volumetto che annunciamo e che ci si presenta sotto un aspetto civettuolo e lussuoso, al quale non siamo più abituati nelle attuali condizioni del mondo. Non si tratta di un duplicato di libri che esistono nelle letterature di tutti i popoli civili ed i cui più noti recano le firme di Bachet de Méziriac, Ozanam, E. Lucas, Ball, Ghersi, Ahrens, ecc. si; è piuttosto in presenza di una rapida rassegna di quanto trovasi oggi a disposizione dell'insegnante che intende far tesoro della massima pascaliana « les matières de géométrie sont si sérieuses d'elles mêmes, qu'il est avantageux qu'il s'offre quelque occasion pour les rendre un peu divertissantes ». L'Autore considerò la questione nel senso più lato, onde inserì nel suo libro anche versi concernenti varie teorie matematiche (non esclusa la relatività) e giuochi che con le scienze esatte hanno legami alquanto discutibili; ma in pari tempo — senza mai abbandonare il campo elementare — diede notizia di molti argomenti nei quali la matematica serve a illuminare delicate questioni che s'incontrano giocando. Naturalmente, dati i limiti di tempo e di spazio, egli non potè approfondire tutte le questioni iucontrate; ma quanto ne dice, corroborato dalle citazioni di fonti a cui può rivolgersi chi non si sente satollo, ci sembra sufficiente ad ogni esigenza.

Questo volume costituisce un ottimo contributo alla questione dell'impiego di ricreazioni matematiche nell'insegnamento medio; non v'ha dubbio che un uso moderato può servire a ravvivare l'interesse per materie che molti alunni trovano aride; ma, in questa occasione meglio che in molte altre, i limiti devono essere suggeriti dal senso della misura che deve governare sempre il modo di procedere del maestro. Questa questione non crediamo sia stata finora agitata presso di noi; auguriamo che ciò venga fatto, tenendo conto del voto formulato in un recente Congresso internazionale con le seguenti parole: « È desiderabile che nelle considerazioni, nelle discussioni ed in generale in tutto il movimento di riforma dell'insegnamento nelle scuole inferiori e medie, il fattore « fanciullo » non venga più considerato come un infinitesimo » (1).

G. L.

---

(1) N. Hatzidakis; *Proceding of the Fifth International Congress of Mathematicians* Vol. II, Cambridge 1913, p. 569.

Digitized by Google

F. Heiland - *Sammlung von Aufgaben aus der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Mit 26 Figuren.* (Sammlung Göschen N. 848) p. 152. Berlin und Leipzig, Verwissensch. Verleger, 1922. (Prezzo L. 4,50).

Questa raccolta di problemi trigonometrici si differenzia dalle altre a noi note per ciò che l'autore di essa evidentemente si propose di addestrare al calcolo numerico; infatti le questioni proposte non presentano difficoltà di concetto, ma, essendo tutte con dati numerici, esigono da chi si accinge a risolverle diligenza e forza di lavoro. I risultati sono indicati e, riguardo alle questioni meno semplici, è data qualche indicazione per a risolverle, onde non oltrepassano il livello intellettuale della media degli scolari. I temi trattati e l'ordinamento della materia risultano dall'indice che giudichiamo opportuno di quì riferire:

Introduzione. Uso delle tavole trigonometriche e logaritmiche.

Parte I. *Trigonometria piana.* Cap. 1. Il triangolo rettangolo. 2. Applicazioni della trigonometria al triangolo rettangolo. 3. Funzioni trigonometriche di angoli qualunque 4. Il triangolo obliquangolo. 5. Il teorema di addizione delle funzioni trigonometriche. 6. Problemi relativi al triangolo. 7. Il quadrilatero. 8. Applicazioni della trigonometria piana (alla geodesia, all'astronomia, ecc.).

II Parte. *Trigonometria sferica.* Cap. 9. Il triangolo sferico rettangolo. 10. Il triangolo sferico obliquangolo. 11. Applicazioni della trigonometria sferica (alla geografia matematica, all'astronomia, ed alla cristallografia).

III. Parte. *Calcolo ed applicazioni geometriche delle funzioni trigonometriche.* Cap. 12. Numero complessi. 13. Serie infinite. 14. Metodo dell'ango'o ausiliario.

G. L.

G. Kowalewski - *Grundzüge der Differential-und Integralrächnung.* II *verbeherte Auflage, mit 31 Figuren im Tent* 8° p. IV + 416. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner 1919 (Prezzo Mk. 12, leg. Mk. 14).

Della I edizione di quest'opera venne reso conto a suo tempo da penna competente (v. Boll. di bibl. e storia, T. XIII, 1911, pag. 68). Della II non è il caso di esporre una lunga analisi perchè

Digitized by Google

non differisce dalla precedente che per ritocchi in qualche particolare, che non ne alterano la fisonomia generale. Basti un semplice annunzio, il quale serve a dimostrare che il giudizio generale del pubblico sull'opera non fu meno lusinghiero di quello che fu pronunciato nel citato periodico.

G. L.

NOTIZIE

Ancora a proposito di una recensione. — Il prof. *V. G. Cavallaro* ha fatto osservare ai lettori del « Bollettino » Anno XXIII, fac. IV, pag. LXVI) che il teorema, da me rilevato come interessante, nella recensione alla Nota di *G. Vici* « *Sulla sezione aurea di un segmento* » (questo Boll. fasc. II-III, pag. XLV), è un càso particolare di un teorema già noto e di non molta importanza. Io non mi avvidi di questo, per il modo con il quale il *Vici* giunse a tale teorema: modo che appare strettamente collegato alla costruzione dei punti aurei dell'ipotenusa e dei cateti.

Giustizia vuole che ricordi come, oltre al *Cavallaro*, anche il chiaro collega *Paolo Cattaneo* mi abbia avvertito come il teorema in questione sia un caso particolare di altro più generale.

Infine debbo dire che il tono un po' vivace, ma non malevolo, al quale è intonata tale recensione è dovuto al fatto che io ritenevo di trovare nella Nota del *Vici* una costruzione effettivamente nuova, mentre dopo varie pagine di deduzioni non si giunge che ad una costruzione nota con qualche variante espositiva.

Ora l'A. mi ha avvertito che egli, col suo scritto non intendeva dare nuove costruzioni, ma solo proporsi un metodo di ricerca che lo conducesse a qualche teorema nuovo. E come già ho detto, egli trova effettivamente nuove proposizioni, ma di scarso interesse.

A. Natucci

Finito di stampare il 16 marzo 1928 (VI)

ALBERTO CONTI, Direttore responsabile

Tip. P. Cuppini - Castiglione 6[2] - Bologna

Digitized by Google

Sezione storico-bibliografica

PUBBLICATA PER CURA

DI

GINO LORIA

SOMMARIO del Fasc. 2°: Giuseppe Usai. Riflessioni sull'opera: Antonio Fais - Pagine autobiografiche.
Recensioni. G. Fubini - E. Cech. Geometria proiettiva differenziale *(Eugenio G. Togliatti)*. — Tullio Levi-Civita e Ugo Amaldi. Lezioni di Meccanica Razionale *(R. Serini)*. — Matematische Bibliothek *(G. L.)*. — J. A. Sanchez Perez. Biografias de matememáticos árabes que florecieron en Espana *(G. L.)*. — O. Perron. Algebra *(G. Vivanti)*. — R. Rothe. Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure *(G. Vivanti)*. — **Necrologio.** Magnus Gustaf Mittag-Leffler.

GIUSEPPE USAI

Prof. nel R. Istituto Sup. di Scienze econ. e comm. di Catania

RIFLESSIONI SULL' OPERA:

Antonio Fais - Pagine autobiografiche

(Stamperia della L. I. S. Sassari, 1925)

Nel leggere queste pagine ho pensato ad una sentenza del Buffon « Lo stile è l' Uomo ».

Mi sono apparse infatti la semplicità e la grandezza dell'autore insieme fuse in un' immagine nitida e splendente la quale rammenta l'affetto e la stima che vivamente dimostrarono gli scolari tutti, al Professor Fais nel suo Apostolato di Insegnante durato per ben 51 anni.

Con vero piacere io, che ne fui scolaro sin dal Liceo, parlo oggi di questo Illustre Maestro il cui ricordo è stato in me sempre profondo ed intenso e non ha subito incertezze e pallori anche quando come professore sono pervenuto all' insegnamento superiore.

In un boscoso e pittoresco paese distante 23 km. da Sassari, nasceva il 25 aprile 1841, Antonio Fais: il paese era Ploaghe, situato in una estremità dell'Antica regione di Logudoro la quale per le sue vicende storiche e per l'unità della lingua, volle sempre rispecchiare la purezza della sua origine latina disdegnando ogni altra infiltrazione.

La casa ove nacque il Fais sentì più gemiti e vide molte sventure.

Digitized by Google

Nel 1812 spirava in essa il Nonno, Antonio Maria in seguito a mortale ferita riportata in un agguato in pieno giorno e da parte di molti sicari: questi erano stati spinti al delitto da persone influenti del paese, le quali nutrivano invidia per la florida condizione che Antonio Maria Fais aveva raggiunto con tenacia illuminata e con lavoro assillante (1).

Quella morte rovinava economicamente una famiglia cioè la vedova dell'ucciso e i teneri suoi figlioletti: Antonio Michele di 2 anni e Caterina di 4 anni. Antonio Michele il quale divenne poi padre di Antonio, non volle esercitare la professione di notaio e si diede all'agricoltura.

Egli inoltre ricoprì nel Comune di Ploaghe importanti cariche pubbliche e nel 47-48 fu sindaco ed in circostanze difficili, derivanti dallo stato di guerra. Nel 1855 quando una terribile epidemia sconvolse la Sardegna, egli morì di colera ed a questa morte ebbe ad assistere sgomentato il piccolo Antonio. Rimase in tal modo senza sostegno la povera moglie in età di 33 anni e col peso di una famiglia composta di 5 figlioli dei quali il primogenito ed unico maschio, l'Antonio, aveva 14 anni mentre la minore delle sorelle aveva appena 10 mesi.

Venne subito in aiuto a questa famiglia desolata un Sacerdote, Giovanni Maria Fiori, Zio dell'Antonio.

Ma la sventura non volle dar tregua e dopo breve tempo, nel 1857, la morte falciava anche lo Zio Fiori.

E l'Antonio dovette allora pensare seriamente all'avvenire di sè e dei suoi.

Egli aveva nel 51 iniziato a Sassari, nel Collegio degli Scolopi i Corsi Ginnasiali e continuato poi quelli di Filosofia. Seguendo la sua decisiva inclinazione per gli studi Matematici nel '58 si presentava al Concorso Nazionale per il Collegio Carlo Alberto di Torino e riuscito fra i primi vincitori, iniziava nel '59 in questa città i corsi Universitari.

Era allora Prefetto agli Studi nel Collegio l'Insigne Professor Giovanni Battista Gandino, del quale il Fais diciassette anni dopo doveva diventare collega nell'Università di Bologna e v'era incaricato come ripetitore per la Matematica l'Ing. Pullino, che più tardi divenne Ispettore Generale del Genio Navale e che fu il Grande ideatore e costruttore del primo sottomarino che abbia navigato nei nostri mari.

---

(1) In quei tempi, la Sardegna, cenerentola fra le regioni Italiane, era quasi del tutto priva di servizi di ordine pubblico.

Digitized by Google

Antonio Fais si laureava in Ingegneria nel '64, dopo aver assistito nel suo quinquennio di studi a fatti politici di grande importanza nazionale, quali le feste grandiose celebrate in Torino nel 1860 e nel 1861 per l'annessione dell' Emilia, della Toscana e delle Provincie Meridionali, l'apertura del Primo Parlamento Italiano, i vivaci dibattiti avvenuti tra Cavour e Garibaldi, durante la discussione della legge di cessione alla Francia di Nizza e Savoia, il trasferimento della capitale da Torino a Firenze e la morte del Conte di Cavour, rimpianta dalla cittadinanza torinese e da tutta l' Italia.

Ritornato in Sardegna veniva nel '65 nominato ingegnere presso una Società Inglese, la quale aveva ottenuto la concessione della costruzione delle Ferrovie Sarde. Ma il Fais dopo soli 6 mesi lasciava tal posto giacchè la carriera da Lui prediletta era quella dell' Insegnamento.

Veniva quindi nominato Professore Straordinario di Calcolo Infinitesimale e di Algebra Complementare nell' Università di Cagliari ed il 3 settembre 1865 iniziava i suoi corsi (1).

Nel '68 dava alle stampe un trattato di Trigonometria rettilinea e sferica pregevole per la chiarezza e per l'ordine,

Negli anni successivi si mise a pubblicare note e memorie intorno a diversi argomenti di Calcolo Infinitesimale e queste vennero tutte inserite nel *Giornale di Matematiche* di Napoli.

Nel '71 egli trovò in riguardo al triangolo aritmetico di Pascal un nuovo teorema che poi venne dimostrato elementarmente da altri Autori e studiato anche dai Proff. Janni e Trudi di Napoli.

La generalizzazione completa venne poi dal Fais presentata più tardi.

Pregevolissime memorie riguardanti le curve gobbe, le superficie rigate, le equazioni a derivate parziali di ordine superiore vennero accolte dalla Accademia delle Scienze di Bologna, la quale chiamò poi il Fais nel suo seno e lo nominò Accademico Onorario Benedettino.

Le memorie sulle derivate parziali e sulle curve gobbe vennero anche premiate.

Dall' Università di Cagliari, Egli passò nel '76 all' Università di Bologna e quivi tenne i corsi di Algebra Complementare e di Geometria Analitica e fu il primo ad impartire l' insegnamento (allora nuovo per tutta l' Italia) della Statica Grafica.

---

(1) Nelle Università della Sardegna in quei tempi l' anno scolastico incominciava in Settembre e terminava nell' Aprile successivo.

Digitized by Google

Nell'anno successivo tenne poi anche il corso di Calcolo Infinitesimale. A Bologna in quel periodo insegnavano Regnoli, Bombicci, Cappellini, Carducci i quali erano spesso invitati col Fais nella casa del Conte Gozzadini.

Il Senatore Cappellini aveva per ospite Quintino Sella quando passava per la città ed in quella occasione con gentil pensiero invitava anche i suoi colleghi della Facoltà di scienze e tra i Professori della Facoltà di Lettere il Carducci. Elevatissime erano le discussioni tra il Carducci ed il Sella su ogni argomento di alta coltura e costituivano un notevole divertimento intellettuale.

Nel 1879 venne bandito il Concorso per Ordinario di Calcolo Infinitesimale a Cagliari. Il Fais riuscì primo vincitore. Gli sarebbe stato facile avere la nomina ad ordinario a Bologna, ma ciònonostante nel Giugno 1880 egli lasciava tale città, dove era stato colmato di gentilezze e dove aveva raggiunto un'alta posizione accademica.

Egli ritornava in Sardegna per la pietà verso la Sua vecchia Mamma che aveva un unico sostegno, quello del figliuolo, e per la nostalgia della Sua Isola.

Nell'85 il Fais ebbe pure in Cagliari l'insegnamento di Matematica nel R. Liceo e per alcuni anni fu anche Preside (1).

Nel 1897-98 veniva nominato Rettore dell'Università ed in questa per oltre un ventennio fu Preside della Facoltà di Scienze.

Coprì anche per circa un quinquennio le cariche di Consigliere Comunale a Cagliari e di Consigliere Provinciale a Sassari.

Le lezioni del Fais erano scientificamente pregevoli e chiare e la Sua bontà come uomo era paterna e saggia: per tal riguardo gli allievi tutti lo ammiravano come un sapiente e lo amavano come un padre.

I Colleghi poi in ogni occasione propizia vollero dargli prova sincera della loro più viva simpatia ed anche da parte del Governo più volte il Fais ebbe segni di riconoscenza profonda e di fiducia illimitata mediante incarichi molteplici ed importanti.

Una manifestazione solenne della stima e della benevolenza degli studenti e Colleghi verso l'Insigne Professore si ebbe a Cagliari il 22 giugno 1905 in occasione del compimento del 40° anno del Suo Insegnamento Universitario.

Vi concorsero tutte le autorità Civili e Militari, vi aderirono

---

(1) Allora non vi era incompatibilità tra le due cariche di ruolo di Professore Universitario e di Professore Medio.

Digitized by Google

i Deputati e Senatori Sardi, moltissimi Professori delle Università Italiane ed Istituti Superiori e così pure parecchie Società ed Accademie scientifiche.

E furono molti e vibranti i discorsi di discepoli, Colleghi ed Autorità.

Ed un'altra non minore attestazione di stima gli veniva tributata 10 anni dopo. Il 1° Marzo 1915 Egli compiva infatti il 50° anno di insegnamento Universitario ed alla fine dell'anno scolastico con una solenne cerimonia gli veniva consegnata una grande medaglia d'oro su cui era coniata la Sua effigie. Volle rimanere poi in servizio un anno ancora per amore alla Università di Cagliari, la quale in quel momento aveva scoperto 11 fra le 13 cattedre di ruolo.

Ritiratosi dall'Insegnamento si stabiliva colla famiglia a Sassari desiderando restar vicino alla Sua Ploaghe.

Nell'aprile 1925 ricevette la visita del Sindaco e del Direttore della Scuola di applicazione degli Ingegneri di Bologna. Essi recavano l'omaggio della Città, dei colleghi e degli allievi.

Il Fais era allora già minato da un'influenza persistente ed a questa il 20 aprile susseguiva la gelida morte.

Tutta la Sua vita Egli aveva dedicato alla Religione, alla Famiglia, alla Scienza; la prima gli ha permesso di morire tranquillo e sereno, la seconda lo rammenta con orgoglio ed infinito amore; e la terza Egli reclutò per squarciare, come era nella Sua fede, i misteri che avvolgono l'oltretomba.

RECENSIONI

G. Fubini - E. Čech - *Geometria proiettiva differenziale;* pp. 794, Bologna, Zanichelli, 1926-27.

È un'opera quanto mai importante, questa che i proff. Fubini e Čech hanno presentato al pubblico matematico, in due fascicoli comparsi rispettivamente nel 1926 e nel 1927; importante per la qualità e per la quantità della materia che in essa è trattata. Ed è anche un indice del rapido svolgersi di queste teorie. La geometria differenziale proiettiva, che, come la geometria differenziale affine (cui è dedicato il bellissimo trattato recente del Blaschke), trova la sua prima ragion d'essere nella sistemazione delle diverse

Digitized by Google

teorie geometriche sulla base della nozione di gruppo di trasformazioni, secondo la via tracciata nel classico « Erlanger Programm », è uno dei più giovani, anzi è forse il più giovane di tutti i rami germogliati rigogliosi sull'annoso tronco geometrico. Ed infatti, prescindendo da cose ben note, ma neppur esse antiche, del Darboux, dell'Halphen e del Segre, le quali, se pur rientrano di pieno diritto in quest'ordine d'idee, non ne costituiscono ancora una teoria comunque organizzata, sono già di questo secolo le ricerche del Wilczynski sulla geometria differenziale proiettiva di linee, superficie, congruenze di rette; enti che vengono definiti, a meno di trasformazioni proiettive, mediante convenienti sistemi, completamente integrabili, di equazioni alle derivate parziali. Non solo, ma sono trascorsi non più di dieci anni dalla pubblicazione del primo lavoro del prof. Fubini in questo campo; primo di una lunga e sostanziosa successione, che, in un solo decennio, ha portato queste teorie a quel grado di sviluppo a cui diviene lecito volgersi indietro per guardare il lavoro fatto, allo scopo di raccoglierlo e di riordinarlo, presentando in un trattato, organicamente ed in modo sintetico, un complesso di risultati che contengono ormai, per chi si senta attratto da questo genere di lavori, e desideri continuarli ed approfondirli, un corredo di metodi già sufficientemente affinati e pronti.

Ciò che, in pari tempo, costituisce la superiorità dei metodi del Fubini e giustifica il diritto all'esistenza di questo trattato, ampiamente, ed anche a voler prescindere dalla quantità di risultati particolari che vi si trovano, è l'avere esteso all'indirizzo proiettivo il concetto, di Gauss, di definire enti geometrici mediante forme differenziali, completando così le cose del Wilczynski, non solo, ma presentandole sotto una luce assai più viva. Le difficoltà da superare non sono lievi. Si tratta anzitutto di trovare, ad es. per una superficie dell'ordinario spazio a tre dimensioni, delle forme differenziali, nei parametri che funzionano come coordinate curvilinee sulla superficie, le quali siano intrinseche, cioè indipendenti dalla scelta di tali parametri, ed invarianti per trasformazioni proiettive della superficie. In secondo luogo esse devono esser tali che la superficie ne riesca definita a meno di collineazioni; allo stesso modo come, nell'ordinaria geometria differenziale metrica, una superficie è definita, a meno di movimenti, dalle due forme di Gauss: $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$, $L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N dv^2$. I coefficienti di quelle forme non restano arbitrari, come non lo erano gli E, F, G, L, M, N della geometria

Digitized by Google

metrica; lo studio dei legami che intercedono fra essi conduce ad equazioni alle derivate parziali del 2° ordine lineari ed omogenee, con le loro condizioni d'integrabilità; e la cui integrazione significa la costruzione effettiva della superficie, perchè le coordinate d'un punto variabile su di essa ne costituiscono un sistema di soluzioni (linearmente indipendenti) che riesce appunto definito a meno di trasformazioni lineari. E si ha così il collegamento con le vedute del Wilczynski. Non è chi non veda l'importanza di questo modo di procedere, che vuol dire guardare da un punto di vista uniforme tutte le proprietà differenziali degli enti geometrici, collocando ciascuna nel posto che le spetta; e che, allo stesso tempo, apre la via ad una quantità di considerazioni geometriche.

Cercheremo di chiarire al lettore la via seguita, con qualche maggior particolare.

Per le curve sghembe (Cap. I°) conviene introdurre insieme le coordinate proiettive omogenee, x, d'un punto variabile sulla curva e quelle, ξ, del piano osculatore alla curva nel punto stesso, fissando subito, in funzione delle x, il fattore di proporzionalità che resta arbitrario nelle ξ, sicchè ogni ulteriore fattore dato alle x altera anche le ξ in modo determinato. Ciò posto, si arriva allo scopo considerando le espressioni $\Sigma d^r x\, d^s \xi$, per i diversi valori di $r+s$; mentre esse son tutte nulle identicamente per $r+s=0,1,2$, quelle che si hanno per $r+s=3,4$ si esprimono tutte rispettivamente mediante la $F_3 = \Sigma \xi d^3 x$ e mediante la dF_3; e per $r+s=5,6,7$ si trovano tre forme nuove F_5, F_6, F_7. Le forme F_3, F_5, F_6, F_7, tutte di 1° ordine, e dei gradi espressi dai loro indici, si potrebbero anche ottenere, senza ricorrere alle ξ, partendo dai determinanti (x, dx, d^2x, d^rx); esse bastano per definire la curva a meno di collineazioni unimodulari. Anzi, note le forme stesse, le x (e così pure le ξ) si hanno come soluzioni linearmente indipendenti di un'equazione differenziale lineare omogenea di 4° ordine. Per passare a collineazioni qualunque, ciascuna delle quali è prodotto d'una collineazione unimodulare per una trasformazione che consiste nel moltiplicare tutte le x per uno stesso fattore ρ, si studierà l'effetto d'una trasformazione di quest'ultimo tipo sulle forme F_3, F_5, F_6, F_7 e sulle equazioni differenziali sopra citate; si arriva allora a rendere intrinseci ed invarianti tutti gli enti analitici che occorre considerare, cambiando opportunamente, in funzione di ρ, il parametro di cui le x e le ξ sono funzioni, e scegliendo poi ρ in modo conveniente. Lo studio delle curve si completa studiando i varî enti geometrici ad essa collegati: il sistema nullo osculatore, le C^3 sghembe pas-

Digitized by Google

santi per 5, o per 6, punti consecutivi della curva, ecc. ecc.; elementi che conducono a collegare ad ogni punto generico della curva un tetraedro invariante, analogo al triedro principale della geometria metrica. Per le curve piane si segue una via analoga, ragionando sulle coordinate, ξ, della tangente.

Per le superficie non sviluppabili (Cap. II°), dette x, ξ le coordinate d'un punto generico della superficie e quelle del relativo piano tangente, e che saranno funzioni di due parametri u, v, si presenta anzitutto, tra le forme $\Sigma d^r x\, d^r \xi$, la $F_2 = \Sigma \xi d^2 x$, che differisce solo per un fattore dal determinante $(x, x_u, x_v, d^2 x)$. Anche ora conviene fissare subito il fattore di proporzionalità delle ξ. Vien poi la forma, pure di 1° ordine, $F_3 = \frac{1}{2}\Sigma (dx\, d^2\xi - - d\xi\, d^2 x)$. F_2 ed F_3, che sono fra loro apolari, sono solo impropriamente intrinseche (cambian segno per cambiamenti di parametri a Iacobiano < 0), ed invarianti per collineazioni unimodulari; ma il quoziente $F_3 : F_2$ è una forma di 1° ordine intrinseca ed invariante, la quale, per varie ragioni, appare analoga all'elemento lineare d'una superficie nella geometria metrica: la si chiama *elemento lineare proiettivo*. Notiamo subito che $F_2 = 0$ ed $F_3 = 0$ son le equazioni differenziali delle asintotiche e delle linee già trovate dal Darboux studiando i contatti della superficie con le quadriche passanti per un suo punto generico. Per definire la superficie a meno di collineazioni occorre ancora una terza forma, quadratica, Q, di significato (analitico e geometrico) assai più riposto, e che non ci fermeremo a chiarire. Anche qui, come nel Cap. 1°, e come sempre in seguito, è assai importante la normatura delle coordinate x (e ξ), che si può fare in varî modi; essa è fatta dal Fubini in modo da rendere uguale a -1 l'invariante assoluto del sistema delle due forme F_2, F_3 (il cui annullarsi esprime l'esistenza d'un fattor comune ad F_2, F_3), con che si sostituiscono ad F_2, F_3 due nuove forme *normali* φ_2, φ_3; altri procedimenti di normatura condurrebbero alle coordinate del Wilczynski, alle ordinarie coordinate non omogenee cui vengono a corrispondere per i piani tangenti le coordinate di Lelieuvre, ecc. E tutto il calcolo con le *coordinate normali* del Fubini riesce specialmente semplice se si prendono le asintotiche come linee coordinate; perchè viene: $F_2 = 2\beta\gamma\, du dv$, $F_3 = \beta\gamma(\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3)$; e si trovano per le x e per le ξ rispettivamente i due sistemi di equazioni: $x_{uu} = \theta_u x_u + + \beta x_v + p_{11} x$, $x_{vv} = \gamma x_u + \theta_v x_v + p_{22} x$; $\xi_{uu} = \theta_u \xi_u - \beta \xi_v + \pi_{11}\xi$, $\xi_{vv} = -\gamma \xi_u + \theta_v \xi_v + \pi_{22}\xi$ (1), ove $|\beta\gamma| = e^{\theta}$. La forma Q sarebbe poi: $Q = (p_{11} + \pi_{11})\, du^2 + (p_{22} + \pi_{22})\, dv^2$; mentre: $\pi_{11} - p_{11} = \beta_v +$

Digitized by Google

$+\beta\theta_v$, $\pi_{22} - p_{22} = \gamma_u + \gamma\theta_u$; sicchè le equazioni sopra citate si posson scrivere se son date F_2, F_3, Q. Non ne trascriviamo qui le tre condizioni d'integrabilità.

È assai importante la nozione di *superficie proiettivamente applicabili*: son tali due superficie S, S', in corrispondenza biunivoca, quando, per ogni coppia A, A' di punti omologhi, esiste una collineazione (in generale variabile con la coppia A, A') che muta A in A' ed S' in una nuova superficie S_0 tale che linee omologhe di S ed S_0 uscenti da A abbiano ivi un contatto del 2° ordine. L'applicabilità proiettiva esige la coincidenza delle forme φ_2, φ_3; e viceversa.

Tra le altre applicazioni contenute nel Cap. 2° rileviamo lo studio, in coordinate normali, di un sistema doppio coniugato, applicato alle superficie R di Tzitzeica e Demoulin che contengono un sistema doppio coniugato avente gli invarianti di punto uguali a quelli tangenziali scambiati fra loro ($\beta_v = \gamma_u$), ed alle superficie di Ionas contenenti un sistema doppio coniugato con invarianti uguali sia di punto che tangenziali ($\beta_u = \gamma_v$).

Per i Cap. che seguono riferiremo il contenuto con maggiore brevità.

Nel Cap. III° sono raccolti varî elementi geometrici proiettivamente collegati ad un punto generico 0 d'una superficie: la quadrica di Lie, che sta nel fascio delle quadriche di Darboux, le quali segano la superficie secondo linee per le quali 0 è punto triplo con le rette $\varphi_3 = 0$ come tangenti; il cono di Segre; la conica di Wilczynski; e, specialmente notevole, il fascio canonico di rette di centro 0, che contiene la 1ª direttrice di Wilczynski, e la cui retta più importante è la *normale proiettiva* del Fubini, una definizione geometrica semplice della quale è stata data recentemente dal Terracini. In questo Cap. son pure studiate alcune classi particolari di superficie, per le quali qualche retta notevole del fascio canonico passa per un punto fisso.

Il Cap. IV è dedicato alle superficie rigate, che erano rimaste escluse da alcuni dei risultati generali precedenti, per es. nell'introduzione delle coordinate normali.

Il Cap. V si occupa delle congruenze di rette in generale, ed in particolare delle congruenze W. Ricordiamo, in particolare, quelle congruenze W sulle cui falde focali si corrispondono le linee di Darboux (oltre le asintotiche), quelle le cui falde focali sono superficie R, ecc. ecc.

Il Cap. VI contiene un lungo studio degli invarianti dell'elemento lineare proiettivo d'una superficie.

Digitized by Google

Il Cap. VII ritorna sulle equazioni (1), ma scritte in coordinate curvilinee generali, e sulle relative condizioni d'integrabilità, e si rivolge poi al problema della ricerca delle superficie aventi un dato elemento lineare proiettivo, di quelle proiettivamente deformabili in ∞^3 modi, ecc.

Il Cap. VIII è dedicato alle superficie, non rigate, che ammettono un gruppo continuo di deformazioni proiettive in sè.

Nel Cap. IX si ritorna, adoperando coordinate curvilinee qualunque, sugli elementi geometrici collegati con un punto generico 0 d'una superficie; specialmente considerata qui è la quadrica di Moutard relativa ad una tangente generica t della superficie nel punto 0, che è luogo delle coniche ivi osculatrici alle curve sezioni della superficie coi piani passanti per t. Il luogo delle quadriche anzidette, al variare di t intorno ad 0, è studiato nel Cap. X.

Il Cap. XI è dedicato alla geometria della retta. Anche per i complessi e per le congruenze di rette si possono considerare delle proprietà proiettive infinitesimali dei vari ordini, come già fece il Koenigs nella sua tesi del 1882. Qui si adotta un punto di vista analogo a quello dei Cap. 1° e 2°. Così, un complesso di rette si può definire, a meno di collineazioni, mediante due forme differenziali quadratiche φ, χ nei tre parametri di cui le coordinate p_{ik} d'una retta generica del complesso sono funzioni. La prima (giá considerata dal Koenigs con altre notazioni) non è altro che: $\varphi = -\Sigma p_{ik} d^2 p_{ik} = \Sigma dp^2_{ik}$, ed uguagliata a zero dà le rette del complesso infinitamente vicine ed incidenti ad una generica di esse; la forma χ è scelta entro il fascio di forme: $\alpha\varphi + \beta \Sigma dp_{ik}\, d\pi'_{ik}$ (ove π'_{ik} sono i coefficienti dell'equazione d'un qualunque complesso lineare tangente al dato complesso lungo una sua retta generica p_{ik}) con la condizione di essere apolare alla φ. L'introduzione in α, β di un opportuno fattore normante rende $\varphi : \chi^2$ intrinseco ed invariante (*elemento lineare proiettivo* del complesso di rette). Interessante l'estensione ai complessi di rette della nozione di applicabilità proiettiva, che conduce al fatto notevole che un complesso di rette è proiettivamente indeformabile.

Anche per le congruenze di rette si ricorre a due forme differenziali, una delle quali quadratica e del tutto analoga alla φ di cui sopra, e l'altra di 4° grado ed intimamente collegata alla considerazione delle asintotiche sulle due falde della superficie focale. Segue lo studio dell'applicabilità proiettiva di due congruenze di rette.

Le cose del Cap. 2° si possono estendere alle V_{n-1} di uno

Digitized by Google

spazio S_n ad n dimensioni (Cap. XII); si hanno così due forme F_2, F_3 analoghe a quelle trovate per le superficie dello spazio ordinario, e che sono ora sufficienti per definire la V_{n-1} a meno di collineazioni; sicchè, estendendo la nozione di applicabilità proiettiva, una V_{n-1} di S_n, per $n > 3$, risulta proiettivamente indeformabile. E gli stessi metodi si applicano bene anche alle superficie di S_4. Le coordinate d'un punto variabile su una tale superficie sono sempre soluzioni di un'equazione a derivate parziali di 2° ordine lineare ed omogènea, in generale non parabolica, sicchè si possono considerare sulla superficie le *caratteristiche* di tale equazione, o *linee principali* (per proiezione su un S_3 esse danno un sistema doppio coniugato sulla superficie proiezione); si ottiene così una prima forma, quadratica, F_2; ma poi ne occorre un'altra, F_5, ecc. ecc. Il Cap. si chiude con uno studio delle superficie rigate negli iperspazi.

Un resoconto più minuto dell'enorme quantità di risultati concentrati in questi dodici capitoli (660 pagine) allungherebbe troppo questa relazione; quanto s'è detto può già dare un'idea sommaria dell'opera. Molte cose vi hanno un assetto ormai definitivo, o quasi; altre invitano ad uno sviluppo ulteriore: non è un argomento finito, come ben mostra per es. l'ultimo cap., dove le questioni iperspaziali sono trattate solo in alcuni casi più semplici. E dinanzi all'eleganza ed all'importanza dei risultati conseguiti, grato agli egregi Autori per i servizi inestimabili che il libro gli può rendere (e che una bibliografia dell'argomento, purtroppo mancante, renderebbe anche maggiori). Il lettore vorrà certo dimenticare che la redazione rapida e talora troppo concisa lo ha reso qualche volta perplesso.

Una parola particolare meritano le diverse appendici, che chiudono l'opera e ne costituiscono un utilissimo complemento.

La prima, assai breve, è dello Tzitzeica, e contiene un'esposizione storica delle ricerche che hanno condotto quest'autore a considerare le superficie note col suo nome.

Nella seconda, il prof. Bompiani riassume i risultati di numerosi lavori propri. Anzitutto, ritrova i risultati del Fubini, relativi alle curve piane, o sghembe, ed alle superficie, con un procedimento uniforme, che parte da certi invarianti proiettivi che si presentano quando due curve, o due superficie, hanno fra loro, in un punto comune, un contatto di ordine assegnato. Così, per curve piane si parte dal teorema seguente del Segre (estendibile a curve sghembe ed a superficie): se due curve piane C, $\bar{C}$

Digitized by Google

hanno un contatto d'ordine n intero (≥ 1) in un punto 0, ordinario per entrambe, e si prendono le intersezioni P, $\bar{P}$, T di C, $\bar{C}$ e della loro tangente t in 0 con una retta r prossima ad 0, e poi si fa tendere r ad una posizione limite passante per 0, ma diversa da t, il birapporto $(P\bar{P}TM)$, dove M è un punto qualunque di r, ha un limite indipendente dalle posizioni limiti di r e di M, e che è un invariante proiettivo delle due curve in 0; questo teorema va poi applicato, per giungere allo scopo, ad una curva piana ed alla sua conica osculatrice in un suo punto generico. Per le superficie, il Bompiani dà anche altre due vie geometriche per giungere alle forme normali del Fubini: una è basata sulla considerazione di un conveniente sistema ∞^2 di linee della superficie che si comportano rispetto alle applicabilità proiettive come le ordinarie geodetiche nelle applicabilità usuali metriche; l'altra studia invece le superficie come enti dello spazio rigato rappresentandone le ∞^3 tangenti sopra una quadrica non degenere di un S_5 mediante una V_3 che risulta luogo di ∞^2 rette tangenti a due superficie.

La terza appendice, del prof. Terracini, riassume vari studi del Segre, del Bompiani e del Terracini stesso relativi alla geometria differenziale proiettiva negli iperspazi. Dopo alcune generalità sugli intorni successivi di un punto generico d'una varietà qualsiasi, si considerano le superficie che rappresentano un'equazione di Laplace (tali cioè che le coordinate di un loro punto generico sono soluzioni di un'equazione alle derivate parziali del 2° ordine lineare ed omogenea), poi le varietà che rappresentano un numero molto grande di tali equazioni, oppure che rappresentano particolari sistemi di equazioni di Laplace, oppure tali che gli spazi ad esse tangenti ricoprono una nuova varietà avente una dimensione minore di quella che ha in generale. Segue lo studio di vari sistemi di linee che si possono considerare su una superficie: le quasi-asintotiche, le linee autoconiugate, le linee principali per una superficie di S_5; ed infine un riassunto delle ricerche relative alle varietà luoghi di spazi, sia generali che sviluppabili.

L'ultima appendice, pure del prof. Terracini, è dedicata a quelle superficie dello spazio ordinario per le quali le asintotiche di un sistema, o di entrambi i sistemi, appartengono a complessi lineari.

Ciascuna appendice è corredata di un'accurata bibliografia dell'argomento particolare di cui vi si tratta.

Genova, dicembre 1927

EUGENIO G. TOGLIATTI

Digitized by Google

TULLIO LEVI-CIVITA e UGO AMALDI - *Lezioni di Meccanica Razionale*, Vol. II. Dinamica dei sistemi con un numero finito di gradi di libertà. Parte 1ª pp. IX-526 L. 65. Parte 2ª pp. IX-684, L. 80, Bologna - Nicola Zanichelli, Editore.

Continuo con vivo piacere la recensione dell'importante trattato (v. questo Bollettino anno 19° p. C-CII) la cui lettura è un vero godimento.

Nella recensione del I volume accennavo all'idea che il libro pur così completo è dei più adatti al principiante: nè questo carattere vien meno nel secondo volume nonostante la sua mole. Infatti anche in questo viene sviluppata precipuamente la parte concettuale e la interpretazione fisica, proprio ciò che il principiante più difficilmente riesce ad afferrare.

I lunghi calcoli e il relativo virtuosismo uccidono molto spesso lo spirito delle cose: nel libro virtuosismi di calcolo non ci sono, come forse sarebbe da aspettarsi dall'ampiezza del volume: alcuni problemi che vi porterebbero sono sviluppati nella loro parte essenziale (v. p. es. pendolo sferico, moto alla Kowalewscki) e risolti, quando è il caso con soluzioni approssimate (ragionatamente) (v. p. es. pendolo di Foucault) in modo che risultino evidenti le caratteristiche del fenomeno.

Sotto questo aspetto il fisico troverà nel libro quanto gli può occorrere per impadronirsi dei concetti fondamentali, e della teoria di alcuni strumenti di larghissimo impiego.

Utilissimi, per chi voglia dedicarsi a ricerche scientifiche, gli accenni a memorie originali sia classiche sia recenti: di molte ne è spiegato il concetto fondamentale cosicchè la lettura di quelle (e ognuno che abbia un po' di pratica sa quanto sovente sia difficile) risulterà semplificata, e ciò che è forse più ancora malagevole a farsi da solo, la memoria resterà inquadrata nello stato attuale della scienza. (p. citare qualche esempio vedi quanto si riferisce ai giroscapi di Hess e alla memoria del Volterra sulla variazione della latitudine).

Frequenti e interessantissimi gli spunti di teorie recenti, p. es. teoria della relatività, atomo di Bohr, interpretazione ottica dei sistemi canonici omogenei che ha acquistato tanta importanza nelle recenti ricerche sulla meccanica ondulatoria, e così pure i collegamenti con altre teorie, acustica, rifrazione della luce e principio di Fermat, miraggio, teoria cinetica dei gas ecc.

Digitized by Google

Chi debba svolgere un corso monografico, trova gli argomenti sviluppati con tutta quella chiarezza e precisione di enunciati che può soddisfare qualunque spirito più critico. (p. es. v. l'indipendenza degli argomenti sul principio dell'azione variata).

E riprendendo, una idea già altre volte espressa in riunioni della Mathesis, quando esposi il contenuto del primo volume, mi pare che chi volesse scivere un trattatello di Meccanica elementare come introduzione al corso di Fisica (lavoro che purtroppo è ancora da fare) troverebbe nello studio e meditazione di questo trattato, la lena per un'opera veramente degna della scuola italiana.

Continuano numerose le indicazioni biografiche: pur rapide, riescono a dare colla loro concettosità un vivente ritratto scientifico dei tanti illustri il cui nome è intimamente legato alla scienza, con indicazione anche delle loro opere principali.

Ricchissima la raccolta di esercizi distribuiti capitolo per capitolo: alcuni di carattere piuttosto analitico, molti applicativi. Alcuni, più importanti, svolti per intero servono a dar conto di teorie speciali e a mostrare legami con altre discipline.

Per ognuna delle due parti un indice analitico e uno dei nomi, oltre l'indice solito, servono utilmente a muoversi sul complesso in vero imponente di tante nozioni e teorie.

Il volume consta di dodici capitoli, sei per ogni parte, del cui contenuto dirò brevemente.

I. *Dinamica del punto su traiettoria prestabilita.* Oltre gli argomenti soliti, notevole la discussione, desunta da una celebre memoria del Weierstrass, dell'equazione differenziale $s^2 = f(s)$ relativa al comportamento qualitativo del moto e i cui risultati trovano nel seguito del volume continua applicazione.

Esauriente ed utilissima per le applicazioni la trattazione delle vibrazioni spontanee o forzate e del fenomeno della risonanza.

II. *Dinamica del punto libero e su superficie prestabilita.* Dopo la trattazione degli integrali primi delle equazioni del moto, e lo studio del moto di un punto soggetto ad una forza centrale, con applicazione della discussione di Weierstrass, si ha una esauriente impostazione del problema principale della balistica esterna, con cenno dei problemi secondari e tra l'altro una nuova discussione circa l'influenza della resistenza dell'aria sulla deviazione orientale dei gravi.

La parte relativa al punto libero si chiude colla nozione di stabilità dell'equilibrio e collo studio delle piccole oscillazioni.

Digitized by Google

Il problema del moto su superficie prestabilita trova la sua applicazione al pendolo sferico e al pendolo di Foucault.

Tra gli esercizi notevole quello (classico) sul moto di una particella elettrizzata in un campo elettromagnetico statico.

III. *Nozioni elementari di meccanica celeste.* Partendo dalle leggi di Keplero si arriva alla legge della attrazione universale, mettendone in evidenza le conseguenze fondamentali e le verifiche più notevoli.

Vi si trova trattato il problema dei due corpi, l'impostazione del problema degli $n + 1$ corpi, di quello delle perturbazioni con cenni elementari sulle maree, e la nozione di elementi ellittici.

Seguono, il problema dello spostamento del perielio come conseguenza della correzione relativistica alla legge di Newton, e un cenno sull'atomo di Bohr.

Negli esercizi si hanno cenni su soluzioni particolari del problema dei tre corpi, sul problema dei due corpi di massa variabile (Armellini) e sul classico problema di Bertrand.

IV. *Caratteristiche dinamiche e cinetiche dei sistemi.* E' un capitolo preparatorio: in esso vengono fatti i calcoli degli elementi ed enti principali che s'incontrano nella meccanica dei sistemi; serve utilmente a sbarazzare il seguito da calcoli necessari ma che intralcerebbero la trattazione concettuale dei fenomeni. Notevole la caratterizzazione dei riferimenti di energia minima.

V. *Teoremi generali sul moto dei sistemi. Equazioni del Lagrange. Sistemi anolonomi.* Ottenute le equazioni cardinali, anche con riferimento ad assi mobili con legge qualsiasi, si estendono attraverso il principio di D'Alembert ai sistemi che ammettono spostamenti virtuali rigidi. Seguono alcuni cenni di cinetostatica. Il teorema e il conseguente integrale delle forze vive da occasione all'introduzione del concetto di energia interna.

Dall'equazione di D'Alembert si deducono nel modo solito, pei sistemi olonomi, le equazioni di Lagrange della 1ª e 2ª forma: la proprietà di queste ultime vengono studiate addirittura riferendosi ai sistemi lagrangiani generali.

Tra gli esempi notevole, per importanza pratica, quello relativo ai sismografi.

Pei sistemi anolonomi si ottengono le equazioni del Maggi, con contributi personali degli autori e quelle dell'Appel.

Negli esercizi; importante l'introduzione del Viriale di Clausins e la teoria (schematica) del regolatore di Watt.

VI. *Stabilità e vibrazioni.* La prima parte è dedicata al

Digitized by Google

Classico teorema di Dirichlet, ai teoremi sullo spostamento dell'equilibrio, con ricerche personali del Levi-Civita, alle piccole oscillazioni nell'intorno di una posizione di equilibrio stabile, ottenendosi importanti teoremi del Rayleigh mediante eleganti considerazioni iperspaziali. Questa costituirebbe una utile introduzione alla lettura (alquanto difficile) del classico « Theory of Sound » del detto autore.

La seconda parte è dedicata alle soluzioni stabili (alla Dirichlet) ai concetti di stabilità ridotta o alla Routh, di stabilità lineare, con riferimento a memorie del Levi-Civita sui criteri di instabilità. Viene studiata inoltre la stabilità quando si presentino resistenze passive.

Utilissimo tra gli esercizi quello che riguarda i battimenti, come importante pel suo carattere quasi paradossale, quello sul fenomeno del Bernouilli (trasferimento di vibrazioni tra due gradi di libertà).

VII. *Dinamica dei solidi. Generalità. Problemi elementari.* Dopo aver ottenute le equazioni dinamiche dei solidi, anche riferite ad assi qualsiasi, ed averne dimostrata la sufficienza, si applicano ai casi più semplici dei solidi girevoli intorno ad un asse e mobili parallelamente ad un piano fisso (moti in due dimensioni). Dei primi oltre al pendolo composto, viene considerato il bipendolo con applicazione al caso paradossale della campana di Strasburgo. La teoria dei moti in due dimensioni viene applicata in primo luogo al moto di una ruota su suolo orizzontale, con considerazione dell'attrito radente e volvente, giungendo ad importanti formole pratiche, e, seguendo il Crocco, allo studio della traslazione di regime e della stabilità longitudinale degli aereoplani.

Chiudono il capitolo alcune osservazioni critiche sulle leggi empiriche dell'attrito volte ad eliminare delle incongruenze prospettate dal Painlèvé.

VIII. *Dinamica dei solidi. Moti intorno ad un punto fisso. Fenomeni giroscopici.* Ottenute le equazioni di Eulero si ha una breve digressione sui fenomeni giroscopici elementari, di cui è data una spiegazione ridotta al massimo di semplicità. Seguono lo studio del moto alla Poinsot e relativa stabilità, del giroscopio pesante (Lagrange) come applicazione della teoria di un solido pesante con un punto fisso: anche di questo viene studiata la stabilità.

E' fatto un cenno del caso della Kowalewski e dello Hess; quanto basta perchè chi voglia rivolgersi alle memorie originali, avendone capito il concetto fondamentale, trovi il compito facilitato.

Digitized by Google

Si trova nel testo la teoria della bussola giroscopica e negli esercizi quella del barogiroscopio.

IX. *Dinamica dei solidi. Moti con rotolamento. Solidi con moti ciclici interni.* Vi si studiano il moto della palla da bigliardo, del solido giroscopico a piede circolare, di un solido rotonde pesante su piano orizzontale e finalmente i girostati ed i moti ciclici stazionari seguendo le classiche ricerche del Volterra che si collegano specialmente alla questione della variazione delle latitudini.

X. *Equazioni canoniche.* Partendo dai sistemi langragiani generali si ottengono le equazioni canoniche (di cui si determina l'integrale generalizzato della energia) specificando poi pel caso dei sistemi dinamici.

Definite le trasformazioni canoniche come quelle che conservano la forma Hamiltoniana al sistema, si determinano, col Morera, le dette trasformazioni partendo dalla osservazione che le equazioni hamiltoniane costituiscono il sistema associato di un certo pfaffiano. Infine attraverso alle trasformazioni completamente canoniche si arriva alle parentesi del Lagrange e del Poisson.

Lo studio degli integrali di un sistema canonico porta al teorema classico di Poisson. Segue il concetto di relazioni invarianti e la deduzione (Levi-Civita), di soluzioni particolari partendo dalla conoscenza di integrali e di relazioni invarianti, e si introduce il concetto di invarianti integrali con deduzione del teorema di Lionville.

L'ultima parte generale del capitolo è dedicata al metodo di integrazione di Hamilton-Iacobi cui si arriva nel modo più semplice attraverso una trasformazione canonica (anzichè colla teoria delle caratteristiche) e ai teoremi sulla riduzione del rango conseguenti alla conoscenza di integrali.

Si ha infine l'applicazione dei metodi esposti ad una quantità di esempi dove tra l'altro si introducono, secondo il Levi-Civita, le sestuple canoniche nel problema dei due corpi.

Tra gli esercizi certo il più importante quello della teoria geometrica delle onde luminose, come interpretazione ottica dei sistemi canonici omogenei (che risale al Lie ma che gli autori hanno perfezionato) interpretazione che ha tanta importanza nella meccanica ondulatoria. (v. Schrödinger, Annalen der Physik 1926).

XI. *Principi generali.* Sebbene il principio fondamentale della meccanica sia sempre quello dei lavori virtuali o l'equivalente relazione simbolica della dinamica, pure è utile esprimerlo in altri modi sia che questi non siano per se stessi evidenti, sia che permettano estensioni ad altri campi, e costituiscano quindi po-

Digitized by Google

tenti mezzi euristici. Tra i primi si ha il principio di Gauss e quello della direttissima di Hertz: tra i secondi il principio variazionale di Hamilton e gli analoghi (di cui è ben nota la portata anche pei sistemi continui, per la termodinamica, per la teoria della relatività).

Detti principi vengono esposti con tutte le cautele e le ipotesi necessarie per la loro validità. (Vedi p. es. la trattazione dovuta agli autori sulla indipendenza degli argomenti nell'azione variata).

Come applicazione dei detti principi a campi estranei si studiano la rifrazione e il miraggio di Monge, il legame coi principi precedenti essendo costituito dal teorema di Fermat.

Si estendono infine i principi variazionali ai sistemi lagrangiani generali.

Tra gli esercizi sono notevoli quello sulle branchistocrone e sul teorema di Whittaker relativo alle traiettorie chiuse.

XII. *Moto impulsivo.* Richiamato quanto è detto nel primo volume sugli impulsi, si tratta il caso di un unico punto, e poi quello dei sistemi, mettendo a base il postulato che nelle percosse si hanno brusche variazioni della velocità ma sensibile conservazione delle posizioni. Nel seguito si fa vedere (Volterra) come al detto postulato soddisfino i sistemi per cui vale il teorema delle forze vive. Le equazioni ottenute vengono applicate all'urto centrale, al pendolo balistico e all'urto generale tra due corpi anche con attrito.

Importantissimo tra gli esercizi quello sulla spiegezione cinetica della pressione nei gas.

Conclusione, Mi siano permesse due parole di conclusione. Io dubito che la mia povera e scarna recensione sia capace di dare il giusto valore di questo trattato che fa tanto onore alla scienza italiana, così degnamente impersonata dagli illustri autori, e anche per la parte editoriale alla Casa Zanichelli, ma non dubito che siccome chiunque lo studierà e lo adoprerà troverà in esso innumerevoli pregi di chiarezza, di perspicuità, di senso fisico e tante utili informazioni, esso diventerà e sarà per lungo tempo un trattato classico sulla meccanica razionale.

Pavia, 31 ottobre 1927.

R. SERINI

Digitized by Google

MATEMATISCHE BIBLIOTHEK (Leipzig, B. G. Teubner).

Bd. 7, H. WIELEITNER, *Die sieben Rechnungseperationen mit allgemeinen Zahlen* (II durgchgesehene Aufl., 1920).

Bd. 18, W. AHRENS, *Mathematische Anekdoten* (II stark veränderte Aufl. 1920) (1).

Bd. 39, A. ANGERSBACH, *Das Relativitätsprincip leichtfasslich entwickelt* (1920).

Bd. 20-21, G. WOLE, *Matematik und Malerei* (II verbesserte Aufl., 1925).

Bd. 28, P. LUCKY, *Einfürung in die Nomographie*, I Tl. (1925).

Bd. 40, P. KIRCHENBERGER, *Mathematische Streifzüge durch Geschichte der Astronomie*, (1921).

Bd. 50, H. WIELEITNER, *Der Gegenstand der Mathematik in Lichte ihrer Entwickelung*, (1925).

Bd. 58, K. GRELLING, *Mengenlehre* (1924).

Bd. 61, K. FLADT, *Unendliche Reihen* (1925).

Bd. 63, O. KNOPP, *Mathematische Himmelskunde* (1925).

Bd. 64, A. CZWALINA, *Archimedes* (1925).

Bd. 65, L. PETERS, *Die Determinante* (1925).

Bd. 71, H. BEHMAN, *Mathematik und Logik* (1927).

Senza entrare in un'analisi di questi minuscoli volumetti, richiamiamo su di essi l'attenzione dei nostri lettori, giacchè, qualuque sia il ramo di studi che ognuno preferisce, egli troverà fra essi qualcuno che lo interessa: dall'aritmetica elementare si sale alla teoria degli insiemi, dalle scaturigini della prospettiva alla logica matematica e alla relativitá, dall'antica astronomia alla moderna nomografia. Ogni tema è trattato da uno specialista, la cui costante preoccupazione è di dire il maggior numero di cose col numero minimo di parole, senza scapito della chiarezza. Notiamo il Vol. 50 ove il Wieleitner, gettando uno sguardo d'insieme sulla matematica odierna, ha cura di determinare il posto che spetta a molti degli elementi della collezione in esame; mentre

(1) Questi aneddoti si riferiscono quasi esclusivamente a personaggi tedeschi.

Digitized by Google

additiamo il Vol. 64 a coloro che desiderano formarsi un concetto esatto dell'opera scientifica di Archimede. Benchè ogni volume sia posto in vendita al modesto prezzo di un Goldmark, parecchi di essi sono ornati da riuscitissime illustrazioni. G. L.

J. A. Sanchez Pèrez - *Biografias de matemàticos àrabes que florecieron en Espana.* Memorias de la Real Accademia de Ciencias eractas, fisicas y naturales. Madrid 1921.

Nell'anno 1917 l'Accademia delle Scienze di Madrid scelse come tema di concorso una *Monografia storico-critica dei matematici spagnuoli anteriori al secolo VIII.* Fra i lavori presentati si trovava in manoscritto quello a cui l'anzidetta corporazione scientifica concedette l'*accessit* e che oggi pubblica nel T. I della II Ser. (in 8°) delle sue Memorie. Che lo scritto che ora ci sta sott'occhio non potesse aspirare al premio promesso risulta dal fatto che non comprende tutto il periodo contemplato dal programma di concorso e non è un vero e proprio lavoro storico, ma è di spettanza della biografia e della bibliografia, arti minori rispetto alla scienza storica. Che però esso meritasse l'onore della pubblicità e provato dal fatto che, al pari di uno congenere notissimo del Suter, sarà di prezioso aiuto per colui che si accingerà alla grande impresa di esporre tutti i contributi dati dagli Arabi alla diffusione ed all'incremento del nostro sapere matematico.

Dai 191 scrittori di cui il Perez, con esemplare diligenza, raccolse ed espone i fondamentali dati bio-biografici, la maggior parte era già stata registata in pubblicazioni similari anteriori; malgrado gli epiteti iperbolici con cui essi sono designati da connazionali, furono studiosi dotati di mediocre originalità, molti dei quali non furono specialisti, ma poligrafici e divulgatori. Ciò non esclude che fra le opere che ci lasciarono manoscritte non si possa trovare qualcuna costituente un titolo di benemerenza per chi li vergò; e siccome esse trovansi in buon numero in biblioteche spagnuole, così auguriamo che l'A. del lavoro che annunziamo, il quale ha il privilegio di comprendere l'Arabo, ce le faccia conoscere: così egli farà compiere un passo importante alla risoluzione del grande problema di determinare, quanto gli Arabi contribuirono al rinascimento delle scienze in Europa, e quali aggiunte seppero apportare alle dottrine apprese dai Greci. G. L.

Digitized by Google

O. Perron - *Algebra.* Berlin-Leipzig, W. de Gruyter & C., 1927 : 8° T. 1, p. VIII-307 ; T. 2, p. VIII-243.

Come osserva l'autore, non è facile dire oggidì ciò che si intenda per « Algebra » ; la parola è stata persino pluralizzata, e si parla di una serie di Algebre diverse. Egli però vuol ritornare alla definizione tradizionale, che distingue nettamente l'Algebra dalla Teoria delle funzioni, assegnando alla prima lo studio delle quattro operazioni fondamentali, fatta astrazione da qualsiasi considerazione di maggiore e minore o di passaggio al limite. Naturalmente egli non può evitare qualche escursione nel campo dell'Analisi ; ma gli elementi estranei sono ridotti al minimo, e possono, egli afferma, essere soppressi, senza alterare la stabilità o l'estetica dell'edificio.

***

Dopo un rapido cenno (P. I, C. 1) sui numeri reali, che suppone noti, l'autore sviluppa la teoria del numeri complessi, ed introduce i concetti di « campo di razionalità » (« Körper ») e di « campo d'integrità » (« Ring »); definisce poi le « variabili » come simboli, che non sono numeri, ma sui quali si può operare come se fossero numeri, ed è in questa definizione che comincia a manifestarsi la differenza essenziale tra Algebra ed Analisi. Il capitolo termina con un breve studio delle funzioni razionali intere e fratte di una e di più variabili.

Segue (C. 2) l'Analisi combinatoria, lo sviluppo delle potenze d'un polinomio, la definizione di derivata d'un polinomio colle più semplici regole di derivazione, la formola di Taylor, e la teoria dell'interpolazione.

Il C. 3 è dedicato ai determinanti ed alle loro applicazioni : teoremi fondamentali, sistemi lineari, forme bilineari, quadratiche ed hermitiane, dipendenza reciproca dei polinomi, determinanti funzionali.

Le funzioni simmetriche formano l'argomento del C. 4.

Il C. 5 tratta della divisibilità e riducibilità dei polinomi ad una o a più variabili, e del risultante di più polinomi.

Chiude la prima Parte il C. 6, che porta per titolo : « Esistenza delle radici ». Qui si dimostra anzitutto, per via puramente algebrica, che, se un polinomio non è scomponibile in fattori lineari nel corpo a cui appartengono i suoi coefficienti, si può formare, mediante aggiunzione di nuovi elementi, un corpo am-

Digitized by Google

pliato (« algebraischer Erweiterungskörper »), in cui la scomposizione è possibile. Questo teorema, puramente algebrico, non deve confondersi col « cosidetto teorema fondamentale dell'Algebra », il quale asserisce che, se i coefficienti d'un polinomio appartengono al campo complesso, il polinomio è scomponibile in fattori lineari *in questo stesso campo*. Piuttosto che all'Algebra, quest'ultimo teorema appartiene, osserva l'autore, alla Teoria delle funzioni; ed infatti ogni dimostrazione di esso esige sussidi estranei all'Algebra pura. L'Autore dà la preferenza a quella di Gordan, in cui tali sussidi sono ridotti al minimo. Egli tratta poi del risultante e del discriminante, della trasformazione delle equazioni, dei sistemi d'equazioni a più variabili, e termina colla dimostrazione del teorema di Bezout.

***

La P. II è dedicata alla teoria delle equazioni.

Il C. 1, non appartenente all'Algebra propriamente detta, riguarda la risoluzione numerica delle equazioni. Ma poscia si rientra tosto nel dominio dell'Algebra. Nel C. 2 è esposta la risoluzione delle equazioni dei primi quattro gradi e delle equazioni reciproche. Il C. 3 sviluppa la teoria dei gruppi di sostituzioni, che viene applicata nel C. 4 allo studio delle equazioni algebriche secondo le idee di Galois. Infine nel C. 5 si tratta della risoluzione delle equazioni di quinto grado mediante le funzioni ellittiche.

***

L'opera del Perron, per il suo carattere particolare, per il rigore e l'ordine logico con cui procede, e per la ricchezza dei risultati che contiene, merita di essere raccomandata a chiunque voglia acquistare una profonda e sicura conoscenza della teoria delle equazioni.

G. VIVANTI

R. ROTHE - *Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure.* T. I. *Differentialrechnung und Grundformeln der Integralrechnung nebst Anwendungen.* 2ª ed. Leipzig-Berlin, Teubner, 1927: 8° p. VII-186.

Non so se l'avvertimento dell'autore, che lo studio della sua opera costerà a chi legge sudori e profondi sospiri, sia atto ad acquistare ad essa molti lettori; deve credersi tuttavia che le sue

Digitized by Google

parole non abbiano suscitato un eccessivo allarme, se il volumetto è giunto in tre anni alla seconda edizione. Certo è però che, almeno per chi non è digiuno della materia, è un vero piacere scorrere queste pagine, in cui essa è svolta in forma concisa e perfettamente rigorosa, ma non arida, ed illustrata con esempi scelti in campi diversi delle matematiche pure ed' applicate e della tecnica.

Ecco in breve il contenuto di questo primo volume, al quale due altri dovranno far seguito.

C. 1. — Numeri reali; limiti, infinitesimi, concetto di funzione; teoria dei polinomi; funzioni razionali fratte, algebriche, trascendenti; teoria dei limiti, continuità.

C. 2. — Derivate e differenziali; regole di derivazione; derivate d'ordine superiore; massimi e minimi, ed altre applicazioni; funzioni iperboliche; teorema del valor medio; integrazione; forme indeterminate; sviluppo di Taylor.

C. 3. — Nozioni fondamentali sopra le funzioni di più variabili indipendenti; derivate e differenziali; cambiamento di variabili; formola di Taylor e teoria dei massimi e minimi per le funzioni di più variabili.

C. 4. — Teoria delle curve piane.

C. 5. — Numeri complessi; funzioni di una variabile complessa; rappresentazione conforme.

Una ricca collezione di esercizi (118 in tutto), accompagnati da un cenno di risoluzione, accresce il pregio dell' interessante volumetto.

G. Vivanti

Digitized by Google

NECROLOGIO

MAGNUS GUSTAF MITTAG-LEFFLER nacque a Stockholma il 16 Marzo 1846. Negli anni 1865-1872 frequentò l' Università di Upsala, da cui ottenne la laurea dottorale. Negli anni 1873-1876 grazie a borse di studio concessegli dal governo svedese, frequentò le Università di Parigi, Gottinga e Berlino; notevole specialmente il soggiorno in quest'ultima città, chè ivi il giovane scienziato subì l'influenza del Weierstrass, il quale diede un'orientamento permanente alle sue ricerche matematiche. Conseguita la libera docenza nell'Univertà di Helsingfors nel 1877, vi ottenne subito una cattedra, che occupò sino al 1881, quando fu chiamato a Stockholma a professarvi l'alta analisi. Il Mittag-Leffler ebbe la singolare fortuna di legare il proprio nome a un fondamentale teorema destinato a conservare perennemente il nome del proprio scopritore; ma a lui la teoria delle funzioni analitiche è debitrice anche di altri notevoli perfezionamenti. Dotato di eminenti doti organizzatrici, fondò e diresse per 45 anni il giornale « *Acta mathematica* » i cui 50 volumi costituiscono un indispensabile ausiliare per chiunque si occupi di matematica; appoggiò con la sua autorità la creazione dei Congressi internazionali di matematici; a lui si debbono poi i congressi fra matematici scandinavi, e alla sua munificenza la creazione a Djursholm, del grande Istituto matematico che porta il nome dei conjugi Mittag-Leffler.

Carico di onori si spense addì 7 Luglio 1927.

Finito di stampare il 31 maggio 1928 (VI)

ALBERTO CONTI, Direttore responsabile

Tip. P. Cuppini - Castiglione 6[1°] - Bologna

Digitized by Google

Sezione storico-bibliografica

PUBBLICATA PER CURA

DI

GINO LORIA

SOMMARIO del Fasc. 3°: - Recensioni. R. Bricard. Leçons de Cinèmatique *(G. L.)* — G. Verriest. Cours de mathèmatiques gènèrales à l'usage des ètudiants es sciences naturelles *(G. L.)*. — G. Scheffers. Lehrbuch der Mathematik für Studirende der Naturwissenschaften und der Techick. Eine Einführung in die Differential und Integralrechnung und in die analytische Geometrie *(G. L.)* — R. Fueter. Vorlesungen über die singulären Moduln und die komplexe Multiplication der elliptischen Funktionen *(G. Vivanti)*. — A. Fraenkel. Zehn Vorlesungen uber die Grundlegung der Mengenlehre *(G. Vivanti)* — Eugen Netto. Lehrbuch der Combinatorik. Zweite Auflage *(G. Guareschi)*. — Herman Grassmann. Projektive Geometrie der Ebene, unter Benutzung der Punktrehnung dargesteltt *(G. L.)* — G. Kowalewski. Grundzuge der Differential-und Integralrechnung *(G. L.)* — Otto Volk. Entwickelung der Funktionen einer komplexen Variablen nach den Funktionen des elliptischen Zylinders *(G. L.)* — V. e K. Kommerell. Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen *(G. L.)* — L. Schukta. Zahlenrochnen. E. Kampe. Das Lebesguesche Integral eine Einfuhrung in die neure Theorie der Fnuktionen. E. Netto. Die determinanten *(G. L.)* — W. Dieck. Matematisches Lesebuch *(G. L.)* — E. Fettweis. Das Rechnen der Natuvölker *(G. L.)* — W. Lietzmann. Ueber die Beurteilun der Leistungen in der Schule. Mathematisthes-Psycologisches-Padagogisches *(G. L.)* — J. W. Dowsett. Advanced Constructive Geometry *(G. L.)* — Pietro Teofilato. Complementi di Matematica per i Licei scientifici. — **Notizie.** — **Necrologie.**

RECENSIONI

R. Bricard - *Leçons de Cinématique.* T. I., *Cinématique théorique,* p. VII-337 (1926); T. II, *Cinématique appliquée,* p. VII-349 (1927). Paris, Gauthier-Villars et C.ie éd.

Quest'opera riproduce con aggiunte molto notevoli il corso professato dall'autore all'École centrale des Arts et Manifactures.

Il primo volume è ripartito in tre Libri, il I dei quali è dedicato ad alcune teorie geometriche indispensabili a chi voglia affrontare lo studio della cinematica: calcolo vettoriale (che l'autore, però, applica, non esclusivamente, ma quando, paragonato a considerazioni geometriche o ad applicazioni della geometria cartesiana, si mostra effettivamente vantaggioso), proprietà delle curve gobbe, delle rigate e delle congruenze di rette. Nella parte propriamente cinematica l'autore ha separato lo studio degli spostamenti finiti da quello del movimento propriamente detto; tre capitoli sono consacrati alle proprietà geometriche dei moti piani e dei moti nello spazio, a uno o più parametri. Nel III Libro si

Digitized by Google

passa alle applicazioni; come tali s'incontra lo studio di alcuni movimenti speciali, fra gli altri vi si trova considerata e studiata la notevolissima configurazione formata da dieci rette ciascuna delle quali è perpendicolare a tre altre, che fu scoperta contemporaneamente dal Morley e dal Petersen; inoltre la duplice generazione degli epicicloidi, i movimenti del triedro satellite di una curva gobba, ecc.

Il volume si chiude con alcune note; una ha carattere dottrinale avendo per soggetto le ricerche dello Study e del de Saussure, che diedero luogo a recenti polemiche; altre hanno carattere storico e bibliografico e riusciranno utilissime a chi voglia proseguire questi attraentissimi studi (che in Italia trovarono sinora scarsi cultori).

Il II Volume è ripartito in due Libri.

L'autore comincia con le applicazioni tanto importanti della cinematica alla teoria degli ingranaggi, per passare poi ad altri meccanismi (quali i sistemi articolati), il tutto con sviluppi sufficienti per porre in grado il lettore di costruire i relativi modelli. S'incontrano poi le considerazioni basate sopra l'attrito e quindi la descrizione e il funzionamento delle varie specie d'apparati integratori. L'ultimo Libro è destinato a complementi delle teorie esposte, alcuni dei quali di carattere esclusivamente teorico; tali sono le pagine dedicate alla descrizione di qualsivoglia curva algebrica mediante uu sistema articolato, quelle relative alle cubiche gobbe strofoidali (sono speciali cubiche gobbe bisecanti il cerchio immaginario all'infinito), l'ottaedro articolato e il planimetro Amsler.

L'abbondanza della materia, la lucidità dello stile, l'eleganza dei calcoli, rendono degni questi volumi di essere caldamente raccomandati alla gioventù studiosa.

G. L.

G. Verriest - *Cours de mathématiques générales à l'usage des étudiants es sciences naturelles.* I Partie: *Calcul différentiel. Géométrie analytique à deux dimensions.* II édition. Paris, Gautiers-Villars, 1928. 8°, p. VIII-344 (prezzo 40 fr.).

Non appena finita la grande guerra l'Università di Louvain istituì (1919) un dottorato in chimica, introducendo nel relativo

Digitized by Google

programma un corso di matematiche (è un sistema da qualche tempo introdotto anche da noi). Da tale corso trasse origine l'opera di cui annunciamo il I Vol. in seconda edizione. A differenza di quanto fecero altri insegnanti nelle medesime condizioni, l'autore si è arrestato con la debita larghezza sopra i più delicati punti di dottrina, illustrandoli con opportune considerazioni geometriche. Il volume comincia con un richiamo delle nozioni fondamentali relative alle progressioni e ai logaritmi, prosegue con gli elementi della geometria analitica del piano e giunge al calcolo differenziale, accompagnato dalle classiche applicazioni analitiche e geometriche.

Le teorie sono illustrate sopra numerosi esempi, alcuni completamente svolti, altri proposti, scelti gli uni e gli altri, per quanto ciò fu possibile, nell'orbita delle scienze fisiche e chimiche. Se, come è presumibile, a questa edizione altre ne seguiranno, suggeriamo all'autore di modificare la figura relativa alla spirale d'Archimede, aggiungendovi il ramo che nasce attribuendo all'azimut anche valori negativi, valori che nulla autorizza ad escludere dal momento che detta spirale è l'immagine geometrica dell'equazione $\rho = a\omega$, quando la coordinata ω si fa variare da $-\infty$ a $+\infty$; una limitazione ai valori positivi delle coordinate è contraria allo spirito della geometria analitica. G. L.

G. Scheffers - *Lehrbuch der Mathematik für Studirende der Naturwissenschaften und der Techick. Eine Einführung in die Differential-und Integralrechnung und in die analytische Geometrie.* VI *verbesserte Auflage.* Mit 438 Figuren. 8° gr, p. VIII + 743. Berlin und Leipzig, W. de Gruyter und Co., 1925 (Prezzo Rtmk. 30, leg. 33).

Non sono molte le opere matematiche di cui, nel corso di vent'anni (e anni così poco propizi agli studi), siansi fatte sei edizioni. In tale condizione privilegiata si trova il trattato che oggi segnaliamo ai lettori e che potrebbe servire da libro di testo pei nostri corsi universitari di matematica per i chimici e i naturalisti. A conquistare e conservare il favore del pubblico contribuì senza dubbio lo stile dell'autore, rigoroso e brillante ad un tempo.

Digitized by Google

Tutta la materia è svolta in dodici Capitoli, di cui ecco gli argomenti: I. Grandezze e funzioni, II. Concetto di derivata, III. Funzioni algebriche, IV. Elementi della geometria analitica. V. Concetto d'integrale. VI. Le funzioni logaritmiche. VII. Le funzioni esponenziali, VIII. Le funzioni circolari IX. Le derivate d'ordine superiore, X. Calcolo di funzioni, XI. Calcolo d'integrali, XII. Funzioni a più variabili.

Le principali formole stabilite sono riunite in tabelle che formano una preziosa Appendice al volume. Numerose e accuratissime le figure. G. L.

R. Fueter - *Vorlesungen über die singulären Moduln und die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen,* unter Mitwirkung von Dr. M. Gut. II Teil. Leipzig und Berlin, Teubner, 1927: 8° p. VI-217 (da p. 143 a p. 359).

Della prima parte di quest'opera importante abbiamo dato nel *Bollettino* (Anno XXI, 1925, XXIV-XXV) una breve notizia. Più brevi ancora dobbiamo essere intorno a questa seconda parte, per il carattere speciale delle ricerche che essa contiene, ricerche che non si prestano ad essere riassunte.

Diremo soltanto che qui si effettua la scomposizione degli ideali primi di un corpo quadratico in corpi più ampi che lo contengono, si costruisce il discriminante dei corpi chiamati dall'autore « Strahlklassenkörper », ed infine si dimostra che ogni equazione abeliana in un corpo quadratico può risolversi mediante moduli singolari e funzioni ellittiche singolari. Un ultimo capitolo, dovuto a M. Gut, contiene alcuni sviluppi di calcolo relativi alla teoria esposta. G. Vivanti

---

A. Fraenkel - *Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre.* Leipzig und Berlin, Teubner, 1927: 8° p. X-182.

Sono dieci lezioni tenute a Kiel per invito della Società filosofica che s'intitola dal nome di Kant.

Digitized by Google

Nelle lezioni 1ª e 2ª l'autore, dopo avere esposto i fondamenti della teoria degli aggregati, passa in rassegna le antinomie ed i paradossi a cui essa ha dato luogo. A dir vero, le antinomie toccano piuttosto la logica in generale che non la matematica; esse si fondano essenzialmeate su quella specie di concetti che il Russell chiama *impredicabili*, per i quali si può dimostrare che l'affermazione « a è a » è falsa. Ciò nonostante effetto delle antinomie fu un periodo di sfiducia nella teoria degli aggregati. All'esposizione di ciò che si è fatto per rinsaldare i fondamenti di questa magnifica teoria e per metterla al sicuro da ogni attacco, è dedicata la serie di conferenze raccolta nel presente volume.

Le lezioni 3ª e 4ª trattano largamente degli assalti di cui sono state oggetto le idee di Cantor.

Secondo Richard, Poincaré e Russell, la sorgente delle antinomie sta nell'uso di un procedimento *non predicativo*: si fa entrare nella definizione di un concetto, individuo di una classe, il concetto di questa classe stessa. Tale fatto si presenta specialmente nel passaggio dal numerabile al non numerabile.

Il desiderio di evitare questo pericolo ha dato origine all'*intuizionismo*, di cui uno dei più tipici rappresentanti è Kronecker.

Secondo gli intuizionisti, una definizione od una dimostrazione non è legittima se non è *costruttiva*, cioè se non indica il modo di costruire l'oggetto che si vuol definire, o di cui si vuol dimostrare l'esistenza. Cade così il teorema della possibilità di disporre qualunque insieme in serie ben ordinata, come cadono molte dimostrazioni del teorema fondamentale dell'algebra; cessa l'applicabilità generale del principio del terzo escluso; non è più vero che qualunque problema matematico o può risolversi o può dimostrarsi irrisolubile; non ha più significato la definizione cantoriana di aggregato, e viene profondamente alterato il concetto di aggregato continuo.

Per stabilire su base sicura la teoria degli aggregati, è necessario fondarla sopra un certo numero di assiomi, all'esposizione ed alla illustrazione dei quali sono dedicate le lezioni 5ª e 6ª. Un solo *concetto primitivo*, quello di « aggregato », una sola *relazione primitiva*, quella di « ε » o « è elemento di », sono necessari. Gli assiomi sono 7, e cioè:

1. Se a, b, A sono aggregati, dalle relazioni $a \varepsilon A$, $a = b$ segue $b \varepsilon A$.

2. Se a e b sono aggregati, esiste un aggregato $\{a, b\}$ avente come soli elementi a e b.

Digitized by Google

3. Se m è un aggregato di aggregati, esiste un aggregato Sm formato da tutti gli elementi degli aggregati contenuti in m.

4. Se m è un aggregato, esiste un aggregato Um formato da tutti gli aggregati parziali di m.

5. Se m è un aggregato, E una proprietà non priva di significato (« eine sinnvolle Eigenschaft »), esiste un aggregato m_E formato da tutti gli elementi di m aventi quella proprietà.

6. Se m è un aggregato di aggregati non vuoti nè aventi elementi comuni, esiste almeno un aggregato avente uno ed un solo elemento comune con ciascuno degli aggregati componenti.

7. Esiste almeno un aggregato M contenente come elemento l'aggregato nullo, e tale inoltre che, se m è un elemento di M, appartiene pure ad M l'aggregato costituito dall'unico elemento m.

Un punto debole del sistema degli Assiomi è la « sinnvolle Eigenschaft » che figura nell'assioma 5. Nelle lezioni 7ª e 8ª l'autore mostra anzitutto come questo concetto possa eliminarsi coll'introduzione del concetto, opportunamente definito, di « funzione di un aggregato variabile ». Egli fa vedere poi come, di fronte al sistema di assiomi assunto, cadano le antinomie a cui ha dato luogo la primitiva teoria degli aggregati. Certo non può escludersi il pericolo di nuove obiezioni, fondate sul carattere *non predicativo* delle operazioni descritte negli assiomi (v. p. es. l'assioma 4°); ma non è neppure escluso che queste eventuali obiezioni possano superarsi col sostituire ai processi non predicativi processi predicativi, o col dimostrare che i processi adottati non implicano alcuna contraddizione.

La fine della lezione 8ª e le lezioni 9ª e 10ª sono dedicate allo svolgimento della teoria degli aggregati sulla base degli assiomi.

Al concetto di equivalenza si può giungere come segue.

Si definisca come *corrispondenza* tra due aggregati A, B senza elementi comuni un aggregato parziale del prodotto AB, tale che ciascun elemento di A e ciascun elemento di B figura in uno ed in uno solo dei suoi elementi. Due aggregati senza elementi comuni sono equivalenti sempre e soltanto se l'aggregato delle corrispondenze tra essi non è nullo.

Meno semplice è l'introduzione dei concetti di ordine e di serie ben ordinata.

Allo sviluppo della teoria degli aggregati finiti secondo i nuovi principii dedica l'autore alcuni cenni. Notevole l'enumera-

Digitized by Google

zione delle varie definizioni di aggregato finito che furono date, e lo studio della loro reciproca equivalenza.

Infine si propone l'autore di esaminare se il sistema di assiomi adottato sia completo, se non implichi alcuna contraddizione, e se i vari assiomi sieno tra loro indipendenti.

Alla frase « sistema completo » possono darsi due significati diversi. O s'intende che il sistema debba bastare a tutti i bisogni presenti e futuri della disciplina che su di esso si vuole fondare; ed allora è chiaro che non si potrà mai dimostrare che un sistema è completo. O s'intende invece che il sistema sia sufficiente a determinare in modo unico i concetti e le relazioni primitive (nel caso nostro, il concetto di aggregato e la relazione ε); in questo senso è certo che il sistema non è completo.

Anche il problema della non contraddittorietà è ben lungi dall'essere completamente risolto.

Riguardo alla questione dell'indipendenza, l'autore si trattiene particolarmente sull'assioma 6°, limitandosi a pochi cenni sui rimanenti.

Una lista bibliografica delle più recenti pubblicazioni sulla teoria degli aggregati chiude il volume, che sarà letto con profitto, non solo dai matematici, ma anche da tutti coloro che si interessano alla filosofia delle scienze esatte.

G. Vivanti

Eugen Netto - *Lehrbuch der Combinatorik. Zweite Auflage erweitert und mit Anmerkungen versehen von* Viggo Brun und Th. Skolem. Teubner, 1927.

Questo volume piuttosto che una seconda edizione del libro ben noto del Netto ne è una ristampa aggiornata mediante l'aggiunta di nuovi capitoli scritti dai signori Viggo Brun e Th. Skolem. Infatti, le prime 258 pagine non sono altro che la riproduzione integrale, ottenuta con procedimenti fotomeccanici, dei 13 capitoli di cui si compone la prima edizione. Sul contenuto di questi tredici capitoli il Prof. Loria riferì già estesamente, e con giuste lodi, in una recensione pubblicata nel *Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche* (anno V, 1902, pag. 53-54).

Digitized by Google

Nel 14° capitolo (primo aggiunto), intitolato « Die Verteilungsfunktion », il Sig. Viggo Brun studia una cosidetta funzione di ripartizione (ossia il numero delle ripartizioni di sfere nere in numero da s_0 ad s, di sfere rosse in numero da r_0 ad r, ..., di sfere bianche in numero da w_0 a w in recipienti dei quali il primo possa contenere da σ_0 a σ sfere, il secondo da ρ_0 a ρ sfere, ..., l'ultimo da ω_0 ad ω sfere), determinandola in certi casi speciali. Particolari valori di questa funzione esprimono le operazioni combinatorie più conosciute; con l'uso di essa viene facilmente risolto il problema di trovare in quanti modi un numero é esprimibile mediante un numero dato di fattori; inoltre, vengono espresse mediante i coefficienti binomiali le somme del tipo

$$1+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{s}\right).$$

Nel 15° capitolo intitolato « Gruppirungen, kombinatorische Reziprozitäten, Paarsysteme », il sig. Th. Skolem esamina, tanto in generale quanto in casi particolari, i modi di distribuire oggetti diversi gli uni dagli altri in un certo numero di sistemi, i quali possono avere elementi comuni. Di poi passa a prendere in speciale considerazione le distribuzioni di oggetti in sistemi di coppie, esponendo di questi sistemi una teoria che presenta stretti collegamenti con l'analysis situs.

Infine in alcune note il sig. Skolem traccia alcuni interessanti ampliamenti di argomenti trattati dal Netto nei primi tredici capitoli, e dà notizie sullo stato attuale delle principali questioni di analisi combinatoria.

Forse sarebbe stata opportuna una migliore revisione del capitolo 13°, nel quale il Netto aveva data una raccolta di formole relative ai coefficienti binomiali; p. es., ivi, alcune limitazioni a formole, e più specialmente ad una data da Cauchy, non hanno alcuna ragione di essere.

G. Guareschi

Hermann Grassmann - *Projektive Geometrie der Ebene, unter Benutzung der Punktrehnung dargestellt.* II Band. Ternäres. I Teil, mit 167 Figuren im Text. 8°. p. XII-410,

Digitized by Google

1913; II Teil. Mit 259 Figuren im Text. 8°. p. XVI-522, 1927. (Leipzig, B. G. Teubner).

Nel rendere conto della I Parte di questa opera (v. *Bollettino di bibl. e storia delle scienze matematiche*, T. XIV, 1912, p. 90) abbiamo detto che essa intende di svolgere completamente la materia esposta in succinto dall'autore in tre programmi scolastici, scopo dei quali era di applicare i metodi creati dal suo illustre genitore alla geometria projettiva. Ciò era stato fatto nella succitata Parte per quanto concerne il campo binario. Al campo ternario sono dedicati i due imponenti volumi che vogliamo segnalare a quelli fra i nostri lettori che coltivano i metodi vettoriali e la geometria projettiva. Osserviamo anzitutto che nel lungo periodo di quattordici anni, interposto fra la pubblicazione dei due volumi dedicati al campo ternario, in conseguenza della grande guerra le condizioni del commercio librario resero problematica la stampa del secondo; ciò non ostante e malgrado la morte dell'autore, avvenuta nel frattempo (21 gennaio 1922), la pubblicazione fu possibile grazie al generoso concorso di parecchi enti culturali e di benemeriti Mecenati, ai quali va rivolto il più caldo elogio.

L'autore — notiamolo a sua lode — pur essendo un convinto estimatore dell'*Ausdehnungslehre*, non è animato da quell'intransigenza che caratterizza i fanatici ciechi; infatti nella sua opera, oltre i vettori, si trovano applicati anche i vari sistemi di coordinate a tutti noti e spesso anche il puro ragionamento geometrico. Siffatti strumenti sono applicati a stabilire tutte le proprietà note (senza esclusione di quelle metriche) delle projettività e delle correlazioni piane, delle coniche, sia considerate isolatamente sia come elementi di sistemi lineari, e delle curve di terzo ordine e terza classe, di cui è noto l'intervento nello studio delle reti di curve di secondo ordine e dei tessuti di curve di seconda classe; a quelle proprietà altre ne furono aggiunte dall'autore, su cui, per deficienza di spazio, non ci è dato di arrestarci. Solo notiamo che l'autore ha incontrato alcune nuove situazioni invarianti di coniche e sistemi di coniche, su cui richiamiamo l'attenzione di coloro che s'interessano alla inesauribile teoria delle coniche (alcune furono studiate da discepoli dell'autore in Dissertazioni di laurea citate nell'opera che esaminiamo).

Dei risultati ottenuti è agevole prendere notizia, avendo avuto cura l'autore di enunciarli in appositi teoremi, i quali, per quanto

Digitized by Google

concerne il piano, raggiungono il cospicuo numero di 969 (per il campo binario nel precedente I Vol., se ne trovano 272).

A facilitare la consultazione dell'opera in discorso servono un particolareggiato indice posto in principio di ciascun volume e un altro per materie collocato in fine.

Si può lamentare che all'autore sia stato negato di completare la propria ardua fatica con un'analoga trattazione della geometria del campo quaternario; ma è presumibile che non tarderà a sorgere persona in grado di applicare i metodi del sommo Grassmann allo studio delle projettività e delle collineazioni nello spazio, delle quadriche, ecc. Ma non vogliamo tacere come ancora più importante si presenti oggi il problema di investigare a fondo i metodi indicati dal grande Grassmann per generare le curve e le superficie d'ordine qualunque, onde decidere se siano applicabili senza restrizione alcuna; ma è presumibile che per ciò bisognerà ricorrere a considerazioni più elevate e profonde, che soltanto la moderna analisi è in grado di somministrare.

G. L.

G. Kowalewski - *Grundzüge der Differential-und Integralrechnung.* IV verbesserte Auflage, vermehrt durch einen Anhang über Fredholmsche Determinanten und Integralgleichungen. Mit 31 Figuren im Text. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1928, 8°. p. 418 (Prezzo del vol. leg. Mk. 16).

Della prima edizione di quest'opera fu reso conto (1911) nel vol. XIII del *Bollettino di Bibliografia e Storia* (p. 69). Il favore accordatole dal pubblico è dimostrato dal fatto che ora siamo in grado di annunciarne una IV edizione migliorata e accresciuta di due appendici, una relativa ai determinanti di Fredholm, l'altra alle equazioni integrali. Per chi non ha sott'occhio la succitata recensione indichiamo quì i temi svolti nei diciannove Capitoli componenti il volume:

I. Numeri irrazionali. II. Limiti. III. Le operazioni razionali. IV. Funzioni di una variabile. V. Interpretazione geometrica dei numeri e delle funzioni. VI. Differenziazione delle funzioni di una variabile. VII. Serie infinite. VIII. Applicazioni delle serie di po-

Digitized by Google

tenze. IX. Massimi e minimi dì funzioni a una variabile. X. Differenziazione delle funzioni a più variabili. XI. Massimi e minimi delle funzioni a più variabili. XII. Inversione di una funzione o di un sistema di funzioni. XIII. Integrali indefiniti. XIV. Integrali definiti. XV. Integrazione delle serie. XVI Integrali impropri. XVII. Applicazioni geometriche degli integrali definiti. XVII. Integrali doppi e integrali di linee. XIX. Applicazioni geometriche degli integrali doppi.

L'autore, che è simpaticamente cononosciuto in Italia per avere tradotto in tedesco alcuni volumi del compianto prof. Cesàro, ha dedicata la presente pubblicazione alla memoria di lui, mostrando così di mantener vivo il sentimento di ammirazione per il geniale matematico, tragicamente scomparso nella pienezza della sua produzione scientifica. G. L.

Otto Volk - *Entwickelung der Funktionen einer komplexen Variabeln nach den Funktionen des elliptischen Zylinders.* 8°. p. 38. In Kommission bei B. G. Teubner in Leipzig, 1920.

Molte questioni di fisica matematica e di astronomia conducono all'equazione differenziale seguente:

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2} + (\lambda^2 \cos^n \varphi + B)\, y = 0\,;$$

perciò essa diede luogo ad una folla di ricerche, più o meno pregevoli, che l'A. enumera e giudica nel § I della sua memoria. I primi risultati importanti al riguardo sono dovuti a E. Heine, il quale vi pervenne mediante nuovi enti analitici da lui chiamati appunto « funzioni del cilindro ellittico ». Ora lo scopo che si propose l'A. è di mostrare rigorosamente che una funzione di variabile complessa si può svolgere in serie procedenti secondo siffatte funzioni, per argomenti, naturalmente, complessi: il metodo usato è modellato sulla procedura tenuta da C. Neumann per stabilire l'analogo risultato per funzioni di Bessel: come nel detto caso si pervenne alle funzioni $O_n(z)$ connesse alle funzioni di

Digitized by Google

Bessel $J_n(s)$, ma soddisfacenti un'equazione differenziale non omogenea differente da quella di Bessel, così anche nel caso presente si manifestò la necessità d'introdurre nuove funzioni ausiliari, le quali soddisfano un'altra equazione differenziale, che si può ricondurre ad un'equazione differenziale non omogenea delle funzioni del cilindro ellittico. G. L.

V. e K. Kommerell - *Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen.* III Auflage. Berlin und Leipzig Vereinig. wissensch. Verleger, 1921. I. Band, mit 28 Figuren, p. VIII-184. II Band, mit 13 Figuren, p. 196.

Questi due volumetti fanno parte della *Sammlung Schubert*, ove portano i numeri XXIX e XLIV; trovasi in essi compendiata nel modo più felice, la parte sostanziale degli elementi della geometria differenziale delle curve gobbe e delle superficie. È certo che continueranno in avvenire a godere il favore che il pubblico ha loro accordato; chè ogni nuova edizione si differenzia dalle precedenti per migliorie in molti particolari, consigliate od imposte dai progressi della scienza. Trattandosi di un lavoro ormai giudicato (e favorevolmente!) non è il caso di addentrarci in una analisi completa e minuta.

G. L.

L. Scrutka - *Zahlenrechnen*, p. X + 146, 1923.

E. Kampe - *Das Lebesguesche Integral. Eine Einfuhrung in die neuere Theorie der reellen Funktionen.* 8° p. IV-151. Prezzo R. M. 6. 1923.

E. Netto - *Die Determinanten.* II *verbesserte Auflage von* L. Bieberbacr. 8° p. VI + 122. Prezao R. M. 4,40. 1925.

Sono volumi appertenenti alla nota *Sammlung Mathematisch-Physikalische Lehrbucher*, edita dalla Casa Teubner di Lipsia.

Digitized by Google

Il tema del primo è lo stesso di un volume del prof. Mehmke di cui parlammo a suo tempo; ma è trattato diversamente, molto più elementarmente, perchè non esce dal campo aritmetico e sono esclusi i metodi grafici che culminarono nella Nomografia. A meglio delinearne il contenuto serve il seguente indice dei paragrafi: Generalità; sistemi di numerazione; addizione e sottrazione; moltiplicazione; macchine calcolatrici utili nella moltiplicazione; divisione; operazioni aritmetiche più complicate; elevazione a potenza ed estrazione di radice; calcoli di polinomi; logaritmi; funzioni trigonometriche.

Il secondo si può caratterizzare per una introduzione alla recente teoria delle funzioni di variabili reali secondo le feconde vedute di G. Cantor spinte sino al punto da porre il lettore in grado di conoscere la moderna teoria della misura e la nozione di integrale di Lebesgue. Nel caso di funzioni limitate l'autore si attiene fedelmente alla definizione datane dall'eminente matematico francese; ma nel caso di funzioni non limitate dà la preferenza al metodo semplicissimo del Perron svolto poi da Bauer, Hake e Alexandroff.

Il lettore desideroso di approfondire ed estendere le proprie cognizioni sopra l'importante argomento troverà indicate nel volume che annunciamo le migliori opere a cui ricorrere.

Il terzo rappresenta la ricomparsa, dopo quindici anni, di una opera che fu giudicata favorevolmente quando l'autore (oggi morto) la pubblicò; il fatto che si sentì il bisogno di una nuova edizione e che questa non differisce sostanzialmente dalla prima sono fatti che costituiscono il migliore elogio dell'opera in discorso. Da essa, oltre le proposizioni fondamentali della teoria, se ne apprendono le principali applicazioni algebriche ed alcune geometriche. I determinanti costituiscono uno strumento di uso così frequente, che il conoscerne i fondamenti è una necessità non solo per il matematico, ma anche per chi coltiva la fisica: onde fu ottima l'idea di inserire questo volumetto in una raccolta destinata ad entrambe queste categorie di investigatori.

Aggiungiamo che della stessa raccolta furono di recente pubblicate una III ed. (1926) del volume di W. v. Ignatowski, *Die Vektoranalysis und ihre Anwendung in der theoretischen Physik* e J. L. Coolidge, *Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung*, versione di un'opera inglese che ottenne, al suo apparire, il più lusinghiero successo.

G. L.

Digitized by Google

W. Dieck - *Mathematisches Lesebuch.* 5 tomi in un volume in 8° di p. 502. Sterkade, W. Osterkamp 1920-21.

L'osservazione, ripetutamente fatta, che la matematica è capace d'interessare ed entusiasmare soltanto pochi eletti fece naturalmente sorgere l'idea di renderne l'insegnamento meno dogmatico e più variato introducendo notizie storiche, aneddoti, paradossi e simili. Altro sistema per conseguire lo stesso scopo è quello di porre nelle mani degli scolari un libro di amena lettura, con squarci di vari autori relativi alle scienze esatte. L'opera di cui scrivemmo superiormente il titolo rappresenta un tentativo, il primo se non erriamo, in tale senso. Gli articoli ivi raccolti contengono in parte notizie biografiche ed in parte considerazioni storiche; alcuni trattano questioni di ordine didattico ed altri hanno attinenza con la psicologia, per quanto interessa il matematico; nè mancano articoli che servono a completare, da vari punti di vista, la coltura dell'alunno (notiamo ad esempio quelli concernenti il regolo calcolatorio e le macchine calcolatrici, nonchè quelli relativi alle assicurazioni, temi che a ragione l'autore giudica non debbano venire ignorati da alcuna persona colta). Quando avremo detto che non mancano articoli dedicati alla Prospettiva e cenni — sia pure fugaci — sulla Relatività, avremo raccolti tutti gli elementi per dimostrare ai lettori che il Dick si è regolato sopra criteri di un esteso eccletismo. Si tratta di un primo tentativo, per cui non è il caso di essere troppo severi; ma non possiamo tacere che ci sembra che l'autore abbia attinto gli elementi della sua collezione con troppa preferenza per i « piccoli » in paragone dei « grandi »; a noi sembra che un' antologia matematica, quale è la presente opera, dovrebbe proporsi, oltre che di divertire, anche di insegnare il modo di scrivere in base agli esempi offerti da coloro che raggiunsero i pinnacoli della gloria. Certamente che una scelta in tale senso è ben lungi dall'essere facile; ma il risultato che essa darebbe è talmente importante che varrebbe la pena di affrontare gli ostacoli che si delineano non appena si mediti sul modo di condurla.

Auguriamo che qualcuno, con la fida scorta di qualche intelligente editore, affronti la questione e la risolva in modo migliore di quanto fu fatto nel volume che ci sta dinanzi.

G. L.

Digitized by Google

E. Fettweis - *Das Rechnen der Naturvölker*. 8°. p. IV-96. Leipzig, B. G. Teubner, 1927. (Prezzo R. M. 5).

Un secolo è ormai trascorso dal giorno (2 Marzo 1829) in cui Guglielmo Humboldt leggeva all'Accademia di Berlino quella memoria sopra i sistemi di numerazione in uso fra i differenti popoli allora conosciuti, la quale, essendo stata pubblicata nel vol. IV del G. di Crelle, si diffuse rapidamente in tutto il mondo. Il valore di quel lavoro non è certamente diminuito; ma le numerose esplorazioni fatte da allora sino ad oggi hanno permesso di conoscere molte popolazioni che l'illustre autore del *Cosmos* non potè studiare, onde naturale e ragionevole fu l'idea del sig. Fettweis di esaminare, dal punto di vista aritmetico, le relazioni di viaggiatori venuti di recente a contatto con popolazioni che ben possono dirsi allo stato di natura. L'ampiezza del compito da lui assunto emerge dalla semplice constatazione del fatto che ammontano a circa cinquanta gli aggruppamenti umani da lui considerati e che, per conoscerne il modo di contare, egli dovette consultare non meno di duecento cinquanta pubblicazioni (1) (notiamo per incidenza che nell'elenco che chiude il volume che ci sta sott'occhio non si trova alcun lavoro italiano, non sappiamo se realmente non ne esista, o se sia sfuggito all'autore).

Le indagini di cui il presente volume compendia le conclusioni valsero a sradicare alcune erronee diffusissime opinioni. Così, mentre noi non sappiamo concepire una società, piccola o grande che sia, senza aritmetica, pare che molte tribù vivano benissimo pur senza disporre di quel cospicuo apparato numerico che a noi sembra indispensabile: ciò non ostante i pastori si accorgono subito della scomparsa di un elemento della loro gregge, al pari dell'anitra, che pur non sapendo contare, non perde mai alcuno dei piccoli che la seguono. Altra opinione errata è quella che la nomenclatura aritmetica usata da un popolo dia una misura precisa dell'altezza del suo sapere aritmetico, essendo provato che presso alcune tribù si sanno concepire e trattare numeri assai più considerevoli di quelli che si possono esprimere.

---

(1) Fra esse abbiamo cercato invano (e con sorpresa) il notevole volume di L. G. du Pasquier: *Le développement de la notion de nombre* (Mém. de l'Univ. de Neuchatel, T. III, 1927).

Digitized by Google

Le stesse indagini mostrano per converso quanto esteso sia l'uso del calcolo digitale e, in conseguenza, quanto numerosi siano i popoli ancora semi-barbari il cui sistema numerale ha per base i numeri 10 e 20: così se Aristotele rialzasse il capo dalla tomba in cui trovasi da secoli, potrebbe trovare nuove conferme alla spiegazione da lui data dell'intervento del 10 nella base dei metodi di calcolo dei popoli sino allora conosciuti (1).

Nel breve giro di un centinaio di pagine l'autore ha saputo condensare una massa straordinaria di notizie relative al tema da lui svolto; a noi riesce impossibile riassumerle nel poco spazio di cui disponiamo. Si può forse lamentare che egli non abbia istituito alcun paragone fra i fenomeni da lui notati in popoli oggi allo stato di natura con quanto le storie della matematica insegnano riguardo all'antica Grecia e l'Europa medioevale; ma ciò dipende dal fatto che, se non c'inganniamo, il suo interesse era rivolto meno alla storia che alla pedagogia scientifica nelle sue applicazioni all'insegnamento della matematica; e infatti il suo interessante e dotto volume finisce con alcune osservazioni aventi attinenza con questi argomenti. Chiuderemo questi cenni riferendo alcune delle sue conclusioni: I. I dati raccolti dai viaggiatori consultati da lui mostrano l'ufficio preponderante del calcolo digitale nel primo stadio di sviluppo dell'aritmetica; di ciò i pedagogisti devono tener conto prima di combattere l'uso di questo prezioso ausiliare dell'insegnamento. 2. I psicologi osservarono che il primo numero che il fanciullo impara a concepire è, non l'1, ma il 2; ebbene è questo un fatto che accade anche fra i popoli allo stato semibarbaro. 3. Altro fatto constatato dai fisiologi è che, nell'infanzia, numeri cardinali e numeri ordinali si presentano contemporaneamente; ora anche fra i popoli di civiltà primitiva si riscontra il medesimo fenomeno. 4. La psicologia sostiene che l'insegnamento matematico nell'infanzia debba prendere le mosse da pratiche applicazioni e essere sempre mantenuto in contatto con le stesse; ora le indagini compiute dall'autore mostrano che presso gli agglomeramenti umani in cui l'aritmetica si è un po' sviluppata, lo fu grazie alle necessità della vita sociale.

Basti ciò a dimostrare che il volumetto che segnaliamo ai

---

(1) Fra i sintomi d'influenza del numero delle dita della mano sta l'indicazione del 10 con la parola mezzo uomo incontrata presso una tribù americana e il sistema di indicare il 9 come 10 meno 1 rilevato presso una popolazione australiana.

Digitized by Google

lettori del *Bollettino*, ha, oltre un valore informativo, il pregio di toccare alcuni problemi del più alto interesse pratico, giacchè concernono la formazione intellettuale della società di domani.

G. L.

W. Lietzmann - *Ueber die Beurteilung der Leistungen in der Schule. Mathematisches-Psychologisches-Padagogisches.* 8° p. 117. Leipzig, B. G. Teubner, 1927. (Prezzo R. M. 6).

Fra le questioni che, si affacciano all'insegnante, qualunque sia il suo grado, nessuna è più grave e più delicata di quella di giudicare e classificare i propri alunni. A rendersi conto di quanto malsicuri siano i metodi per risolverla è sufficiente tenere presente i risultati di un'esperienza compiuta in America: uno stesso lavoro sottoposto al giudizio di 116 professori della materia ottenne classificazioni variabili fra 30 e 90. Si cita anche il fatto che uno stesso còmpito, il quale era stato copiato, ottenne una volta 2 punti e un'altra 4; e si è anche notato che il mutamento dell'insegnante porta a una discontinuità nelle classificazioni ottenute da un corso di scolari, il quale mutamento non potè spiegarsi che (per così dire) con un improvviso cambiamento dell'unità di misura.

Molti tentativi sono stati fatti per ovviare questi errori (tanto più deplorevoli e gravi in quanto sono gli alunni che pagano gli errori del maestro); noi italiani ricordiamo, ad esempio, un interessante volume di ricerche compiute dal Bordoni *Sopra gli esami scolastici* (Milano 1837) nell'epoca in cui si facevano le più rosee previsioni intorno all'applicazione del calcolo delle probabilità ai più disparati fenomeni sociali. Al di là delle Alpi studi sull'argomento furono fatti da varii punti di vista; presso di noi, a quanto ci consta, essi non attrassero sinora la debita attenzione, perciò raccomandiamo ai nostri lettori il volumetto di cui riferimmo il titolo; esso è dovuto ad un coscienzioso insegnante, il quale alla pedagogia matematica dedicò estesi studi e apprezzatissime pubblicazioni. Esprimiamo, anzi il desiderio che esso venga tradotto in italiano, avvertendo subito che tali e tanti sono i riferimenti che vi si trovano ad altri lavori sull'argomento, che una semplice versione letterale riuscirebbe poco intelligibile epperò di scarso giovamento;

Digitized by Google

chi si accingesse a quel lavoro dovrebbe prima prendere conoscenza della letteratura sull'argomento, per aggiungere le necessarie informazioni sugli scritti largamente sfruttati dall'autore.

Per meglio caratterizzare il volume in parola riferiamo alcune delle frasi che si leggono al termine di esso.

« Che cosa si propone questo scritterello? Noi insegnanti abbiamo l'abitudine di non arrestarci su certe cose relative al nostro lavoro quotidiano, di non dedicarvi molta riflessione. Noi non ci rompiamo la testa sul come arriviamo a fissare le classificazioni, sul valore obbiettivo che esse hanno, sul grado in cui esse siano giuste. Soltanto pochi insegnanti si sono interessati a tali questioni; perchè i più ritengono si tratti di cose intuitive. Invece il presente scritto tenta di considerare il giudicare gli alunni psicologicamente e poi matematicamente l'elemento psicologico. Certamente non è intenzione di esso di bandire il senso istintivo pedagogico e di fare del maestro una macchina registratrice di numeri da cui trarre meccanicamente delle medie. In ogni occasione entra nella determinazione del numero il giudizio subbiettivo del maestro, anche nel più obbiettivo dei metodi di prova. Ma si vuole dare un premuroso incitamento all'applicazione dei metodi psicologici e matematici ad uno dei più gravi problemi della pedagogia ».

G. L.

J. W. Dowesett - *Advanced Constructive Geometry.* 8° p. VIII + 340. Oxford, Univ. Press, 1927.

Essendo la geometria descrittiva la disciplina che insegna a eseguire sul piano le costruzioni relative alle figure a tre dimensioni, è naturale cominciare con una esposizione delle costruzioni concernenti le figure piane. A tale concetto è informata la *Geometria di sito nel piano e nello spazio* scritta più di un secolo fa da V. Flauti; dallo stesso trae origine l'opera che annunziamo, la quale appunto consta di due parti intitolate risp. *Geometria piana* e *Geometria descrittiva*. L'esposizione di questa è diretta piuttosto alle applicazioni meccaniche, che alla rappresentazione e allo studio di figure prettamente geometriche.

G. L.

Digitized by Google

PIETRO TEOFILATO - *Complemento di Matematica per i Licei scientifici.* Editore Paravia. Pag. 312.

L'opera comincia con un notevole riassunto dell'algoritmo aritmetico che l'Autore chiama « aritmetica universale » e che sarebbe però più efficace se spogliato un pò di quel formalismo simbolico convenzionale al quale gli studenti delle nostre scuole non sono abituati.

Nel Cap. II è svolta la teoria dei numeri reali assoluti e segnati, fondata sulla misura dei segmenti orientati; l'esposizione è chiara e sarebbe anche migliore se opportunamente accorciata; in fine del capitolo trovano un cenno le operazioni aritmetiche che danno luogo agli irrazionali e agli immaginari.

Il Cap. III tratta delle coordinate cartesiane nel piano, e della rappresentazione grafica delle funzioni: $y = ax + b$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = \frac{a}{x}$, delle funzioni trigonometriche, della spirale logaritmica, le quali vengono poi applicate allo studio delle inequazioni, dei logaritmi, della trigonometria e alla risoluzione grafica di equazioni o di sistemi; in particolare si dà pure qualche cenno sul regolo calcolatore, sul problema di Delo e su quello della trisezione dell'angolo.

Il Cap. IV. tratta poi della riduzione di formule alla calcolabilità logaritmica, il che offre occasione all'Autore per risolvere alcuni problemi interessanti di geometria pratica fra i quali quello di Pothenot (che l'Autore chiama di Snellius).

Il Cap. V. è dedicato alla trattazione della trigonometria sferica che è svolta partendo dalle formule sui triangoli obliquangoli, seguono la risoluzione dei triangoli e alcune notevoli applicazioni fra cui la determinazione della posizione di una nave in mare e la costruzione di un orologio solare sopra un piano orizzontale.

Nel Cap. VI. sono trattati i poliedri euleriani, quelli platonici e quelli regolari; in particolare l'Autore dà la costruzione di questi ultimi e delle loro sfere inscritte e circoscritte.

Il Cap. VII. è dedicato alla similitudine nel piano e nello spazio; essa viene definita mediante la corrispondenza fra due sistemi cartesiani con unità di misura differenti e di rapporto dato; in particolare sono studiati l'omotetia e l'inversione, delle quali sono date costruzioni geometriche e meccaniche.

Digitized by Google

Nel Cap. VIII, l'Autore dà qualche cenno sul numero di parametri necessario per individuare un ente nel piano o nello spazio, e sulla omogeneità necessaria dei due membri delle formule di geometria e di fisica.

Il Cap. IX. svolge la teoria dei limiti di successioni ordinate e di funzioni in forma non elevata e piuttosto empirica.

Nel Cap. X. l'Autore tratta in forma semplice della derivazione, attenendosi piuttosto a dimostrazioni ed esemplificazioni geometriche o meccaniche e limitando lo studio alle derivate fondamentali.

Nel Cap. XI. si applicano le derivate alla ricerca di massimi e minimi di funzioni ed alla determinazione delle equazioni delle tangenti ad una curva.

Il Cap. XII tratta il problema dell'integrazione partendo dall'integrazione grafica, passando poi all'integrazione come inversa della derivazione ed infine all'integrazione come operazione limite di una speciale somma.

Il Cap. XIII svolge in forma breve e semplice la teoria della divisibilità e delle congruenze.

Infine il Cap. XIV. parla del calcolo combinatorio, del binomio di Newton e dà un cenno sulle probabilità.

In complesso il libro in questione è un'opera che, merita di essere segnalata per l'originalità di esposizione di molti argomenti, originalità che tien conto dei legami della matematica colle sue eventuali applicazioni alle scienze affini; è un libro che dopo un'accurata revisione nei dettagli della parte espositiva ed un'aggiunta di esercizi proposti o avviati può costituire un buon libro di testo per gli studenti delle Scuole Secondarie Superiori.

GIUSEPPE BURNENGO

NOTIZIE

J. H. Lambert e la teoria delle assicurazioni. Fra i matematici tedeschi del Secolo XVIII il Lambert occupa un posto eminente; tuttavia le sue opere non furono sempre apprezzate a dovere; così, soltanto in questi ultimi tempi, venne posta in chiaro la posizione che a lui spetta nella storia della geometria non euclidea. Ora il prof. A. Loewy, compiendosi (addì 25 settembre 1927)

Digitized by Google

centocinquant'anni dalla sua morte, pubblicò, in un volume giubilare dovuto al prof. A. Manes, un dotto articolo ove, in base a una profonda analisi di due lavori del Lambert facenti parte dei noti *Beyträge zum Gabrauche der Mathematik und deren Anwendung* (Bd. I, 1765, e III 1772) è dimostrato che egli ebbe una visione netta, direbbesi persino profetica, di quanto doveva essere in avvenire la scienza delle assicurazioni e che propose la considerazione di alcuni concetti che furono poi introdotti in quella scienza in tempi assai vicini a noi.

Una biografia di C. H. Müller (n. a Laurenburg, il 7 aprile 1855, m. a Francoforte il 17 marzo 1927), dovuta a W. Lorey leggesi nel Vol. LVIII della *Zeitschrift f. mathem. und naturw. Unterricht*); la segnaliamo a coloro che s' interessano alla storia dell' insegnamento matematico nei vari paesi d' Europa.

Onoranze a F. Klein. Sulla casa (Jägerhofstrasse 11) ove nacque a Düsseldorf il rimpianto matematico venne murata una lapide con l' inscrizione seguente:

IN DIESEM HAUSE — WURDE DER — MATHEMATIKER — FELIX KLEIN — AM 25 APRIL 1849 — GEBOREN.

L' inaugurazione ebbe luogo il 12 ottobre 1927 con un discorso del prof. Blumenthal, il quale fece risaltare i meriti dell'estinto riguardo alla riforma dell' insegnamento della matematica, delle scienze naturali e della tecnica, proclamandolo anzi come padre di tale riforma. Una via di quella città porterà presto il nome del Klein.

La " Collectanea-Enriques „ in Francia. Questa ben nota opera sta per essere tradotta completamente in francese; ma, invece di ripartirne la materia in tre volumi, come accadde per l'originale italiano, essa darà luogo a 22 fascicoli. Uno di questi è già stato pubblicato col titolo « L'évolution des idées géométriques dans la pensée grecque: point, ligne, surface, par F. Enriques, trad. par M. Solovine » (Paris, Gauthier-Villars 1927). L' intera opera porterà per titolo « Questions relatives aux mathematiques élémentaires ».

Progetto di una crestomanzia matematica. Il prof. G. D. Walcott ha per lungo tempo progettato una collezione di fonti per la storia della scienza durante il periodo 1500-1900. Per tra-

Digitized by Google

durre in atto questo progetto l'American philosophical Society ha ottenuto dalla Fondazione Carnegie un fondo sufficiente per iniziare l'indicata pubblicazione, con l'intesa che la somma che produrrà la vendita dei primi due volumi serva alla pubblicazione dei successivi. Il secondo volume, che si riferirà alla matematica, verrà compilato sotto la direzione di una commissione composta dei prof.i R. C. Archibald, F. Cajeri e D. E. Smith.

Secondo il piano da essa fissato ogni volume conterrà articoli di pag 6-20 ognuno, ciascuno dei quali sarà costituito come segue: 1. Titolo, autore e fonte dello squarcio scelto; 2. Nome e ufficio dell'editore dell'articolo; 3. Cenno delle ragioni per cui detto squarcio fu giudicato abbastanza importante per essere pubblicato; 4. Il testo originale trascritto e riveduto con somma cura. 5. Traduzione dello stesso in inglese, quando l'originale sia in altra lingua; 6. Brevi spiegazioni, mediante note e commenti, dei passi reputati oscuri.

La somma posta a disposizione della Commissione non consente alcuna retribuzione ai collaboratori. Circa cento soggetti da trattare furono già indicati da alcune persone informate di questo progetto; ma la Commissione sarà lieta di ricevere altri suggerimenti, avvertendo che: 1 Ogni brano da inserire deve possedere interesse generale o almeno molto vaste; 2. Non deve appartenere ad opere che si trovano nelle mani di tutti; 3 Deve, possibilmente, essere di natura tale da venire pubblicato integralmente. In base a questi criteri la Commissione chiede comunicazioni del seguente genere: 1. Titoli di un numero limitato di importanti memorie o di capitoli interessanti di opere scritte nel periodo 1500-1900. 2. Per ogni lavoro consigliato la fonte e il numero di pagine in 8° (360 parole circa) che esso occuperebbe. 3. Dichiarazione se il corrispondente è o non disposto a occuparsi della traduzione e del commento relativo.

Alla Commissione spetta decidere se i suggerimenti dati siano o non accettabili; i suggerimenti stessi vanno comunicati a uno qualunque dei detti commissari.

Se, come è a credersi, al progettato volume non sarà per mancare il favore del pubblico, esso sarà seguito da due congeneri.

Digitized by Google

NECROLOGIO

EMIL MÜLLER. Nacque a Landskron (Boemia) il 22 aprile 1861. Rimasto orfano in giovane età, si trasferì ben presto a Vienna. Compiuti gli studi secondari si inscrisse nel Politecnico di questa città; però nel biennio 1881-83 frequentò anche le lezioni di quella Università. Si avviò verso l'insegnamento secondario, ma fu anche assistente del prof. Staudigl, che lo orientò verso la geometria descrittiva. La lettura di Grassmann lo fece uno dei più efficaci continuatori dell'opera iniziata con l'« Ausdehnunglehre ». Ottenne una cattedra a Königsberg (1892) e in questa città stabilì cordiali rapporti con il professore Franz Meyer; ivi conseguì nel 1898 la laurea in matematica e l'anno seguente la libera docenza. Nel 1902 fu chiamato a Vienna come professore di geometria descrittiva nel Politecnico; e tale ufficio conservò sino al giorno della sua morte (1° Settembre 1927); La sua produzione scientifica abbraccia due gruppi distinti di lavori; in uno stanno gli scritti ove sono svolte e applicate le idee di Grassmann; nell'altro sono trattate questioni di geometria descrittiva, disciplina che egli si propose di ringiovanire e vivificare con l'uso metodico dei concetti della geometria projettiva e con l'applicazione di altre trasformazioni geometriche. A questi ultimi concetti sono informate le sue ottime *Verlesungen über darstellenden Geometrie*, di cui il I vol. fu pubblicato nel 1923, mentre il II trovasi sotto i torchi per cura di uno dei suoi discepoli.

SRINIVASA RAMANUJAN. Nacque a Erode (India Meridionale) il 22 Dicembre 1887; sino da bimbo mostrò una attitudine straordinaria per la matematica e una memoria prodigiosa nel ricordare i grandi numeri. Malgrado ciò, la sua carriera scolastica fu così accidentata che finì per abbandonare le pubbliche scuole. Ebbe la fortuna di trovare nel ben noto matematico inglese G. H. Hardy una persona capace di apprezzare le sue doti inventive; al suo appoggio egli dovette i mezzi che gli permisero di recarsi in Inghilterra per ragioni di studio, e gli onori che gli

Digitized by Google

furono tributati dalle massime corporazioni scientifiche del Regno Unito (basti qui ricordare la nomina a F. R. S., che non era stato prima conferita ad alcun matematico indiano). Il suo campo d'indagini preferito fu la teoria dei numeri; la sua famigliarità con la serie naturale era tale che, avendogli l'Hardy detto, che per visitarlo, si era servito dell'automobile N. 1729, numero che non sembravagli dotato di alcuna prerogativa speciale, l'Hardy si sentì rispondere: « 1729 è un numero interessantissimo, essendo l'unico che può esprimersi come somma di due cubi in due modi differenti (1) ».

Una malattia incurabile, che sfuggì ad ogni diagnosi, lo colpì durante il suo soggiorno in Inghilterra; rimpatriato morì il 20 Aprile 1920. Le sue *Collected Papers* furono di recente pubblicate per cura degli ammiratori che egli annoverava in patria e in Inghilterra.

E. I. FREDHOLM. Nato a Stockholm il 7 Aprile 1866, ottenne il grado di dottore in matematiche all'Università di Upsala nel 1898. Appartenne all'Università di Stockholm come docente di Fisica matematica dal 1898 al 1906, poi come professore di Meccanica razionale e Fisica matematica sino al giorno della sua morte (avvenuta a Mörby il 17 Agosto 1927). Le sue pubblicazioni relative all'alta analisi gli conferirono grande fama, specialmente per l'opera a lui data alla teoria delle equazioni integrali, di cui, col nostro Volterra, è a ragione considerato per uno dei creatori. Un elenco completo di esse si trova nel Vol. LI degli *Acta mathematica*, di cui era uno dei direttori.

(1) $1 + 1728$ e $1000 + 729$.

Finito di stampare il 16 agosto 1928 (VI)

ALBERTO CONTI, Direttore responsabile

Tip. P. Cuppini - Castiglione 6[2]° - Bologna

Digitized by Google

Sezione storico-bibliografica

PUBBLICATA PER CURA

DI

GINO LORIA

SOMMARIO del Fasc. 4°: Gino Loria. Quo vadimus? **Recensioni.** C. Claudi. Prospettiva *(Giuseppe Tarchella)*. — G. Vivanti. Elementi della teoria delle Funzioni analitiche e delle Funzioni trascendenti intere *(F. Sibirani)*. — Ettore Cavalli. Balistica esterna *(Ing. Filippo Burzio)*. **Necrologio:** Staude, Dochlemann. **Indice dei nomi.**

GINO LORIA

QUO VADIMUS? (1)

In un volume recente, dovuto a un celebre fisiologo francese (2), Carlo Richet, stanno scritte le seguenti parole: « Un geometra prende una penna, un foglio di carta e, senza libri, senza documenti, svolge delle formole che si presentano al suo genio. Egli improvvisa cose belle e feconde, giacchè la potenza del suo spirito matematico gli permise, in un tempo relativamente breve, di conoscere all'incirca tutto quanto fecero i suoi predecessori ». Leggendo queste frasi, chiunque abbia un'infarinatura storica relativa alla nostra scienza, penserà a Pascal, che, non appena conosciuta la definizione della geometria, ricostruisce l'intero I Libro degli *Elementi* di Euclide; a Poncelet che, prigioniero a Saratow, località semibarbara situata sulle rive del Volga, getta le basi del suo *Traité des propriétés projectives des figures*; e ad Evaristo Galois il quale, nella notte precedente il fatale duello che doveva condurlo a morte poco più che ventenne, traccia, con mano rapida e nervosa ma altrettanto sicura, le prime linee della teoria delle sostituzioni, base indispensabile per uno studio profondo delle proprietà delle equazioni algebriche.

Ma chi conosce con qualche precisione la tecnica della ricerca matematica, osserva che nella letteratura della nostra scienza

(1) Comunicazione fatta a Bologna, il 3 Settembre 1928, al Congresso internazionale dei matematici.

(2) *Le Savant* (Paris, Hachette 1923) p. 106.

Digitized by Google

s'incontrano numerosi tipi di ragionamento, applicabili in moltissimi casi e che bisogna conoscere, al modo istesso che un fisico deve avere famigliarità con la macchina elettrica e il barometro, per poterne usare in ogni caso; nota ancora che la storia insegna che molte importanti generalizzazioni furono il prodotto dell'osservazione che certe argomentazioni sussistono integralmente in ipotesi assai più larghe di quanto prima erasi creduto. Perciò, riflettendo a mente riposata sopra lo schizzo delineato dal brillante scienziato parigino, si è naturalmente condotti a giudicare che i casi ora citati sono fenomeni eccezionali, che forse non si ripresenteranno mai più. Se enumeriamo poi quante volte a noi stessi, o a qualche amico o discepolo accadde di ri-inventare involontariamente cose note da secoli o di urtarsi contro difficoltà che sarebbe stato agevole sormontare conoscendo una certa teoria o soltanto un certo teorema, si conclude, contrariamente a quanto è affermato nelle frasi surriferite, che per il matematico, come per il cultore di qualunque disciplina, la conoscenza di quanto fu pensato e scritto dai predecessori è condizione indispensabile per un fruttifero lavoro.

Nè si manca di aggiungere che anzi per lui tale còmpito riesce più grave che per chi si dedica ad altre branche dello scibile, giacchè la matematica è una scienza eminentemente conservatrice, la quale da secoli eleva, allarga, approfondisce il proprio dominio senza mai far gettito del retaggio del passato. E ciò a differenza delle altre scienze. Chè un astronomo può darsi il lusso di ignorare il sistema tolemaico, a un fisico non è necessario sapere come la pensassero Platone e Aristotele sulla luce e il calore, e un chimico odierno non ha mai occasione di ricorrere alle dottrine flogistiche; ma quale matematico può ignorare che cosa contengano gli *Elementi* di Euclide e gli scritti di Archimede?

Ora la invidiabile e invidiata caratteristica della matematica di essere immune dalle rivoluzioni che, per altre discipline, ebbero quale conseguenza una rinnovazione « ab imis fundamentis », questa dote di eternità che la rende giustamente orgogliosa, contrariamente a quanto affermò il succitato pensatore, impone a chi la coltiva còmpiti oltremodo gravosi. Si pensi, infatti, che dalla fondazione del Museo d'Alessandria (e scelgo questa data perchè è da allora che comincia la letteratura matematica europea) sono scorsi non meno di ventidue secoli, pochi dei quali si mostrarono incapaci di accrescere di una l'elenco delle verità matematiche, mentre in molti altri vissero e operarono pensatori di meravigliosa

Digitized by Google

fecondità. Ed è con profonda ammirazione che io ricordo per l'Italia il periodo che, iniziatosi con Cardano e Tartaglia, proseguitosi con Galileo, si chiuse con Cavalieri e Torricelli; per la Francia quello che, con cortigianesca denominazione, suol chiamarsi Secolo di Luigi XIV; per l'Inghilterra l'epoca newtoniana e per la Germania l'era che s'inizia con colui che a ragione viene chiamato « princeps mathematicorum ».

Per formarsi un esatto concetto di quanto fruttifero sia stato questo più volte secolare lavoro è sufficiente avere presente che la più vasta e esatta Bibliografia relativa alla produzione matematica a tutto il Secolo XIX, quel colossale lavoro compiuto dal Valentin e che attende ancora la comparsa di un Mecenate che la sottragga ai pericoli che sovrastano alle opere manoscritte (1), quel lavoro, dico, registra all'incirca centocinquantamila lavori, tanti quanti coi loro titoli riempirebbero non meno di quindici grossi volumi in 4°. Ora, sia pure che fra essi trovinsi nuove edizioni, che non tutti contrassegnino un passo in avanti nella scoperta della verità, che anzi taluni, per l'onore dello spirito umano, sarebbe stato ben meglio che non fossero stati neppure scritti; ma molti sono gemme preziose e fulgide di cui l'umanità va giustamente superba e buon numero di essi rappresentano utili svolgimenti di produzioni classiche, mentre in altri lo storico ravvisa germi che mostraronsi poi inaspettatamente fecondi.

Errerebbe chi credesse che la produzione matematica siasi andata rallentando durante il periodo storico nel quale viviamo. Malgrado la distruzione di tante preziose energie su cui fondavansi le più rosee speranze (e in questo momento il mio memore pensiero si volge con indicibile commozione a te, diletto collega ed amico, Eugenio Elia Levi, che facesti gettito volontario della tua promettente esistenza, nel momento in cui l'Italia entrò nella recente conflagrazione europea); benchè le accresciute difficoltà della vita materiale e l'esagerata ammirazione che oggi tributasi alla forza fisica allontanino gran parte della gioventù dalla faticosa e poco remunerativa ricerca del vero; pure l'impero matematico si accresce secondo tre direzioni in modo che alcuni giudicano allarmente, mentre per altri è motivo di compiacimento.

Una prova mi è offerta da un ottimo manuale dovuto alla

(1) Fu una seduta posteriore il Congresso, dietro proposta del prof. Archibald emise un voto chiedendo la pubblicazione di questa grande opera.

Digitized by Google

penna infaticabile del mio amico prof. Vivanti: l'edizione del 1901 si chiude con un elenco di lavori relativi alle funzioni analitiche, comprendente poco più di 200 numeri; ora quella del 1928 avrebbe potuto offrirne ai lettori uno analogo di 700, se l'autore, per necessità di spazio, non avesse trovato necessario di sopprimerlo.

Nè credasi essere questo un fatto sporadico; lo prova una semplice considerazione statistica che giudico opportuno di svolgere.

Nel I Volume del «Jahrbnuch über die Fortschritte der Mathematik» è reso conto di circa 1200 lavori; nel XLVIII, il quale comprende gli anni 1921-22, si dà notizia di circa 6000; ammesso — è un postulato che reputo accettabile da tutti — che l'aumento di produzione abbia avuto luogo con legge uniforme, l'applicazione della formola che dà la somma dei termini di una progressione aritmetica porta a concludere che nel periodo che va dal 1868 al 1922 inclusivi, l'elenco dei lavori matematici si è arricchito all'incirca di 120000 numeri; aggiungendo i nuovi a quelli registrati dal Valentin, questo verrebbe a comprendere non meno di 25 poderosi volumi.

A siffatto cospicuo aumento di ricchezza contribuirono validamente, non soltanto i paesi della vecchia Europa, ma anche nuove reclute arruolate nelle altre parti del mondo. E prima d'ogni altra l'America del Nord, paese esuberante, febbrile, nobilmente ambizioso, pieno di slancio e (circostanza non trascurabile) di mezzi materiali; ora quanto intenso sia il contributo che danno alla scienza nostra i matematici viventi al di là dell'Atlantico risulta da una semplice constatazione di fatto, essa pure offerta dalla statistica. L'America settentrionale possiede due grandi corporazioni matematiche, ognuna delle quali ha branche isolate in tutti gli stati componenti l'Unione; sono l'«American mathematical Society» e la «Mathematical Association of America»; ora nel corso dell'anno 1927 (il quale non ha nulla di anormale) a questa furono presentate circa 300 memorie e a quella più di 400: onore a una nazione che mostra per la nostra scienza un così fattivo interesse!

Se — per amore di simmetria — investighiamo quanto accade nell'Estremo Oriente, c'imbatteremo in un popolo ancor più meraviglioso dell'Americano; un popolo il quale, pur disponendo di una matematica tradizionale non priva di qualità, non esitò ad abbandonarla, assumendo il modesto aspetto di discepolo delle più progredite nazioni europee; ma questa condizione di noviziato fu

Digitized by Google

di breve durata; perciò oggi, chi intende rendersi conto dei progressi che vanno facendo incessantemente le scienze esatte, ha il dovere di volgere lo sguardo anche a quanto viene pubblicato nella Terra del Sole levante.

Ma il Giappone non è l'unico paese asiatico che abbia mostrato ai dì nostri di possedere spiccate attitudini alla ricerca matematica, chè uno scienziato indiano (Srinivasa Ramanujan), vera meteora paragonabile a Abel e Galois, fornì la prova evidente del fatto che molto si può ragionevolmente attendere dalla stirpe che inventò le cifre di cui tuttora ci serviamo.

D'altra parte va tenuto conto di un altro fenomeno preoccupante: la recente guerra mondiale sembra avere acuito quel sentimento che G. B. Vico chiamava boria nazionale, nei popoli che di recente conseguirono autonomia e indipendenza, i quali sembrano pervasi dall'ammirando sentimento di mostrarsi degni, anche dal punto di vista che a noi interessa, della conseguita dignità politica; e poichè spesso — forse sospinti dal medesimo sentimento — amano servirsi del loro idioma, risorge nell'animo nostro il rimpianto per l'imprudente abbandono del Latino che, ancora durante buona parte del Secolo XVIII, disimpegnò l'importante ufficio di mezzo generale di comunicazione fra i dotti.

Ora non v'ha chi non percepisca la gravità dello stato di cose che tentai descrivere, giacchè in esso si cela una grave minaccia per l'avvenire della nostra scienza; ad esso, ad esempio, è indubbiamente dovuto il fatto, deplorevole e deplorato, che alcune importanti teorie sono lasciate dai giovani in abbandono ingiustificato, solo perchè la relativa letteratura è di tale ampiezza che il prenderne notizia esige un lavoro di anni, mentre dai neofiti viene accordata la preferenza a branche meno importanti, ma riguardo alle quali è più facile l'orientarsi.

A porre un argine ai danni in conseguenza paventati furono già suggeriti e applicati rimedi di vario genere.

Alcuni di questi hanno l'intento di informare chi già conosce una teoria, dei progressi che essa va annualmente compiendo. È superfluo che io dichiari che fra essi il primo posto spetta al « Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik » e sono sicuro di avere consenzienti i miei ascoltatori rivolgendo un plauso riconoscente a coloro che foggiarono e poi perfezionarono questo prezioso ordigno di lavoro e all'Accademia di Berlino, la quale, assumendone ora la tutela, ne assicurò per sempre l'esistenza. Giustizia vuole che si aggiunga un doveroso elogio alla « Revue

Digitized by Google

semestrielle des pubblications mathématiques », la quale, con un programma un po' differente, persegue uno scopo informativo della medesima specie.

Più ardua è la questione di rendere edotto chi vuole dedicarsi allo studio di un determinato argomento dello stato in cui esso presentemente si trova. Il desiderio di risolverla ispirò coloro che intrapreso il « Repertoire bibliographique des sciences mathématiques », ma ignoro a qual punto si trovi l'effettuazione di questo progetto. Analogo intento hanno gli Indici bibliografici relativi a speciali teorie, che già esistono per merito di vari benemeriti specialisti; essi sono certamente giovevoli, ma più le sarebbero se vi fosse indicata l'importanza relativa dei lavori registrati; per ciò auguriamo che coloro che in avvenire intraprenderanno lavori del genere distinguano con appositi contrassegni gli scritti fondamentali, da quelli secondarii e anche da quelli che si possono lasciare in disparte, almeno in un primo studio sull'argomento (1).

Di maggiore utilità riescono i Rapporti, pure sopra argomenti particolari, specialmente se redatti da persone di indiscutibile competenza; alcuni di essi rasentano, per importanza e valore, le opere orginali e per mostrare la fondatezza di questo apprezzamento basta ricordare quelli, veramente magistrali, che videro la luce sotto gli auspici della British Association e della Deutsche Mathematiker-Vereinigung. Allo stesso genere letterario appartengono il « Repertorio » del Pascal, il « Mémorial de Sciences mathématiques » e persino la grande Enciclopedia delle quattro Accademie; infatti che cosa è dessa se non una raccolta di Rapporti sopra le varie branche della matematica pura ed applicata? Splendido bilancio che le altre scienze contemplano con ammirazione non scevra d'invidia, non desta esso forse nel novellino un senso di sgomento del genere di quello che prevedeva Lagrange, quando felicitavasi di essere contemporaneo di Eulero, perchè così prendeva notizia delle memorie che questi andava incessantemente pubblicando, una per volta al loro apparire, e non raccolte in innumerevoli volumi?

Ora tutti questi ausiliari possiedono un valore indiscutibile che io non voglio negare; ma bisogna badare a non esagerarne la portata. In una scienza di ragionamento quale è la nostra, il conoscere una serie di risultati non è sufficiente per porre in

(1) V. il mio articolo *Sui metodi di compilazione dei Cataloghi bibliografici* (Boll. di bibl. e storia ecc. T. III, 1900).

Digitized by Google

grado di raggiungerne altri, al modo istesso che tutti gli atlanti geografici esistenti non costituiscono un corredo sufficiente per chi vuole intraprendere esplorazioni in ragioni sconosciute. Il matematico che aspira a far progredire il nostro sapere deve conoscere, oltre la direzione in cui procedettero le relative ricerche e il punto a cui giunsero, ancora i metodi, che gli possono servire, non solo nella loro struttura generale ma anche nei particolari del loro funzionamento; ora tutto ciò gli scritti storici e bibliografici non sono in grado d'insegnare.

A tale importante funzione sono invece destinati i lavori di sintesi, cioè le esposizioni rigorosamente metodiche e veramente complete delle teorie che raggiunsero un soddisfacente grado di maturità, esposizioni che esonerino, chi non compie ricerche storiche dal faticoso lavoro di ricerca, di critica, di scarto e di coordinazione dei numerosi materiali relativi, i quali di regola sono sparsi quà e là e spesso sepolti in pubblicazioni difficilmente accessibili. Nell'interesse della scienza sarebbe utile che da un'assemblea, quale è quella oggi quì raccolta, uscisse la solenne affermazione che lavori dell'indicata specie, se scritti senza spirito d'intolleranza ma in base a un ben inteso eccletismo, costituiscano per chi li compie un titolo di onore non minore di una ricerca originale. A mostrare la fondatezza di siffatta proposta basta osservare che alla fama di Eulero servirono, forse più delle sue innumerevoli memorie originali, le opere con cui egli diede assetto definitivo all'analisi infinitesimale, uscita ancora informe dalle mani di Newton, di Leibniz, dei Bernoulli. Grazie ad opere di quel genere il patrimonio adunato da secoli darà tutti i frutti di cui è suscettibile; potranno venire eliminati i numerosi duplicati che costituiscono un inutile ingombro per la scienza; e saranno segnalate, ed eventualmente colmate, le lacune che ne costituiscono altrettante imperfezioni. Inoltre certe discipline, coltivate sinora con intenti discordanti, epperò prive di un andamento regolare, assumeranno l'apparenza rigorosamente euclidea e procederanno chiaramente verso una determinata mèta; apparenza e andamento donde trarrebbesi soddisfacente risposta alla tormentosa domanda *Quo vadimus?* che viene spontanea alle labbra di chi contempla nel suo insieme il poliedrico e policromo patrimonio matematico odiermo.

Con le semplici osservazioni esposte io mi lusingo di avere manifestato un sentimento che turba tutti i matematici a cui sta a cuore di allontanare i pericoli che minacciano l'avvenire delle

Digitized by Google

scienze esatte. Non sono del pari sicuro di avere colpito nel segno proponendo i mezzi per evitarli. Ciò non ostante ho ritenuto di giovarmi della presente occasione per dirigere la mente di persone competenti verso un ordine di questioni, dalla cui soluzione sembra dipendere l'esistenza stessa del ramo dello scibile a cui dedicammo la vita.

E in questo momento si affaccia alla mia mente il ricordo di un articolo dello Statuto della più antica società matematica inglese: i membri di essa soleveno tenere periodiche riunioni per bere, fumare e proporsi reciprocamente questioni interessanti; onde raggiungere questo intento a ciascuno dei partecipanti era fatto obbligo di portare ad ogni seduta il proprio bicchiere, la propria pipa e il proprio problema. I tempi sono mutati; io mi sono sentito esonerato dal recare meco pipa e bicchiere; ma un problema dovevo ben portarlo. Ne ho dato l'enunciato; spetta a voi il risolverlo.

RECENSIONI

C. Claudi - *Prospettiva* (Sesta Ediz. riveduta - Milano, Hoepli 1924, p. XI, 75 tav. XXXIII).

Questo elegante manualetto, destinato agli allievi delle scuole industriali e delle accademie artistiche, ha lo scopo di insegnare a risolvere i problemi di prospettiva che possono interessare la pratica; è suddiviso in quattro parti: *Riduzione prospettica delle figure piane, Riduzione prospettica dei solidi, Prospettiva di figure viste sotto un angolo dato* e *Prospettiva dal basso in alto*; precedono alcuni preliminari in cui si accenna al concetto teorico della prospettiva.

Si assumono: *per piano obbiettivo* un piano orizzontale, ed uno verticale interposto fra l'oggetto ed il *punto di vista* per *quadro*, si fa uso del metodo dei *punti di concorso, o di distanza*, che sono i punti di fuga delle orizzontali inclinate di 45° sul quadro e che stanno, quindi, sull'*orizzonte del quadro*, o retta di fuga del piano obiettivo, e distano dal *punto principale* quanto il centro di vista dista dal quadro.

Nella prima parte si insegna a mettere in prospettiva:

« un quadrato appoggiato con un lato alla linea di terra (*t*),
« un pavimento a quadri con base parallela alla *t*, un quadrato

Digitized by Google

« con diagonale normale alla *t*, un pavimento a quadri con dia-
« gonali normali alla *t*, un quadrato con lato parallelo alla *t*,
« un esagono con un lato parallelo alla *t*, un ottagono, un circolo,
« un pavimento ad ottagoni (e quadri), un poligono irregolare
« qualunque ».

I solidi considerati nella seconda parte hanno sempre la base situata sul piano obbiettivo, e se sono limitati da superfici prismatiche o piramidali, sono scelti in modo che gli spigoli (o qualche altra retta singolare di essi, come l'altezza nella piramide), siano o paralleli alla linea di terra, o normali al piano obbiettivo, od al quadro, in modo che le loro prospettive si possono ottenere immediatamente dalla prospettiva della base osservando che le prospettive degli spigoli suddetti sono rispettivamente rette parallele o normali alla linea di terra o passanti pel punto principale; se invece sono limitati da superfici curve si inscrivono, o circoscrivono, delle superfici prismatiche, o piramidali, ed a sentimento si completa la prospettiva di cui si è trovato un certo numero di rette; se poi si tratta di dettagli architettonici, poichè anche quest'ultimo metodo sarebbe difficile da applicare, si eseguiscono delle sezioni opportune cui si inscrivono o circoscrivono dei poligoni.

Con tali metodi si insegna a porre in prospettiva una « pira-
« mide, un cubo, un cilindro, due parallelepipedi sovrapposti,
« quattro parallelepipedi posti ai vertici di un quadrato, un prisma
« ottagono, una gradinata vista di fronte o di fianco, degli archi,
« una crociera, un capitello da pilastro, una base di pilastro, un
« capitello dorico, la base di una colonna dorica, una cornice, un
« frontone visto di facciata o di fianco, l'interno di una camera
« ed un portico ».

Fin qui i soli punti di fuga adoperati dall'A. sono il punto principale ed i due punti di distanza, cioè sono state trattate solo le quistioni che possono con relativa semplicità ridursi alla ricerca della prospettiva di un quadrato con due lati normali alla linea di terra. Nella terza parte, alquanto impropriamente intitolata « *Prospettiva di figure viste sotto un angolo dato* », si suppone che questo quadrato ruoti nel piano obbiettivo finchè i lati considerati non siano venuti a formare un angolo qualsiasi α colla linea di terra; in tal movimento il loro punto di fuga, che coincideva col punto principale, scorre lungo l'orizzonte del quadro e viene ad assumere una nuova posizione detta *punto di vista accidentale e punti di distanza accidentali* son detti i nuovi punti di fuga delle diagonali di tal quadrato. Facendo uso dei nuovi *elementi accidentali* in luogo degli ordinari punti di distanza e principale, si è in grado di trovare la prospettiva dei corpi studiati, comunque la loro base si sposti sul piano obbiettivo. A mo' d'esempio l'A. insegna a porre in prospettiva « un pavimento formato di quadrati
« che abbiano coll'orizzonte una inclinazione data, dei pilastri la
« pianta dei quali faccia coll'orizzonte un angolo dato, un paral-
« lelepipedo del quale si conoscano le inclinazioni di due lati
« coll'orizzonte, una scala ed un villino visti sotto un angolo dato ».

Digitized by Google

Quando sopra di un soffitto si voglia disegnare un complesso architettonico che dia l'illusione di stare al di sopra di esso, occorre considerare un quadro orizzontale e posto al di sopra del punto di vista. E quanto l'A. fa nella quarta parte: egli, coll'ordinario metodo della geometria descrittiva, trova la proiezione centrale di un punto di cui conosce la proiezione ortogonale e la distanza dal quadro, ed applica questa costruzione, ripetendola un numero conveniente di volte, alla ricerca della prospettiva « di « una retta comunque posta rispetto al quadro, di una crociera, « di una cornice girante intorno ad un soffitto rettangolare, di « una cupola di pianta circolare, di un ordine di pilastri ».

Il compito di insegnare un capitolo della geometria descrittiva, che altri ne presuppone, a chi di geometria descrittiva è completamente digiuno, non è cosa semplice, nè può assolversi in modo razionale; forse quà e là si sarebbero potute dare giustificazioni intuitive delle varie costruzioni, forse non sarebbe riuscita inopportuna qualche regola che fosse di guida all'allievo; l'A. ha preferito adottare un metodo puramente pratico e dogmatico. Un appunto che si può fare all'A. è quello di bandire, come egli di proposito fa ogni volta che gli è possibile, il linguaggio matematico, come se esso non corrispondesse ad una effettiva economia di pensiero e di esposizione, sicchè i concetti teorici, che definisce, si librano in un'atmosfera nebulosa che non permette di rilevarne distintamente i contorni. Si osservi, per es., come egli definisce i

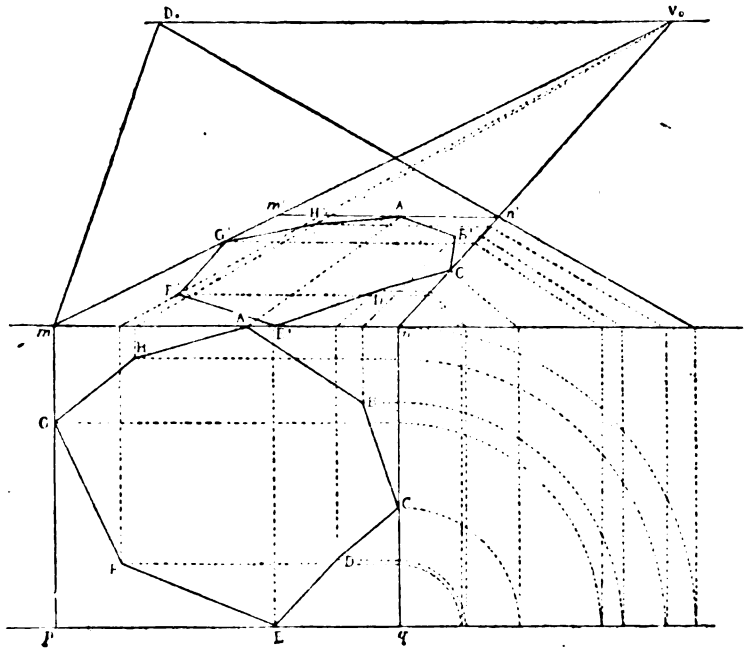
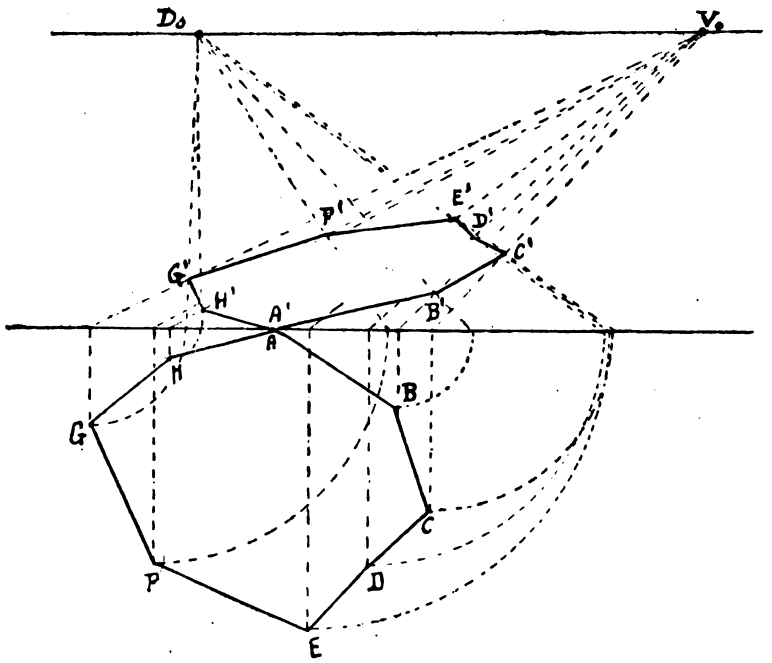


Fig. 10

Digitized by Google



punti di distanza (¹) e si veda se è possibile intendere la fondamentale relazione che intercede fra di essi ed il punto di vista.

Una conseguenza della penombra in cui son visti i concetti fondamentali si ha nell'errata corrispondenza fra i punti obbiettivi ed i loro prospettici che domina nelle prime tre parti del libro ed obbliga l'A. a ricorrere a costruzioni errate ed illogiche come può riscontrarsi facilmente nei disegni 5, 6, 10, 32, 33, 34.

Ecco, per esempio, come nel disegno 10 (prospettiva di un poligono qualunque) egli trova la prospettiva del punto *C*. Circoscrive al poligono dato il rettangolo *mnpq*, e considera *C* come intersezione della *qn* e della retta inclinata di 45° sul quadro e passante per *C*; per costruire la prospettiva di quest'ultima centra in *q* con raggio *qC*, da uno dei punti d'incontro di questo cerchio con la *pq* eleva la normale alla linea di terra, la congiungente il piede di questa perpendicolare con il punto *D* è, secondo l'A. la prospettiva della retta suddetta.

Per trovare le prospettive dei punti *A*, *B*, *D*, *F*, *G*, *H* con-

---

(¹) La definizione dell'A. è questa:

Punti di distanza sono le posizioni di lontananza situate sull'orizzonte o su una perpendicolare al quadro egualmente distanti dal punto di vista.

Digitized by Google

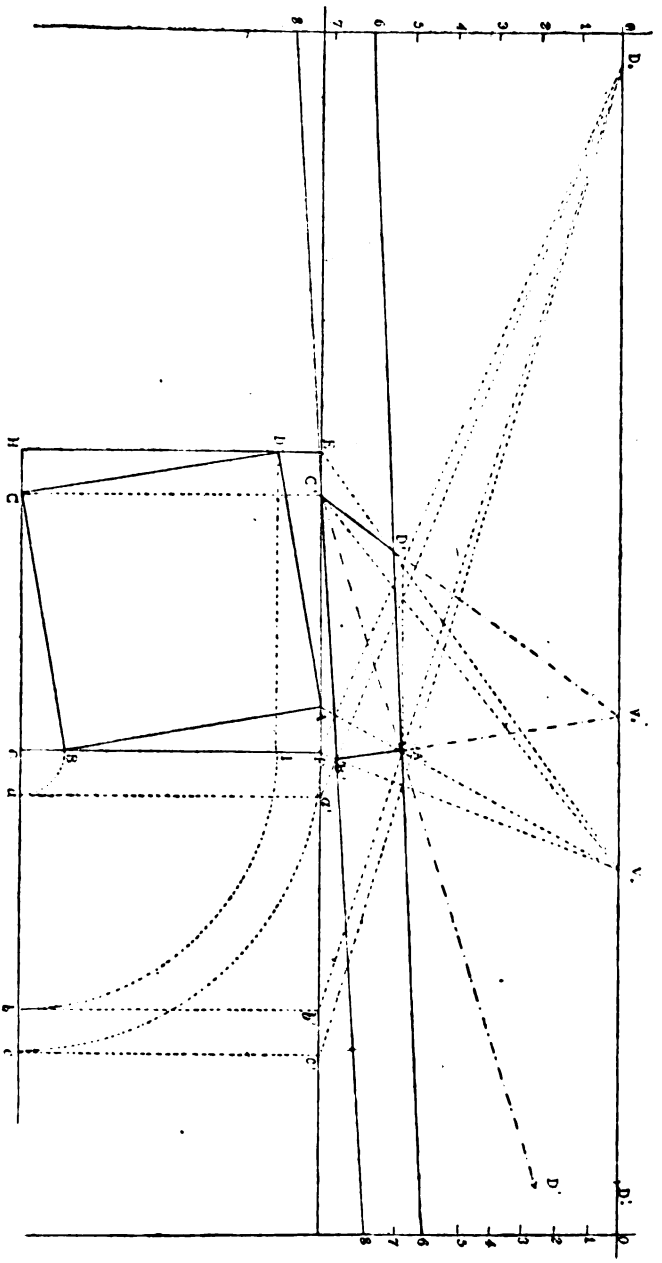


Fig. 32

Digitized by Google

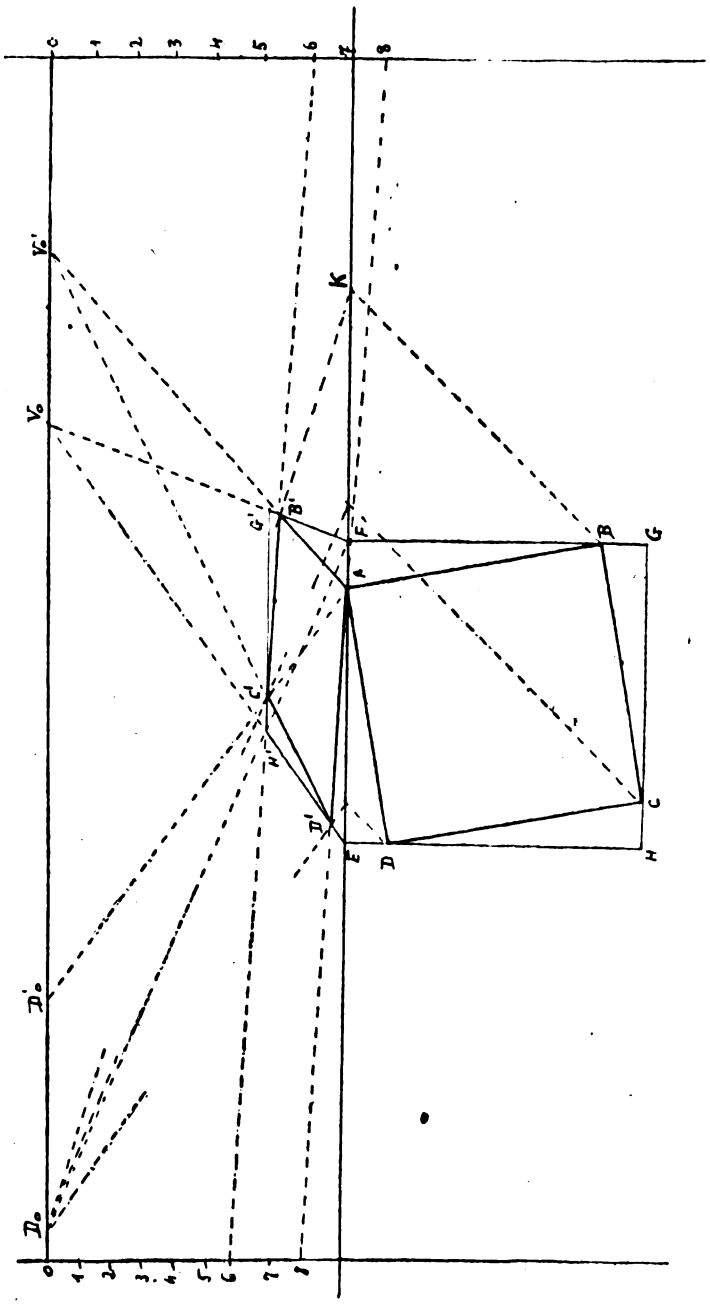


Fig. 2

Digitized by Google

duce per essi delle parallele alla linea di terra fino ad incontrare la *qn* e procede poi come ha fatto pel punto *C*.

Con ciò si giunge naturalmente ad una prospettiva del poligono dato che a prima vista è errata, basta infatti osservare che nella corrispondenza fra i punti obbiettivi e prospettici la linea di terra è il luogo dei punti uniti e quindi *A'* deve coincidere con *A* ed *E'* non può stare sulla linea di terra. L'errore sta nella costruzione delle prospettiche delle rette passanti pei vertici del poligono ed inclinate di 45° sul quadro, in cui l'A. fa una inconcepibile confusione, mentre basta unirne col relativo punto di distanza le tracce sul quadro, cioè, nel nostro caso, i punti in cui esse incontrano la linea di terra, punti che si possono ottenere o procedendo all'effettiva costruzione delle rette suddette, o ricorrendo a degli archi di cerchio come si è fatto nella fig. 1, in cui riporto la esatta prospettiva del poligono considerato dall'A.

Anche più istruttiva è la fig. 32 dove l'A., facendo uso degli stessi procedimenti, trova le prospettive dei punti *A* e *D* in due modi differenti, ottenendo per ciascuno di essi due punti prospettici distinti, nessuno dei quali coincide col vero. Egli infatti ottiene *A'* e come intersezione di AV_0 e della prospettiva di *HG* che egli considera come prospettiva di *EF*, (ma che per prudenza non nomina), ed ancora come intersezione di AV_0 e della $c'D_0$, (errata prospettiva della parallela ed *HF* condotta per *A*). Ottiene poi *D'* come intersezione di EV_0 con $b'D_0$, (errata prospettiva della parallela ad *HF* passante per *D*), ed ancora come intersezione di EV_0 e della congiungente *A'*, (falsa prospettiva di *A*), col punto di fuga di *C'B'* (falsa prospettiva di *CB*), e poichè questo punto cade fuori dei limiti del disegno si vale di due scale di Schilling le quali risultano necessariamente errate. Risulta quindi errato il punto di vista accidentale, e risulterebbe errato anche il punto di distanza accidentale, se anche l'A., inavvertitamente, non operasse lo scambio dei punti di distanza fra di loro. Quanto la prospettiva trovata differisca dalla vera metto in evidenza colla fig. 2 in cui seguendo il medesimo concetto dell'A., determino *B'*, prospettico di *B*, come intersezione di FV_0 e KD_0 che sono le prospettiche delle rette *BF* e *BK* inclinate sul quadro l'una di 90° e l'altra di 45°; determino analogamente *C'* e *D'*, mentre per *A'* basta osservare che coincide con *A*; resta così determinato il punto V'_0, di fuga di *CD* ed *AB*, o *centro di vista accidentale*, che sta sull'orizzonte del quadro, donde si ha una verifica di costruzione, resta determinato anche il *punto di distanza accidentale*, corrispondente al dato, che sta sull'orizzonte del quadro e sulla *A'C'*; riproduco anche le due scale di Schilling che offrono una seconda verifica, permettendo di costruire la prospettiva di un vertice del quadrato note che siano quelle degli altri tre.

Per terminare la mia opera di censore, dirò che non sempre le costruzioni scelte sono le più semplici, che non di rado sovrabbondano le linee di costruzione, che spesso vien lasciato fra la pianta dell'oggetto ed il quadro uno spazio di cui l'A. di fre-

Digitized by Google

quente non tien conto. il che, se non fa che alterare le dimensioni della prospettiva, non è però didatticamente consigliabile.

Queste sono le deficienze dell'opera in esame, la quale ha pure dei pregi notevoli che le ottennero un ampio consenso ed un invidiabile successo, come lo dimostrano le sei edizioni che se ne fecero in pochi anni. Il disegno generale, lo sviluppo dato ad ogni singola parte si addicono pienamente allo scopo che l'opera si propone. Il gran numero di disegni nitidi e suggestivi stanno ad attestare la singolare perizia dell'A. e la sua profonda conoscenza degli artifici che occorrono all'artista per ottenere coi minimi mezzi delle prospettive attraenti.

Ciò nonostante credo che le deficienze su rilevate non siano trascurabili, poichè si ripetono anche in molti disegni in cui non sono a prima vista avvertibili, perchè l'A. ha tralasciato le costruzioni o addirittura la pianta, e perciò mi permetto di formulare l'augurio che ben presto venga alla luce una settima edizione accuratamente riveduta e corretta. GIUSEPPE TACCHELLA

G. VIVANTI - *Elementi della teoria delle Funzioni analitiche e delle Funzioni trascendenti intere.* Seconda edizione completamente rifusa - Milano, Hoepli, 1928.

Il libro si compone di tre parti. Nella prima parte (Elementi della teoria degli aggregati, pag. 1-63) è esposta la teoria generale degli insiemi infiniti; 18 paragrafi sono dedicati ai concetti di potenza e di numeri cardinali trasfiniti e ai teoremi relativi; 15 paragrafi ai tipi ordinali e numeri ordinali trasfiniti, 17 agli aggregati lineari di punti (aggregato isolato, chiuso, perfetto, denso, connesso, numerabile; aggregati derivati, ecc.) e gli ultimi 4 paragrafi trattano degli aggregati di punti posti in uno spazio a più dimensioni.

Questa prima parte contiene forse più di quanto strettamente occorreva per le applicazioni che ne sono fatte nel resto del libro; ma l'esposizione in ordine logico della teoria (nella prima edizione l'A. aveva seguito, press'a poco, l'ordine storico) è fatta con tale chiarezza, sobrietà, e direi, snellezza, che, come torna gradita agli iniziati, tornerà utilissima ai giovani per lo studio di queste fini e delicate teorie, le quali trovano applicazione nei più importanti rami delle Matematiche.

La seconda parte (Teoria generale delle funzioni analitiche, pp. 64-266) contiene i capitoli: Funzioni di una variabile complessa (§ 55); Serie di potenze (§§ 56-72); Derivata di una serie di potenze (§§ 73-81); Integrale di una serie di potenze (§§ 82-86); Serie dedotta (§§ 87-94); Continuazione analitica; funzioni analitiche (§§ 95-110); Punti singolari (§§ 111-121); Le funzioni razionali e le espressioni aritmetiche (§§ 122-131); Classificazione delle funzioni analitiche uniformi. Le funzioni intere (§§ 132-141); Funzioni aventi un numero finito di singolarità essenziali (§§ 142-

Digitized by Google

144); Funzioni con infinite singolarità qualunque. Teorema di Mittag-Leffler (§§ 145-149).

La redazione di questa seconda parte si scosta da quella fatta nella prima edizione in quanto è abbandonato il « valor medio » (sostituito da Pringsheim allo strumento dell' integrale curvilineo con tanto successo usato da Cauchy) ed in sua vece è sostituito — seguendo le traccie dello stesso Pringsheim e del Kneser — l' integrale curvilineo, definito però in modo autonomo, come diremo, per rimanere più che è possibile fedele al carattere fondamentale del metodo di Weierstrass e della sua scuola.

E definito l' integrale indefinito di una serie di potenze positive e negative, esclusa quella di esponente — 1, come la serie ottenuta sostituendo $\frac{x^{m+1}}{m+1}$ a x^m; poi se $P(x)$ è una serie di codesta specie e se $\int P dx dx = Q(x)$, si definisce l' integrale definito fra due punti a e b (interni alla circonferenza o corona di convergenza) mediante

$$\int_a^b P(x)\,dx = Q(b) - Q(a);$$

quindi è fatto vedere che, congiunti a e b con una linea di lunghezza finita tutta interna al campo di convergenza e scelti sulla linea punti intermedi $x_1, x_2, \ldots$.

$$\lim_{n=\infty} \sum_{h=1}^{n} (x_h - x_{h-1})\, P(x_{h-1}) = \int_a^b P(x)\,dy\,,$$

colle solite condizioni nel passaggio al limite. Ne segue che l' integrale di $P(x)$ lungo una linea chiusa è nullo. E' poi calcolato il limite di una somma analoga alla precedente relativo alla funzione $\frac{1}{x}$ e ad una circonferenza di centro l' origine, limite che si definisce integrale di $\frac{1}{x}$ esteso alla circonferenza. Dall' integrale di una serie di potenze si passa a quello di funzione analitica, indi al teorema di Cauchy e alle sue molteplici interessanti conseguenze.

Alla prima edizione sono state qui portate anche alcune aggiunte: esempi di continuazione analitica, qualche cenno sulla rappresentazione conforme e sulle sostituzioni lineari complesse, qualche teorema sulla determinazione del raggio di convergenza, ecc.

Nella prima edizione a terza parte trattava di argomenti vari; nella seconda edizione (pp. 267-421) essa tratta esclusivamente della « teoria delle funzioni intere trascendenti ».

Il primo capitolo (§§ 150-175) contiene una serie di teoremi che in gran parte hanno avuto origine da notevoli ricerche di Laguerre, e perciò è intitolato: I teoremi di Laguerre e le loro generalizzazioni (fra cui l'estensione delle note formule di Girard, relazioni fra radici di una trascendente intera e della sua deri-

Digitized by Google

vata e quindi, in particolare, estensione dei teoremi di Rolle e Cartesio; numero delle radici contenute in una circonferenza di centro nell'origine; teorema di Jensen).

« I tre indici di una funzione intera e le loro relazioni reciproche » è il titolo del secondo capitolo (§§ 176-195). Sono definiti tre indici (dai diversi autori denominati in modo diverso) che l'A. chiama indice λ, indice μ, indice ν; i quali, per definirli in poche parole come l'A. stesso dice, misurano rispettivamente la rapidità con cui cresce la successione dei moduli delle radici, la rapidità con cui decresce la successione dei moduli dei coefficienti, e la rapidità con cui cresce il modulo massimo della funzione per valori crescenti di $|x|$. Sono poi studiate le importanti relazioni che passano fra questi indici, relazioni che hanno aperta una nuova e feconda via allo studio delle funzioni trascendenti intere.

Il terzo capitolo (§§ 196-202) è dedicato alle espressioni asintotiche e alla teoria della crescenza (secondo Borel); il quarto (§ 203) contiene un cenno sugli indici di Lindelöf. I §§ 204-207 costituiscono il capitolo « Teoremi di Picard »; è dimostrato il teorema di Landau che comprende l'ormai classico primo teorema di Picard ed è enunciato il secondo. Questi teoremi sono dimostrati in modo semplice nel successivo capitolo « funzioni di genere finito » naturalmente per questo tipo di funzioni e sono date anche proposizioni più generali. L'ultimo capitolo (§§ 213-215) contiene un cenno sulle funzioni di genere infinito.

Il perchè l'A. non abbia dato uno svolgimento più completo delle Funzioni intere trascendenti è detto nella Prefazione al libro (ragioni di spazio e di armonia), come pure è detto perchè in questa seconda edizione sia stata soppressa, in fine, la lista bibliografica che esisteva nella prima edizione ed esiste nell'edizione tedesca. Ma nel testo sono abbondanti le indicazioni bibliografiche e storiche e fra queste mi piace di rilevare l'attribuzione al Casorati del teorema circa il comportamento di una funzione analitica nell'intorno di un punto singolare essenziale che da parecchi autori è detto teorema di Weierstrass; ed ancora l'aver ricordato che il Betti era giunto in due casi particolari al risultato di rendere convergenti mediante fattori esponenziali i noti prodotti infiniti che compaiono nel teorema fondamentale di Weierstrass.

È merito grande dell'A. di aver saputo concentrare in uno spazio relativamente piccolo tanta materia, senza che la coesione vada a scapito dell'intelligibilità. Con il rifacimento di questo libro il prof. Vivanti si è reso ancora una volta benemerito della coltura italiana. F. SIBIRANI

ETTORE CAVALLI - *Balistica esterna*, Torino, S. T. E. N. 1928; Testo e Tavole numeriche 8° gr. p. 572 + 140.

Con questo « Trattato » dell'illustre Professore di Balistica esterna ai Corsi Superiori tecnici d'Artiglieria presso l'Accademia

Digitized by Google

Militare di Torino viene colmata una grave lacuna nella nostra letteratura scientifico tecnica. L' Italia, che con Tartaglia e Galileo ebbe il vanto di iniziare gli studi razionali della Balistica, e che anche nel secolo scorso, con Giovanni Cavalli, col Saint Robert, col Siacci, raggiunse per ben due volte in questo campo il primato nel mondo, attendeva ancora che il geniale strumento del suo più recente ed universale successo, cioè il metodo Siacci per il calcolo della traiettoria dei projetti venisse esposto, sistematizzato ed applicato nel suo completo sviluppo.

Si verificò infatti a proposito della soluzione Siacci del problema balistico principale il fenomeno che, mentre la prima approssimazione della soluzione stessa (apparsa nel 1880) fu immediatamente nota e universalmente accettata anche all' estero, gli studi ulteriori del Siacci, continuatisi per un ventennio, allo scopo di estendere il campo di applicabilità e aumentare il grado di esattezza della soluzione stessa, si urtarono in una maggior incomprensione ed ebbero assai minori applicazioni: e ciò a partire dalla cesì detta *soluzione del* β *principale* (1889), cui furono mosse obbiezioni e critiche alle quali pure venne risposto vittoriosamente; finchè delle ultime Note dell' insigne Autore può quasi dirsi che, quanto a sviluppi e ad applicazioni, restassero lettera morta: e ciò non solo all' estero ma anche presso di noi. Il fenomeno (singolare, trattandosi di un Autore di così alta rinomanza, anzi di un vero fondatore di scuola) fu forse dovuto al fatto che la mirabile semplicità della prima approssimazione arrestò l' interesse a questo stadio, ritenuto per lungo tempo sufficiente ai bisogni della pratica, e svogliò dal seguire la complessità delle ricerche ulteriori: ma i progressi e gli sviluppi nella tecnica del tiro, manifestatisi specie durante la guerra come incremento sia delle velocità iniziali che degli angoli di projezione, resero evidente a tutti ciò che era già ben noto al Siacci e alla sua scuola, cioè l' insufficienza della prima approssimazione a risolvere i nuovi casi di tiro; a trattare i quali si propose allora, all' estero, e anche presso di noi, un ritorno all' antico, cioè al vecchio calcolo della trajettoria per punti, sia pure con metodi perfezionati ed aggiornati.

Fu a questa svolta nell' evoluzione della Balistica, corrispondente presso a poco alla guerra e al periodo immediatamente successivo, che si presentò l' utilità della ripresa in esame dei dimenticati, o ignorati, metodi Siacci di seconda e terza approssimazione, onde stabilire se essi non fossero per avventura equivalenti, o migliori, dei metodi di calcolo per punti che si riproponevano: ed è qui che si manifesta la più recente fase dell'attività del Generale Cavalli (e del suo egregio collaboratore il T. Col. Bruno), con la paziente, dotta, acuta riesumazione, integrazione e applicazione dei più recenti e dimenticati studi del Siacci.

Dal 1919 a tutt' oggi la sua operosità in tal senso è stata sistematica: tra le numerose Note che la manifestarono, citiamo solo quelle che più strettamente si collegano al nostro argomento; *Sui contributi necessari al progresso della Balistica* (1919); *Tavola di un* β *secondario* (1924); *Il secondo termine della Serie del* β

Digitized by Google

principale (1925); *Il problema balistico del prossimo avvenire* ( ); alle quali vanno aggiunte le seguenti del Colonn. Bruno: *Prolungamento della tavola VIII* (1920); *Alcune applicazioni sui parametri complementari della balistica razionale* (1922). Con questi lavori le possibilità implicite nei metodi Siacci di 2ª e 3ª approssimazione, indispensabili per l'applicazione soddisfacente del metodo stesso ai casi di grandi angoli di projezione e grandi velocità iniziali, sono stati discusse, sviluppate e poste in piena luce.

Il *Trattato* ora uscito contiene delle Note originali citate il riassunto e la coordinazione alle altre parti ordinariamente sviluppate nei testi di Balistica. Che questo fosse il nucleo e la parte più caratteristica della sua Opera ha avvertito l'A. fin dalla prefazione:

« ..... poichè sembrava che la Balistica tendesse a diventare quella « scienza di lusso » accennata da Siacci nella prefazione alla sua Balistica (II Edizione, 1888), ho ritenuto opportuno sviluppare in modo completo i metodi introdotti da Siacci, i quali non sono superati dal tempo, e non sono stati sostituiti da altri altrettanto semplici ed esatti. Infatti viene mostrato come tali metodi si prestino a risolvere con la voluta approssimazione qualunque problema pratico di tiro, e come essi permettano di ridurre alla massima semplicità e razionalità la costruzione delle tavole di tiro, che costituisce la principale applicazione della Balistica ».

E alla fine della trattazione dei riesumati metodi Siacci di 2ª e 3ª approssimazione (pag. 225): « Il metodo Siacci che è stato esposto nei cap. precedenti e nelle due prime parti di questo capitolo consente dunque diversi gradi di approssimazione: formule semplici ed abbastanza esatte pei bisogni della pratica, per i calcoli ordinari, e si può dire giornalieri; 2° e 3° grado di approssimazione per calcoli che richiedono una maggior esattezza a scopo di studio od altro; le formule da impiegare sono sempre le stesse. Sicchè il metodo Siacci è completo e soddisfa a tutte le possibili esigenze ».

« È da notare che il metodo in prima approssimazione è l'unico che permetta di calcolare la trajettoria in un solo arco..... Altri metodi non vi sono che permettano di risolvere i problemi del trio suindicati, e gli autori che vogliono risolvere questi problemi impiegano lo stesso Metodo Siacci, o, se lo modificano, lo deformano adottando come variabile ausiliaria la velocità orizzontale in vece della pseudo-velocità e indicando per calcolare il valore medio di β (al quale soltanto si cambia nome) formule speciali più o meno empiriche, che valgono soltanto a rendere più lunghi i calcoli ».

***

Non potevamo esprimere meglio che con le parole stesse dell'eminente A. le ragioni che lo hanno indotto a sobbarcarsi alla insigne e meritoria fatica: e riteniamo che la balistica italiana

Digitized by Google

debba essere molto grata a questi, che col gen. Parodi, è il più illustre tra i discepoli del Siacci, per aver dato forma definitiva all'opera del Maestro, in modo che, non solo fra noi ma anche all'estero, questa possa ormai apparire in tutta la sua pienezza architettonica e fecondità applicativa.

Torino, luglio 1928.

Ing. FILIPPO BURZIO

NECROLOGIO

OTTO STAUDE. Nacque a Limbach (Sassonia) il 27 Marzo 1867; la sua carriera accademica può riassumersi come segue: 1883 libero docente a Breslavia, 1886 prof. straordinario a Dorpat, ordinario nel 1887; 1888 prof. ordinario a Rostock sino alla sua morte avvenuta il 10 Aprile 1928. Le sue lezioni ebbero per argomenti la teoria delle funzioni, la meccanica, e la geometria analitica. Scientificamente egli è noto per importanti ricerche sulle proprietà focali delle quadriche.

Si devono a lui alcuni ottimi articoli sulle superficie di second'ordine nella grande *Enciclopedia* e nel *Repertorio* Pascal-Timerding: inoltre parecchi pregiati trattati su vari argomenti di geometria analitica, fra cui va rilevato quello relativo alle cubiche gobbe. Al momento della morte era in corso di stampa un altro suo volume congenere sopra le equazioni canoniche delle coppie di correlazioni e i loro casi particolari.

K. DOEHLEMANN nacque a Monaco di Baviera il 20 Settembre 1864 e morì improvvisamente, nella Biblioteca di quella città, il 22 Marzo 1926. Nella sua città natale compì brillantemente tutti i propri studi; in quella Università ottenne nel 1891 la laurea e l'anno seguente la libera docenza; nel periodo 1902-1912 fu ivi professore straordinario e poi ordinario in quel Politecnico. La sua produzione scientifica è essenzialmente geometrica; le sue opere di maggior lena sono una *Projektive Geometrie*, facente parte della nota Sammlung Göschen, che ebbe cinque edizioni, e due volumi di *Geometrische Transformationen*, inserite nella medesima raccolta. Appassionato cultore anche dell'arte pittorica, dedicò alla prospettiva parecchi scritti storici e psicologici. I lettori desiderosi di conoscere i titoli di tutti i lavori del Doelhemann li troveranno nell' Elenco posto in calce alla necrologia scrittane da G. Faber e inserita nel Vol. 37 del Jahresbericht der Deutschen Mathem. Vereinigung (1928).

Digitized by Google

INDICE DEI NOMI

Abel LXXVII.
Ahrens XXII, XLIII.
d'Alembert XI.
Amaldi XXXVII, XLII.
Amsler L.
Angersbach XLIII.
Appell XXXIX.
Archibald LXX, LXXV.
Archimede I, II, III, XLIII, XLIV, LI, LXXIV.
Aristotele LXXIV.
Armellini XXXIX,
Aschieri XVI, XVII.

Bachet de Méziriac XXII.
Ball Rouse XXII.
Battaglini XVII.
Behmann XLIII.
Bernoulli XL, LXXIX.
Bertini V-XVIII.
Bertrand XI.
Bessel LIX.
Betti LXXXIX.
Bieberbach LX.
Blaschke XXIX.
Blumenthal LXIX.
Bohr XXXVII, XXXIX.
Bombicci XXVIII.
Bompiani XXXV, XXXVI.
Bordoni LXV.
Borel LXXX.
Bricard XLIX, L.
Brun LV, LVI.
Bruno XC.
Burnengo LXVIII.
Burzio XCII.

Cajori LXX.
Cantor G. LIII, LXI.
Cantor M. XX.
Capellini XXVIII.
Cardano LXXV.
Carducci XXVIII.
Carnegie LXX.
Cartesio vedi Descartes.
Casorati LXXXIX.
Cattaneo XXIV.
Cauchy LXXVIII.
Cavalieri LXXV.
Cavallaro XXIV.
Cavalli E. LXXXIX-XCII.
Cavalli G. XC.
Cavour XXVII.
Cayley X, XI, XIII.
Cech XXIX, XXXVI.
Cesàro LIX.
Ciani XVIII.
Claudi LXXX-LXXXVII.

Digitized by Google

Clausius XL.
Cournet IV.
Crocco XL.
Coolidge LXI.
Czwallina XLIII.

Darboux XXXIII.
Demoulin XXXIII.
Descartes LXXXIX.
Dickson XVIII-XXI.
Dieck LXII.
Diofanto XVIII.
Doehlemann XCII.
Dowsett LXVI.

Enriques LIX.
Euclide LXXIII-LXXIV.
Eulero LXXVIII, LXXIX.

Faber XCII.
Fais XXV, XXIX.
Fermat XX, XXXVII, XLII.
Fettweis LXIII-LV.
Fibonacci XIX.
Fiori XXVI.
Fladt XLIII.
Flauti LXVII.
Foucault XXXVII, XXXIX.
Fraenkel LII.
Fredholm LXXII.
Fubini XXIX, XXXVI.
Fueter LII.

Galileo XC.
Galois LXXIII, LXXVII.
Gandino XXVI.
Garibaldi XXVII.
Gauss XXX, XLII.
Ghersi XXII.
Girard LXXXVIII.
G. L. *vedi* Loria.
Gordan XLVI.
Gozzadini XXVIII.
Grassmann H. XIV, LXXI.
Grassmann H. jr. LVI-LVIII.
Grelling XLIII.
Guareschi LVI.
Gut LII.

Halphen XXX.
Hamilton XLII.
Hardy LXXI-LXXII.
Heiland XXIII.
Hermite XXI.
Hertz XCII.
Hess XXXIX, XL.
Humboldt LXIII.

v. Ignatowski LXI.

Janni.
Jensen LXXXIX.

Kampe LX.
Kant LII.
Keplero XXXIX.
Kirchenberg XLIII.
Klein LXIX.
Kneser LXXXVIII.
Knopp XLIII.
Kommerell K. LX.
Kommerell V. LX.
Kowalewski G. XXIII-XXIV, LVIII-LIX.
Kowalewski S. XXXVII, XL.
Koenigs XXXIV.
Kronecker LIII.

Lagrange XL, XLI, LXXVIII.
Laguerre LXXXVIII.
Lambert LXVIII, LXIX.

Digitized by Google

Landau LXXXIX.
Laplace XXXVI.
Lebesgue LX, LXI.
Leibniz LXXIX.
Lelieuvre XXXII.
Leonardo Pisano *vedi* Fibonacci.
Levi E. E. LXXV.
Levi-Civita XXXVII, XLII.
Lie XLI.
Lietzmann XXI, LXV, LXVI.
Lindelöf LXXXIX.
Liouville XLI.
Leewy LXIII.
Loria I, XXI, XXII, XXIII, XXIV, XLIV, XLV, L, LI, LII. LV, LVIII, LX, LXI, LXII, LXVI, LXXIII.
Lucas XXII.
Lucky XLIII.
Luigi XIV LXXV.

Maggi XXXIX.
Manes LXIX.
Mayer Franz LXXI.
Mittag-Leffler XLVIII, LXXXVIII.
Moebius VI.
Monge XI.
Morera XLI.
Morley L.
Moutard XXXIV.
Müller C. H. LXIX.
Müller LXXI.

Natucci XXIV.
Netto LV, LVI, LX.
Neumann LIX.
Newton LXXIX.

Ozanam XXII.

Painlevé XL.
Parodi XCII.
Pascal B. XXVII, LXXIII.
Pascal E. LXXVIII, XCII.
du Pasquier LXIII.
Pell XIX.
Perron XLV, XLVI.
Peters XLIII.
Petersen L.
Picard LXXXIX.
Platone LXXIV.
Plüeker X.
Poincaré LIII.
Poinset XL.
Poisson XLI.
Poncelet X.
Pothenot LXVII.
Pringsheim LXXVIII.
Pullino XXVI.

Ramanujan LXXI-LXXII, LXXVII.
Rayleigh XI.
Regnoli XXVIII.
Richard LIII.
Richet LXXIII.
Rolle LXXXIX.
Rothe XLVI, XLVII.
Russell LIII.

Saint-Robert XC.
Sanchez Perez XLIV.
de Saussure L.
Scheffers LI-LII.
Schläfli XIV.
Schrödinger XLI.
Schrutka LX.
Segre XVII, XXX, XXXIII, XXXV.
Sella XXVIII.

Digitized by Google

Seydewitz VII XI.
Siacci XC, XCI.
Sibirani LXXXIX.
Skolem LVI.
Smith LXX.
Snellius LXVII.
Solovine LXIX.
Stande XCII.
Staudigl LXXI.
Steiner XI, XIV.
Studv L.
Sundara Row IV.

Tacchella LXXXVII.
Talete III, IV, V.
Tartaglia LXXV, XC.
Taylor XLV, XLVII.
Teofilato LXVII, LXVIII.
Terracini XXXIII, XXXV, XXXVI.
Timerding XCII.
Togliatti XXXVI.
Torricelli LXXV.
Trudi XXVII.
Tzitzeica XXXIII, XXXV.

Usai XXV.

Valentin LXXV.
Verriest L, LI.
Vici XXIV.
Vico LXXVII.
Vivanti XLVI, XLIX, LV, LXXVI, LXXXVII, LXXXIX.
Volk LIX, LX.
Volterra XXXVII, XLI, XLII, LXXII.

Walcott LXIX.
Waring XIX.
Watt XL.
Weierstrass XXXVIII, XLVIII, LXXXVIII, LXXXIX.
Whittaker XLII.
Wieleitner XLIII.
Wilczinski XXX, XXXI, XXXII.
Wolf XLIII.

Finito di stampare il 20 novembre 1928 (VI)

ALBERTO CONTI, Direttore responsabile

Tip. P. Cuppini - Castiglione 6^{B} - Bologna

Digitized by Google

IL BOLLETTINO DI MATEMATICA

GIORNALE SCIENTIFICO-DIDATTICO

PER L'INCREMENTO DEGLI STUDI MATEMATICI NELLE SCUOLE MEDIE

DIRETTO DA

ALBERTO CONTI, PROF. NEL R. LICEO MICHELANGIOLO DI FIRENZE

CON UNA

SEZIONE STORICO-BIBLIOGRAFICA

PUBBLICATA PER CURA DI

GINO LORIA, PROF. NELLA R. UNIVERSITÀ DI GENOVA

ANNO XXV DALLA FONDAZIONE - ANNO VIII NUOVA SERIE - 1929

(ANNO VII DELL'ERA FASCISTA)

.... Volgere i progressi della Scienza a beneficio della Scuola.

FRATTINI

STAMPATO A BOLOGNA

NELLA TIPOGRAFIA P. CUPPINI

Via Castiglione, 6ª

1929

Digitized by Google

L'EDITORE ADEMPIUTI I DOVERI

ESERCITERÀ I DIRITTI SANCITI DALLE LEGGI

Bologna - Tipografia Paolo Cuppini - Via Castiglione 6²

Digitized by Google

INDICE DELL'ANNATA XXV

(VIII DELLA NUOVA SERIE)

A) **Articoli generali d'indole scientifico-didattica**

BURNENGO GIUSEPPE - Una discussione elementare dell'equazione generale $f(x, y) = 0$ di 2° grado . . . . . Pag. 95

CANDIDO GIACOMO - La relazione che lega le mutue distanze di quattro punti conciclici. . . . . » 68

CAVALLARO V. G. - Sulla determinazione di punti notevoli del triangolo mediante parallele al contorno . . . . . » 141

CHIELLINI ARMANDO - Principali proprietà relative alla proiettività $\binom{\alpha \mp b^2}{a^2 \quad \alpha}$ tra i diametri delle coniche a centro . . . » 129

CLARKE ISABELLA - Dei vari metodi di risoluzione grafica dei problemi di 2° grado. . . . . » 54

FRANCESCHI ODOARDO - Le inversioni rispetto alle sfere dello spazio come trasformazioni cremoniane . . . . . » 137

FUBINI GUIDO - Le trosformazioni in geometria differenziale e l'opera di LUIGI BIANCHI . . . . . » 1

MANCINELLI RENATO - Discussione di un sistema di 4° ordine . » 70

MARENGONI ARDICCIO - Una dimostrazione (non chilometrica) della formula di addizione degli archi . . . . . » 74

MERCOGLIANO DOMENICO - L'uebertragunsprincip di O. Hesse ed il sistema di due quadriche binarie . . . . . » 88

NATUCCI ALPINOLO - Uno lectione de Algebra in Interlingua . » 11

PALATINI FRANCESCO - Sopra due teoremi sui poligoni regolari . » 5

PICCIOLI ENRICO - Una notevole corrispondenza fra i termini di una progressione e quelli di una successione . . . . . » 22

SCORZA GAETANO - Contributi italiani alla geometria algebrica . » 41

» » - Sull'opera scientifica di CARLO ROSATI . . . » 125

SEVERI FRANCESCO - Sull'estensione delle figure convesse . . . » 81

VOLPE RINONAPOLI TELESIO - Del numero delle soluzioni intere e positive dell'equazione $x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n = k$ . . . . » 105

B) **Piccole Note**

Un problema inverso di miscuglio (*A. Natucci*) . . . . . » 29

Digitized by Google

La matematica e la fisica negli esami di maturità classica *(Impressioni di un Commissario)* . . . . . » 32
Una nuova dimostrazione del teorema che in ogni triedro ciascuna faccia è minore della somma delle altre due *(A. La Barbera)* . . . . . » 107
C) **Corrispondenza**
Copia della lettera inviata per Capodanno a S. E. il Ministero della P. I. . . . . » 37
Copia di una lettera inviata dall'On. Direttore Generale per l'Istruzione Media *(A. Conti)* . . . . . » 75
Copia della risposta ricevuta dall'On. Direttore Generale per l'I. M. . . . . » 76
Copia di altra lettera inviata all'On. Direttore Generale per l'I. M. *(A. Conti)* . . . . . » 77
A proposito dell'articolo della Sig.na Clarcke *(V. G. Cavallaro)* » 108
Le figure convesse ed un modo d'enunciare il postulato d'Euclide e il postulato di continuità *(M. De Franchis)* . . . . . » 149
D) **Note bibliografiche e pubblicazioni recenti** Pag. 67-78 159-160
E) **Temi di matematica proposti nei Concorsi per le Scuole medie,** dal 1907 al 1929 . . . . . Pag. 110
F) **Rassegna dei Congressi**
XVIII Riunione della S. I. per il Progresso delle Scienze . . » 150
La questione degli Insegnanti di Matematica e Fisica e il Congresso della Mathesis . . . . . » 152
G) **Necrologio**
Luigi Carlini *(La Direzione)* . . . . . » 36
In memoria di Bindoni Antonio - Rodolfo Viti - Umberto Concina - Carlo Rosati *(A. Conti)* . . . . . » 117
In memoria di Carlo Rosati *(Puccianti Luigi-Scorza Gaetano)* » 121
H) **Notizie a fascio** . . . . . » 86
I) **Rassegna delle Riviste** . . . . . » 158

SEZIONE STORICO-BIBLIOGRAFICA

A. M. Bedarida - Sull'opera aritmetica di Luigi Bianchi . . . Pag. I
Matilde Chiappello - Sui numeri naturali che sono somma di due cubi in due modi diversi . . . . . » XXV
Gino Loria - Una curva speciale ideata da Vincenzo Viviani » XLIX
Recensioni - Notizie - Necrologio - Indice finale dei Nomi . . » XCIII

Digitized by Google

Anno XXV dalla fondazione - Fasc. I - Annata VIII Nuova Serie

Le trasformazioni in geometria differenziale e l'opera di Luigi Bianchi

Nota di GUIDO FUBINI (Torino)

In queste brevi pagine voglio dare un' idea elementare delle teorie che, per opera del Bianchi e di tanti altri che ne hanno seguito l' indirizzo, hanno fatto compiere tanti progressi alla geometria differenziale. Sia data un' equazione differenziale

$$(1) \qquad f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0,$$

che, per fissare le idee, ho supposto del 2° ordine con una sola funzione incognita z di due variabili indipendenti x, y. Facciamo una trasformazione di variabili

$$(2) \qquad Z = Z(z, x, y); \quad X = X(x, y, z); \quad Y = Y(x, y, z).$$

La (1) diverrà un' equazione dello stesso tipo, e, mediante la (2), da ogni soluzione di (1) potremo dedurre una soluzione di questa nuova equazione. Ciò continuerà a valere anche se la nuova equazione coincide con (1), cioè se la Z, come funzione delle X, Y, soddisfa alla stessa equazione (1), cui soddisfa la z come funzione di x, y. In tale caso la (2) permette di dedurre da ogni soluzione di (1) una nuova soluzione della stessa (1); la quale potrà anche essere ben distinta dalla soluzione primitiva. E, se la (2) contiene costanti (o funzioni) arbitrarie, la nuova soluzione potrà addirittura dipendere da costanti (o funzioni) arbitrarie.

Ciò che abbiamo detto per la (2), che è una trasformazione che porta il *punto* (x, y, z) in un altro punto (X, Y, Z), si può ripetere per trasformazioni di tipo più generale; alludo

Digitized by Google

alle trasformazioni *di contatto*, (di cui l'esempio più semplice è quello della polarità rispetto ad una conica). Queste trasformazioni sono valide in tutto lo spazio o in una sua regione; e sono a base di ricerche fondamentali di S. Lie. Il Bianchi si è occupato di trasformazioni di carattere più generale, di trasformazioni cioè che non si possono definire in tutta una regione dello spazio, ma soltanto per i punti di una soluzione della (1) (1). Cioè per alcuni tipi specialmente notevoli di equazioni (1) ha trovato delle formole

$$(3)\qquad \begin{cases} X = X\left(x, y, z, \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \ldots\right) \\ Y = Y\left(x, y, z, \dfrac{\partial z}{\partial x}, \ldots\right) \\ Z = Z\left(x, y, z, \dfrac{\partial z}{\partial x}, \ldots\right) \end{cases}$$

che permettono da ogni soluzione $z(x, y)$ di dedurre una funzione Z di due variabili X, Y che soddisfa a un'altra equazione differenziale; e questa seconda equaz. differenziale coincide, nei casi più notevoli, con l'equazione (1) di partenza.

E, in questa ipotesi, le trasformazioni (3) del Bianchi permettono di dedurre da ogni soluzione di (1) una nuova soluzione della stessa equazione; la quale anzi dipenderà da costanti arbitrarie, perchè le (3) contengono appunto costanti arbitrarie.

L'enunciazione analitica delle questioni sollevate dalle ricerche del Bianchi si deve al Bäcklund; e il « problema di Bäcklund » ha dato origine a numerose ricerche da parte di Goursat e dei suoi allievi. Il Bianchi prescelse il lato geometrico della questione, studiando specialmente l'equazione differenziale delle superficie a curvatura costante, o di quelle

---

(1) Di questo tipo era nota solo la trasformazione di *Laplace* per una equazione $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + a\dfrac{\partial z}{\partial x} + b\dfrac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$. Per ogni soluzione z di questa equazione le $z_1 = \dfrac{\partial z}{\partial x} + bz$, $z_2 = \dfrac{\partial z}{\partial x} + az$ sono soluzioni di altre due equazioni del medesimo tipo.

Digitized by Google

applicabili sulle quadriche. E il risultato a cui giunse è il seguente. Da ogni soluzione di una tale equazione se ne possono dedurre infinite altre. La superficie di partenza e le sue trasformate godono della proprietà che le rette tangenti ad entrambe fanno corrispondere le asintotiche delle due superficie. E perciò queste trasformazioni si dicono *asintotiche*. Data la superficie S, la determinazione delle superf. trasformate S' richiede l'integrazione di un'equazione di Riccati. Se si sa eseguirla, la successiva applicazione delle trasformaz. del Bianchi alle superficie trasformate S' e a quelle che se ne deducono con la ripetuta applicazione dei metodi stessi del Bianchi non richiede più che calcoli algebrici e derivazioni.

Questa scoperta trovò subito nuove e molteplici applicazioni: i metodi e le trasformazioni asintotiche del Bianchi si dimostrarono fecondi di applicazioni anche per altre estese classi di superficie, anche per alcune classi di superficie che sono state scoperte dalla moderna geometria proiettiva differenziale. E, non solo nella teoria delle superficie, ma anche nella teoria dei sistemi di superficie (p. es. tripli ortogonali e tripli coniugati) i metodi del Bianchi trovarono le più insperate applicazioni. In questo nuovo campo si hanno così trasformazioni per i sistemi di equaz. differenziali; le quali trasformazioni non sembrano ancora studiate da un punto di vista puramente analitico.

Accanto a queste trasformazioni asintotiche il Bianchi scoperse anche altri tipi di trasformazioni; le quali, sebbene talvolta di minore importanza, hanno permesso di gettar nuova luce in svariati capitoli della Geom. differenziale; l'interpretazione, dai punti di vista più svariati, delle trasformazioni del Bianchi ha permesso di far progredire la teoria delle già citate trasformazioni di Laplace, della trasformazione di Moutard, ecc. ecc.

Ma di tutte le ricerche suscitate dall'opera del Bianchi una importantissima deve essere ricordata in modo meno sommario. Esiste una classica trasform. di Lie che muta rette in sfere, rette incidenti in sfere tangenti, superficie tangenti generalmente ancora in superficie tangenti. Alle

Digitized by Google

asintotiche di una superficie S fa corrispondere le linee di curvatura della superficie trasformata S_1. Che cosa farà corrispondere una tale trasformazione a due superficie S, S' che siano trasformate asintotiche l'una dell'altra? Dalla definizione di trasformazione asintotica si deduce tosto che le superficie S_1, S_1' godono della proprietà di essere le due falde dell'inviluppo di un sistema di ∞^2 sfere tale che la corrispondenza definita da questo fa corrispondere fra di loro le linee di curvatura di S_1 ed S_1'. Queste trasformazioni furono studiate dal Darboux nel caso che la corrispondenza tra S_1 ed S_1' sia conforme, e ha condotto a una trasformazione delle superficie *isoterme*, che il Bianchi ha non solo completato, ma anche generalizzato in punti essenziali; questa teoria ha raggiunto così la stessa perfezione che il Bianchi aveva già dato alla teoria delle trasformazioni asintotiche.

La teoria delle trasformazioni per inviluppi di sfere si è dimostrata feconda nella teoria dei sistemi tripli ortogonali, e ha dato origine a capitoli assai notevoli della teoria delle coordinate curvilinee ortogonali negli spazi a tre e più dimensioni, come il lettore può vedere al solo scorrere l'indice delle classiche *Lezioni* del Bianchi stesso.

Una buona metà, e forse anche più, delle ricerche del Bianchi si riferisce a trasformazioni asintotiche o per inviluppi di sfere sia nella geometria euclidea che in geometrie non euclidee, definite o indefinite; e questi studii presentano inaspettati legami con le ricerche più disparate. Si può a buon diritto affermare quindi che l'opera del Bianchi ha illuminato di vivida luce un territorio vastissimo, scoprendo nuovi campi all'indagine geometrica, e trovando le più insperate relazioni tra i capitoli più svariati della geometria differenziale!

Digitized by Google

Sopra due teoremi sui poligoni regolari

di FRANCESCO PALATINI (Torino)

1. Si tratta di due teoremi notissimi e intuitivamente quasi evidenti, dei quali non ho mai trovato nelle mie letture una dimostrazione.

Teorema I. - *Il perimetro e la superficie del poligono regolare di* $n+1$ *lati inscritto in un dato cerchio sono maggiori del perimetro e della superficie del poligono regolare di* n *lati inscritto in quello stesso cerchio.*

Si può dare di questo teorema una breve dimostrazione mediante elementari nozioni di calcolo differenziale. Indicando con l_{n+1}, l_n i lati dei due poligoni, con p_{n+1}, p_n i perimetri, con r il raggio del cerchio, si ha

$$p_{n+1} = 2(n+1)r \operatorname{sen} \frac{\pi}{n+1}, \quad p_n = 2nr \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}.$$

Basta perciò dimostrare che è

$$(n+1) \operatorname{sen} \frac{\pi}{n+1} > n \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}.$$

Per questo si consideri la funzione $x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ della variabile *positiva* x, la cui derivata è $y' = -\frac{\pi}{x} \cos \frac{\pi}{x} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$. Per $\frac{\pi}{x}$ variante negli intervalli $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ la $y' > 0$ equivale rispettivamente alle

$$\tan \frac{\pi}{x} > \frac{\pi}{x}, \quad \tan \frac{\pi}{x} < \frac{\pi}{x}$$

che sono sempre verificate in detti intervalli, quindi la nostra funzione è sempre crescente per $\frac{\pi}{x} < \pi$, donde $x > 1$.

Digitized by Google

Indicando poi con s_{n+1}, s_n le aree dei due poligoni, si ha

$$s_{n+1} = \frac{1}{2}(n+1)r^2 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n+1}, \quad s_n = \frac{1}{2} nr^2 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}$$

dopo di che si procede in modo analogo al precedente.

2. Darò ora una dimostrazione geometrica (1).

I. Si ha $p_n = nl_{n+1} + n(l_n - l_{n+1})$; $p_{n+1} = nl_{n+1} + l_{n+1}$, quindi trattasi di provare che è $l_{n+1} > n(l_n - l_{n+1})$. A partire da un punto A della circonferenza si prenda una successione di $n+1$ archi eguali alla $n(n+1)^{ma}$ parte della circonferenza, $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_nA_{n+1}$ e si conducano le corde AA_1, $AA_2, \ldots, AA_n, AA_{n+1}$, la penultima e l'ultima delle quali sono rispettivamente eguali a l_n, l_{n+1}. Si segnino pure le corde $A_1A_2, A_2A_3, \ldots$. La circonferenza di centro A e raggio AA_1 incontri le corde $AA_2, AA_3, \ldots, AA_{n+1}$ nei punti A_{11}, $A_{12}, \ldots, A_{1,n+1}$; la circonferenza di centro A e raggio AA_2 incontri le corde $AA_3, AA_4, \ldots, AA_{n+1}$ nei punti $A_{23}, A_{24}, \ldots$, $A_{2,n+1}$; e così via; infine la circonferenza di centro A e raggio AA_n incontri la corda AA_{n+1} nel punto $A_{n,n+1}$, cosicchè è $A_{n,n+1}A_{n+1} = l_{n+1} - l_n$.

Si segnino i segmenti $A_1A_{12}, A_2A_{23}, A_3A_{34}, \ldots, A_nA_{n,n+1}$, ciascuno dei quali è maggiore del suo precedente per la similitudine dei triangoli isosceli (aventi eguali gli angoli al vertice) $AA_1A_{12}, AA_2A_{23}, \ldots$, ognuno dei quali ha i lati uscenti dal vertice A maggiori di quelli del suo precedente.

Nel triangolo isoscele AA_1A_2, essendo $AA_{12} + A_{12}A_2 < AA_1 + A_1A_2$, $AA_{12} = AA_1$, è $A_{12}A_2 < A_1A_2$, quindi $A_{1,n+1}A_{2,n+1} < AA_{1,n+1}$. I triangoli $A_1A_{12}A_2$, $A_2A_{23}A_3$ hanno eguali i lati A_1A_2, A_2A_3 e gli angoli a questi opposti (supplementi di angoli alla base di triangoli isosceli simili) e $A_1A_{12} < A_2A_{23}$, perciò $A_{23}A_3 < A_{12}A_2$ (il che si vede p. e. costruendo su A_2A_3 dalla parte di A_{23} l'arco (minore di mezza circonferenza) capace dell'angolo (ottuso) $A_2A_{23}A_3 = A_1A_{12}A_2$ e un triangolo $A_2A_3M = A_1A_2A_{12}$, chè allora essendo corda $A_2A_{23} >$ corda A_2M, e quindi arco $A_2A_{23} >$ arco A_2M, risulta arco $A_{23}A_3 <$ arco MA_3 e perciò corda $A_{23}A_3 <$ corda MA_3).

---

(1) Il lettore può farsi la figura per $n = 3$, $n + 1 = 4$.

Digitized by Google

Ne segue $A_{2,n+1}A_{3,n+1} < A_{1,n+1}A_{2,n+1}$. Nello stesso modo dal confronto dei triangoli $A_2A_{23}A_3$, $A_3A_{34}A_4$ si ha $A_{34}A_4 < A_{23}A_3$ e perciò $A_{3,n+1}A_{4,n+1} < A_{2,n+1}A_{3,n+1}$. Così continuando risulta AA_{n+1} diviso, a partire da A, in $n+1$ parti, ognuna delle quali è minore della sua precedente. Allora essendo

$$\begin{aligned} A_{n,n+1}A_{n+1} &< A_{n-1,n+1}A_{n,n+1} \\ A_{n,n+1}A_{n+1} &< A_{n-2,n+1}A_{n-1,n+1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{n,n+1}A_{n+1} &< AA_{1,n+1} \end{aligned}$$

sommando membro a membro, si ha $nA_{n,n+1}A_{n+1} < AA_{n,n+1}$, cioè $nA_{n,n+1}A_{n+1} < AA_n$, ossia $n(l_n - l_{n+1}) < l_{n+1}$ che è appunto quanto bisognava dimostrare.

II. Mantenendo le notazioni precedenti, si ha

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= s_{n(n+1)} - (n+1)\,AA_1A_2 \ldots A_n \\ s_n &= s_{n(n+1)} - n(AA_1A_2 \ldots A_n + AA_nA_{n+1}) \end{aligned}$$

quindi per concludere che è $s_{n+1} > s_n$, basta provare che è

$$AA_1A_2 \ldots A_n < n\,AA_nA_{n+1}.$$

Per questo si osservi che ciascuno degli n triangoli AA_1A_2, AA_2A_3, ..., AA_nA_{n+1} è maggiore del precedente, avendo tali due triangoli eguali gli angoli in A e i lati del primo uscenti da A ordinatamente maggiori di quelli del secondo. Si ha quindi

$$\begin{aligned} AA_nA_{n+1} &> AA_1A_2 \\ AA_nA_{n+1} &> AA_2A_3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ AA_nA_{n+1} &> AA_{n-1}A_n \end{aligned}$$

e sommando membro a membro risulta $(n-1)AA_nA_{n+1} > AA_1A_2 \ldots A_n$ e quindi anche $nAA_nA_{n+1} > AA_1A_2 \ldots A_n$.

3. Teorema II. - *Il perimetro e la superficie del poligono regolare di* n + 1 *lati circoscritto a un dato cerchio sono minori del perimetro e della superficie del poligono regolare di* n *lati circoscritto a quello stesso cerchio.*

Con procedimento analogo a quello seguito per il t. I si può dare anche di questo teorema una dimostrazione ana-

Digitized by Google

litica, sulla quale credo inutile soffermarmi. Mi occuperò della dimostrazione geometrica.

Indicheremo con L_n, L_{n+1} i lati, con P_n, P_{n+1} i perimetri, con S_n, S_{n+1} le superficie dei due poligoni.

I. Si ha $P_n = nL_{n+1} + n(L_n - L_{n+1})$, $P_{n+1} = nL_{n+1} + L_{n+1}$. Basta perciò dimostrare che è $L_{n+1} < n(L_n - L_{n+1})$. A partire da un punto A_1 della circonferenza si prendano $n+1$ archi $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n+1}A_{n+2}$ eguali ciascuno alla $n(n+1)^{ma}$ parte della circonferenza, si conducano le tangenti in $A_1, A_2, \ldots, A_{n+2}$ e si indichi con A_{rs} il punto d'incontro di quelle in A_r, A_s. Si ha allora $A_1A_{1,n+2} = A_{1,n+2}A_{n+2} = \frac{1}{2}L_n$, $A_1A_{1,n+1} =$

$= A_{1,n+1}A_{n+1} = \frac{1}{2}L_{n+1}$, $A_{1,n+1}A_{1,n+2} = A_{1,n+2}A_{2,n+2} = \frac{1}{2}(L_n - L_{n+1})$.

Si tratta perciò di provare che è $A_1A_{1,n+1} < nA_{1,n+1}A_{1,n+2}$.

Nel triangolo $A_{12}A_{13}A_{23}$ isoscele è $A_{12}A_2 < A_{12}A_{13}$, quindi anche $A_1A_{12} < A_{12}A_{13}$. Dall'eguaglianza dei triangoli $A_{12}A_{13}A_{23}$, $A_{23}A_{24}A_{34}$; $A_{12}A_{14}A_{24}$, $A_{13}A_{14}A_{34}$ segue $A_{13}A_{23} = A_{23}A_{24}$, $A_{13}A_{14} = A_{14}A_{24}$, perciò $A_{14}A_{23}$ è bisettrice degli angoli $A_{13}A_{14}A_{24}$, $A_{13}A_{23}A_{24}$, e poichè il primo è minore del secondo (essendo arco $A_1A_4 > A_2A_3$), sarà pure l'angolo $A_{12}A_{14}A_{23}$ minore dell'angolo $A_{13}A_{23}A_{14}$, quindi $A_{13}A_{23} < A_{13}A_{14}$ e anche $A_{12}A_{13} < A_{13}A_{14}$. E così via. Risulta dunque $A_1A_{1,n+2}$ diviso, a partire da A_1, in $n+1$ parti, ciascuna delle quali maggiore della sua precedente, e perciò è $nA_{1,n+1}A_{1,n+2} > A_1A_{1,n+1}$, come appunto si doveva dimostrare.

II. Mantenendo le precedenti notazioni, si ha

$$S_n = S_{n(n+1)} + n(A_{12}A_{13}A_{24} + A_{13}A_{14}A_{34} + \ldots + A_{1,n}A_{1,n+1}A_{n,n+1} + A_{1,n+1}A_{1,n+2}A_{n+1,n+2})$$

$$S_{n+1} = S_{n(n+1)} + (n+1)(A_{12}A_{13}A_{23} + A_{13}A_{14}A_{34} + \ldots + A_{1,n}A_{1,n+1}A_{n,n+1})$$

basta quindi provare che è

$$nA_{1,n+1}A_{1,n+2}A_{n+1,n+2} > A_{12}A_{13}A_{23} + \ldots + A_{1,n}A_{1,n+1}A_{n,n+1}.$$

Per questo si osservi che, essendo arco $A_1A_3 <$ arco $A_1A_4 < \ldots <$ arco A_1A_{n+2}, è $A_{13}A_3 < A_{14}A_4 < \ldots < A_{1,n+2}A_{n+2}$ e togliendo i tratti eguali $A_{23}A_3, A_{34}A_4, \ldots, A_{n+1,n+2}A_{n+2}$ si ha

Digitized by Google

pure $A_{13}A_{23} < A_{14}A_{34} < \ldots < A_{1,n+2}A_{n+1,n+2}$. Inoltre essendo arco $A_1A_2 <$ arco A_1A_3, è $A_{12}A_2 < A_{13}A_3$, donde aggiungendo i tratti eguali A_2A_{23}, A_3A_{34}, risulta $A_{12}A_{23} < A_{13}A_{34}$. Analogamente $A_{13}A_{34} < A_{14}A_{45}$, ecc. Allora gli n triangoli $A_{12}A_{13}A_{23}$, $A_{13}A_{14}A_{34}$, $\ldots$ $A_{1,n+1}A_{1,n+2}A_{n+1,n+2}$ formano una successione crescente, quindi è

$$(n-1)\,A_{1,n+1}A_{1,n+2}A_{n+1,n+2} > A_{12}A_{13}A_{23} + \ldots + A_{1,n}A_{1,n+1}A_{n,n+1}$$

e perciò anche

$$n\,A_{1,n+1}A_{1,n+2}A_{n+1,n+2} > A_{12}A_{13}A_{23} + \ldots + A_{1,n}A_{1,n+1}A_{n,n+1}$$

che è quanto si doveva dimostrare.

4. I due teoremi considerati valgono anche sulla superficie sferica e nel piano della geometria iperbolica. La dimostrazione del secondo si può ripetere senz'altro anche in questi due casi; quella del primo ha bisogno di qualche modificazione che ora vedremo. Premettiamo che i triangoli sferici che dovremo considerare hanno i lati minori ciascuno di un quadrante di circolo massimo. *Sotto questa ipotesi* hanno luogo le seguenti proposizioni.

α) Vale sulla superficie sferica e sul piano iperbolico il teorema dell'angolo esterno di un triangolo in relazione a ciascuno degli interni opposti.

β) Sulla superficie sferica e sul piano iperbolico in un triangolo isoscele avente l'angolo al vertice costante a lati eguali crescenti corrisponde base crescente (e reciprocamente) e angoli alla base crescenti nella superficie sferica e decrescenti nel piano iperbolico.

γ) Al crescere della somma degli angoli di un triangolo, sulla superficie sferica cresce e sul piano iperbolico diminuisce l'area, e reciprocamente.

Dopo ciò quanto alla prima parte della dimostrazione del t. I. abbiamo, mantenendo inalterata la figura, quanto segue. Indicando con D il punto comune a A_1A_3, A_2A_{23}, hanno luogo le seguenti relazioni angolari

$$A_1A_2D > AA_2D = AA_{23}D > A_{23}DA_3 = A_1DA_2$$

quindi $A_1A_2D > A_1DA_2$, donde $A_1D > A_1A_2 = AA_{12}$ e allora $DA_3 < A_{12}A_2$. Inoltre è $A_2A_{23}A_3 > AA_2A_{23}$, quindi $A_2A_{23}A_3 >$

Digitized by Google

$> A_{23}DA_3$, perciò $A_{23}A_3 < DA_3$, quindi $A_{23}A_3 < A_{12}A_2$, $A_{24}A_{34} < A_{14}A_{24}$. E così via.

Quanto alla seconda parte della dimostrazione, abbiamo quanto segue. Indicando con B, C i punti d'incontro di AA_2, A_1A_3; AA_3, A_1A_4, nei triangoli isosceli ABA_3, A_1BA_2; ACA_4, A_1CA_3, essendo $AA_3 > A_1A_2$, $AA_4 > A_1A_3$, sarà sulla superficie sferica ang. $A_2AA_3 > A_2A_1A_3 = A_1AA_2$, $A_3AA_4 > A_3A_1A_4 = A_2AA_3$ e nel piano iperbolico ang. $A_2AA_3 < A_2A_1A_3 = A_1AA_2$, $A_3AA_4 < A_3A_1A_4 = A_2AA_3$, cioè gli angoli A_1AA_2, A_2AA_3, ... formano sulla superficie sferica una successione crescente e sul piano iperbolico una successione decrescente.

Ora indicando con $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ la somma degli angoli dei triangoli A_1AA_2, A_2AA_3, A_3AA_4, ... si ha

$$\sigma_1 = AA_1A_2 + 2A_1AA_2$$
$$\sigma_2 = A_1A_2A_3 - AA_2A_1 + A_1A_3A_2 + AA_3A_1 + A_2AA_3 = AA_1A_2 + 2A_2AA_3$$
$$\sigma_3 = AA_1A_2 + 2A_3AA_4$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

quindi $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ formano una successione crescente sulla superficie sferica e decrescente sul piano iperbolico, e perciò in entrambi i casi i triangoli A_1AA_2, A_2AA_3, A_3AA_4, ... formano una successione crescente, dopo di che si giunge alla conclusione come nella dimostrazione del teor. I seconda parte.

Digitized by Google

Uno lectione de Algebra in Interlingua [1]

Progressiones arithmetico de ordine superiore et summa de potentias simile de N_1 [2]

di ALPINOLO NATUCCI (Chiavari)

1. *Potentias de binomio.*

$(a+b)^1 = a+b$; $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$; $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$, et cetera.

Si nos pone:

$$(1)\qquad (a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}\cdot b^3 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-h+1)}{1.2.3\ldots h}a^{m-h}\cdot b^h + \ldots + mab^{m-1} + b^m,$$

---

(1) Interlingua (latino sine flexione) es fundato super duo principio naturale et logico:

« *Vocabulario internationale, ortographia latino* ».

« Voce internationale es moneta que habe cursu in omni natione ». Es superfluo loque de utilitate de Interlingua in communicationes scientifico, congressu internationale, ecc.

[Quota de associatione ad Academia: L. 10 per anno; thesaurario Ing. G. Canesi, Via Castigliole 1, Torino (105)].

(2) N_1 = classe de numeros naturale. Argumento de isto lectione non es originale. Vide: R. Baltzer - Elementos de mathematica, parte II. Arithmetica generale, pag. 138 et sequentes; L. Tenca - Progressiones. R. Giusti, editore, Livorno. Me explica demostrationes et adde exemplos vario.

Digitized by Google

cum nos multiplica pes $(a + b)$ inveni:

$$(a+b)^{m+1} = a^{m+1} + (m+1)\,a^m b + \frac{(m+1)m}{1.2}\,a^{m-1}b^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{(m+1)m(m-1)\ldots(m-h+2)}{1.2.3\ldots h}\,a^{m-h+1}\cdot b^h + \ldots +$$

$$+ (m+1)\,ab^m + b^{m+1}.$$

Nunc (1) es vero per $m = 1, 2, 3, 4$, et si vero per exponente m, es vero etiam per $m + 1$, inde (1) es vero per omni exponente [Principio de Inductione (Induct). Vide Formulario mathematico de G. Peano - Fratres Bocca editores - Torino - Editio V, pag. 27].

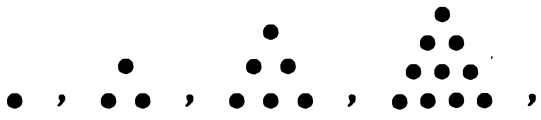
2. *Coefficientes de potentias de binomio.*

Si nos dispone coefficientes de potentias de binomio ut ad latere, nos construe *triangulo arithmetico* de *Tartalea* [Vide U. Cassina - Storia del triangolo aritmetico, in Bollettino di Matematica, anno XIX (1923) pag. 97].

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
. . . . .						
. . . . .						
1	$m\frac{(m-1)}{1.2}$	. . . .	m,	1		

In isto triangulo numeros de primo columna es omni aequale ad 1, numeros de secundo columna es numero naturale, numeros de tertio columna es numeros triangulare, numeros de quarto columna es numero tetraedrico, numeros de cetero columna es dicto numero polyedrico.

Numeros triangulare da summa de sphaerula disposito ut in figura,



numeros tetraedrico da summa de sphaerula disposito in tetraedro (lectore es precato de construe figuras).

Numero polyedrico non habe correspondente figura geometrico.

Digitized by Google

3. *Numero de combinationes de* m *objecto* r *da* r es dato ab:

$$\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-r+1)}{1.2.3\dots r}$$

et es indicato ab symbolo $\binom{m}{r}$, aut $C_{m,r}$, aut $C(m,r)$ [Formulario, pag. 125].

Sic, formula (1) es scripto, brevi modo:

(1)′ $\qquad (a+b)^m = \Sigma\, C(m,r)\, a^{m-r}\cdot b^r. \qquad [r, 0\dots n]$

Numero de triangulo aritmetico de m^{ma} linea et r^{ma} columna, ergo, es coefficiente r^{mo} de potentia m^{ma} de binomio, et es etiam numero de combinationes de m objecto $r-1$ ad $r-1$.

Es noto proprietates de numero $C(m,r)$, que homo voca *numeros figurato.*

Nos memora: (2) $C(m,r) = C(m, m-r)$, unde seque aequalitate de numeros de omni linea de triangulo arithmetico, aequidistante ab extremo;

(3) $\qquad C(m,r) = C(m-1,r) + C(m-1, r-1).$

Ab formula (3) segue:

(4) $\quad C(m,r) = C(m-1, r-1) + C(m-2, r-1) +$
$\qquad + C(m-3, r-1) + \dots + C(r-1, r-1).$

4. *Numeros figurato.*

Homo voca n^{mo} *numero figurato de ordine* m, numero $C(m+n-1, m)$.

Primo n numeros figurato de ordine m, ergo, es.:

$$C(m,m),\ C(m+1,m),\ C(m+2,m),\ \dots\ C(m+n-1,m).$$

Formula (4) duce que *numero figurato* n^mo *de ordine* m *es summa de primo* n *numeros figurato de ordine* m − 1:

(4)′ $\quad C(m+n-1, m) = C(m+n-2, m-1) +$
$\quad + C(m+n-3, m-1) + \dots + C(m+1, m-1) +$
$\qquad + C(m, m-1) + C(m-1, m-1).$

Exemplo:

(5) $\qquad 1+2+3+\dots+n = C(n+1, 2) = \frac{n(n+1)}{2};$

Digitized by Google

(6) $$C(2,2)+C(3,2)+C(4,2)+\ldots+C(n+1,2)= = C(n+2,3)=\frac{n(n+1)(n+2}{1.2.3};$$

(7) $$C(3,3)+C(4,3)+C(5.,3)+\ldots+C(n+2,3)= = C(n+3,4)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4};$$ et cetera.

5. *Progressiones arithmetico ordinario (de 1° ordine).*

Classe ordinato de numeros (sive successione) es dicto progressione arithmetico de 1° ordine, si differentia de omni numero (1) ab successivo es invariabile.

$$\div a_1 , a_2 , a_3 \ldots . \quad a_{n-1} , a_n \ldots .$$

$$a_n - a_{n-1} = d.$$

Es facile demonstrare que: (8) $a_n = a_1 + (n-1)d$, et, dum summa de numero aequidistante ab extremo es aequale ad summa de extremo,

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n ,$$

seque (si s_n indica summa de primo n numeros de progressione):

(9) $$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n .$$

Exemplo: $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, [Vide (5)].

6. *Progressiones arithmetico de 2° ordine.*

Successione de numeros es vocato progressione arithmetico de 2° ordine, si differentia de numero consecutivo forma progressione de 1° ordine.

$$\begin{array}{ccccccccc} a_1 & & a_2 & & a_3 & \ldots\ldots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ & b_1 & & b_2 & & b_3 \ldots\ldots & b_{n-2} & b_{n-1} & \\ & & d & & d & d \ldots\ldots\ldots & d & & \end{array}$$

Nos habe:

(10) $$a_n = a_1 + C(n-1,1)b_1 + C(n-1,2)d.$$

---

(1) Numeros pote es numero reale.

Digitized by Google

Dem. $a_n = a_1 + b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-2} + b_{n-1} =$
$= a_1 + b_1 + (b_1 + d) + \ldots + [b_1 + (n-3)d] + [b_1 + (n-2)d] =$
$= a_1 + (n-1)b_1 + [1 + 2 + \ldots + (n-3) + (n-2)]d =$
$$= a_1 + (n-1)b_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} d . \qquad [5]$$

Nos habe etiam:

(11) $$S_n = C(n,1)a_1 + C(n,2)b_1 + C(n,3)d .$$

Dem. $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n =$
$= a_1 + (a_1 + b_1) + (a_1 + b_1 + b_2) + \ldots + (a_1 + b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-2}) + (a_1 + b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1}) =$
$= na_1 + b_1 + (2b_1 + d) + (3b_1 + d + 2d) + (4b_1 + d + 2d + 3d) + \ldots + [(n-1)b_1 + d + 2d + \ldots + (n-2)d]$
$= na_1 + [1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-1)]b_1 + [1 + 3 + 6 + \ldots + (1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2)]d .$

Coefficiente de b_1 es summa de primo $n-1$ numeros naturale, coefficiente de d es summa de primo $n-2$ numeros triangulare, ergo per (5), (6) nos habe:

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} b_1 + C(n,3)d ,$$

hoc es (11).

7. *Progressiones arithmetico de 3° ordine.*

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 \ldots\ldots & a_{n-2} & & a_{n-1} & & a_n \\ & b_1 & & b_2 & & b_3 & b_4 \ldots\ldots\ldots & & b_{n-2} & & b_{n-1} & \\ & & c_1 & & c_2 & & c_3 \quad c_4 \ldots\ldots\ldots & & c_{n-2} & & & \\ & & & d & & d & d \quad d \ldots . & d & & & & \end{array}$$

Homo habe:

(12) $$a_n = a_1 + C(n-1,1)b_1 + C(n-1,2)c_1 + C(n-1,3)d .$$

Dem. $a_n = a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-2} + b_{n-1} =$
$= a_1 + b_1 + (b_1 + c_1) + (b_1 + c_1 + c_2) + \ldots + (b_1 + c_1 + c_2 + \ldots + c_{n-3}) + (b_1 + c_1 + c_2 + \ldots + c_{n-2}) =$
$= a_1 + (n-1)b_1 + c_1 + (2c_1 + d) + (3c_1 + d + 2d) + \ldots + [(n-2)c_1 + d + 2d + 3d + \ldots + (n-3)d] =$
$= a_1 + (n-1)b_1 + [1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2)]c_1 + \ldots +$
$+ [1 + (1+2) + (1+2+3) + \ldots + (1+2+3+\ldots+(n-3))]d =$
$$= a_1 + (n-1)b_1 + C(n-1,2)c_1 + C(n-1,3)d ,$$

per (5) et (6).

Digitized by Google

Nos habe etiam:

$$(13) \qquad S_n = na_1 + C(n,2)b_1 + C(n,3)c_1 + C(n,4)d.$$

Dem. $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n =$
$= a_1 + (a_1 + b_1) + (a_1 + b_1 + b_2) + (a_1 + b_1 + b_2 + b_3) +$
$+ \ldots + (a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1}) =$
$= na_1 + b_1 + (2b_1 + c_1) + (3b_1 + 2c_1 + c_2) + (4b_1 + 3c_1 +$
$+ 2c_2 + c_3) + \ldots + [(n-1)b_1 + (n-2)c_1 + (n-3)c_2 + \ldots + c_{n-2}]$
$= na_1 + [1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-1)]b_1 + [1 + 3 + 6 +$
$+ 10 + \ldots + C(n-1,2)]c_1 + [1 + 4 + \ldots + C(n-1,3)]d$
$= C(n,1)a_1 + C(n,2)b_1 + C(n,3)c_1 + C(n,4)d,$

per (5), (6), (7).

8. *Progressiones arithmetico generale de ordine* m.

		t_1	t_2	t_3	t_4	. . . . .	t_{n-2}	t_{n-1}	t_n
Primo differentias		$t_{1,1}$	$t_{2,1}$	$t_{3,1}$	$t_{4,1}$	. . . . .	$t_{n-2,1}$	$t_{n-1,1}$	
Secundo	"		$t_{1,2}$	$t_{2,2}$	$t_{3,2}$	$t_{4,2}$	$t_{n-2,2}$		
Tertio	"			$t_{1,3}$	$t_{2,3}$	$t_{3,3}$	$t_{4,3}$ . . .	$t_{n-3,3}$	
					. . . . .				
$(m-1)^{mo}$	"				$t_{1,m-1}$	$t_{2,m-1}$	$t_{3,m-1}$ . . .	$t_{n-m+1,m-1}$	
m^{mo}	"				$t_{1,m} = t_{2,m} = t_{3,m} = \ldots = t_{n-m,m} (= d).$				

Nos habe:

$$(14) \qquad t_n = t_1 + C(n-1,1)t_{1,1} + C(n-1,2)t_{1,2} + \ldots + C(n-1,m)t_{1,m}.$$

Demostratione. Nos habe: (α) $t_{r,m-1} = t_{1,m-1} + (r-1)t_{1,m}$, nam omni numero de $(m-1)^{mo}$ successione de differentias es acquale ad primo de ipso successione aucto de differentia invariabile $t_{1,m}$ multiplicato per numero de elementos que praece de illo que nos considera.

Nunc si nos auge summa $t_{1,m-1} + t_{2,m-1} + \ldots + t_{r-1,m-1}$ ad primo elemento de $(m-2)^{mo}$ successione $t_{1,m-2}$, nos habe elemento r^{mo} de hoc successione:

$$t_{r,m-2} = t_{1,m-2} + t_{1,m-1} + t_{2,m-1} + \ldots + t_{r-1,m-1} =$$
$$= t_{1,m-2} + t_{1,m-1} + (t_{1,m-1} + t_{1,m}) + (t_{1,m-1} + 2t_{1,m}) + \ldots +$$
$$+ (t_{1,m-1} + (r-2)t_{1,m}) =$$
$$= t_{1,m-2} + (r-1)t_{1,m-1} + [1 + 2 + \ldots + (r-2)]t_{1,m} =$$
$$(\beta) \qquad = t_{1,m-2} + (r-1)t_{1,m-1} + C(r-1,2)t_{1,m}.$$

Digitized by Google

Ut de (α) nos habe deducto (β), sic ab aequalitate supposito:

$$(\gamma)\quad t_{r,m-k} = t_{1,m-k} + (r-1)t_{1,m-k+1} + C(r-1,2)t_{1,m-k+2} + \\ + \ldots + C(r-1,k)t_{1,m}$$

nos deduc:

$$t_{r,m-k-1} = t_{1,m-k-1} + (r-1)t_{1,m-k} + C(r-1,2)t_{1,m-k+1} + \\ + \ldots + C(r-1,k+1)t_{1,m}.$$

Sed (γ) es vero per $k=2$ [:], ergo (γ) es vero [Induct] etiam per $k=3,4,\ldots,m$.

Per $k=m, r=n$, (γ) praebe (14), nam $n-1=C(n-1,1)$.

Nos habe etiam:

$$(15)\quad S_n = nt_1 + C(n,2)t_{1,1} + C(n,3)t_{1,2} + \ldots + C(n,m+1)t_{1,m}.$$

Dem. $S_n = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{n-1} + t_n$

et per (13):

$$S_n = t_1 + (t_1 + t_{1,1}) + [t_1 + C(2,1)t_{1,1} + C(2,2)t_{1,2}] + \ldots + \\ + [t_1 + C(n-2,1)t_{1,1} + C(n-2,2)t_{1,2} + \ldots + C(n-2,m-1)t_{1,m-1}] \\ + [t_1 + C(n-1,1)t_{1,1} + C(n-1,2)t_{1,2} + \ldots + C(n-1,m)t_{1,m}].$$

Ergo per (4) aut (4)′ nos habe:

$$\begin{aligned} S_n = {} & t_1 + \\ & + t_1 + C(1,1)t_{1,1} + \\ & + t_1 + C(2,1)t_{1,1} + C(2,2)t_{1,2} + \\ & + t_1 + C(3,1)t_{1,1} + C(3,2)t_{1,2} + C(3,3)t_{1,3} + \\ & + \ldots\ldots\ldots, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + t_1 + C(n-2,1)t_{1,1} + C(n-2,2)t_{1,2} + C(n-2,3)t_{1,3} + \\ & \quad + \ldots + C(n-2,m-1)t_{1,m-} + \\ & + t_1 + C(n-1,1)t_{1,1} + C(n-1,2)t_{1,2} + C(n-1,3)t_{1,3} + \\ & \quad + \ldots + C(n-1,m-1)t_{1,m-} + C(n-1,m)t_{1,m}, \end{aligned}$$

et in fine:

$$S_n = nt_1 + C(n,2)t_{1,1} + C(n,3)t_{1,2} + C(n,4)t_{1,3} + \ldots + \\ + C(n,m)t_{1,m-1} + C(n,m+1)t_{1,m}.$$

9. *Summas de potentias simile de* N_1.

Digitized by Google

Ab (1) nos deduc:

$$(n+1)^{m+1} = n^{m+1} + C(m+1,1)n^m + C(m+1,2)n^{m-1} + \\ + \ldots + C(m+1,m)n + C(m+1,m+1)\cdot 1$$

et per $n = 1, 2, 3 \ldots n$:

$$2^{m+1} = 1^{m+1} + C(m+1,1)1^m + C(m+1,2)1^{m-1} + \ldots + \\ + C(m+1,m)\cdot 1 + C(m+1,m+1),$$
$$3^{m+1} = 2^{m+1} + C(m+1,1)2^m + C(m+1,2)2^{m-1} + \ldots + \\ + C(m+1,m)\cdot 2 + C(m+1,m+1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(n+1)^{m+1} = n^{m+1} + C(m+1,1)n^m + C(m+1,2)n^{m-1} + \\ + \ldots + C(m+1,m)n + C(m+1,m+1).$$

Si nos summa et pone:

$$S_m = 1^m + 2^m + 3^m + \ldots n^m,$$

et memora que (5):

$$S_0 = 1^0 + 2^0 + 3^0 + \ldots + n^0 = n,$$
$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

nos inveni:

$$(16)\quad (n+1)^{m+1} = 1 + C(m+1,1)S_m + C(m+1,2)S_{m-1} + \\ + C(m+1,m)S_1 + S_0,$$

unde homo trahe S_m si cognosce $S_0, S_1, S_2 \ldots, S_{m-1}$.

Es noto que:

$$(17)\quad S_0 = n, S_1 = \frac{n(n+1)}{2}, S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, S_3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

et cetera.

10. Nos pote inveni (17) etiam in alio modo, dum nos applica (11) (13) (15).

Nam nos habe que successione de secundo potentia de N_1 es progressione de 2° ordine,

$$1 \quad 4 \quad 9 \quad 16 \quad 25 \quad 36 \ldots . \quad (n-1)^2, n^2, (n+1)^2$$
$$3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad 11 \ldots \ldots \quad 2n-1, 2n+1$$
$$2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \ldots \ldots \ldots \quad 2$$

Digitized by Google

ergo per (11) homo habe:

$$(18)\qquad S_2 = n + 3C(n\,,\,2) + 2C(n\,,\,3) = n + \frac{3n(n-1)}{2} + \frac{2n(n-1)(n-2)}{2\,.\,3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.$$

Successione de tertio potentia de N_1 es progressione de 3° ordine:

$$\begin{array}{l} 1\quad 8\quad 27\quad 64\ldots\ldots(n-1)^3\,,\,n^3\,,\,(n+1)^3\,,\,(n+2)^3 \\ \quad 7\quad 19\quad 37\quad 61\ldots\ldots 3n^2-3n+1\,,3n^2+3n+1\,,3n^2+3n\cdot 3+7 \\ \quad\quad 12\quad 18\quad 24\ldots\ldots 6n\,,\,6n+6\,, \\ \quad\quad\quad 6\quad\ 6\quad\ 6\ldots\ldots 6 \end{array}$$

ergo per (13) homo habe:

$$(19)\quad S_3 = n + 7C(n\,,2) + 12C(n\,,3) + 6\,C(n\,,4) = n + \frac{7n(n-1)}{2} + \frac{12n(n-1)(n-2)}{2\,.\,3} + \frac{6n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} =$$

$$= n + \frac{7n(n-1)}{2} + 2n(n-1)(n-2) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4} = \frac{4n + n(n-1)[n^2+3n+4]}{4} =$$

$$= \frac{n^2[n^2+2n+1]}{4} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Successione de quarto potentia de N_1 es progressione de 4° ordine et nos pote inveni S_4 cum (15) et cetera.

$$\begin{array}{l} 1\quad 16\quad 81\quad 256\quad 625\quad 1296\ldots\ldots \\ \quad 15\quad 65\quad 175\quad 369\quad 671\ldots\ldots \\ \quad\quad 50\quad 110\quad 194\quad 302\ldots\ldots \\ \quad\quad\quad 60\quad 84\quad 108\ldots\ldots \\ \quad\quad\quad\quad 24\quad 24\ldots\ldots \end{array}$$

11. Nos pote inveni S_3 etiam in alio tres modo, ut seque.

Theorema - *Tertio potentia de* N_1 *es summa de numeros dispari consecutivo:* (1)

---

(1) In generale summa de n^k numero dispari consecutivo:

$$(n-1)n^k+1\,,\,(n-1)n^k+3\,,\ldots(n-1)n^k+1+2(n^k-1)\,,$$

es: $$[(n-1)n^k+1+n^k-1]n^k = n^{2k+1}\,.$$

Vide: R. Baltzer - Arithmetica gen. que verte L. Cremona, pag. 115.

Digitized by Google

Nam, summa de n numero dispari consecutivo:

$$(n-1)n+1\,,\,(n-1)n+3\,,\,\ldots\,(n-1)n+1+2(n-1)\,,$$

es (9): $\dfrac{2[(n-1)n+1]+2(n-1)}{2}\cdot n=[(n-1)n+1+(n-1)]n=n^3$.

Ergo:

$$1^3=1\,,\,2^3=3+5\,,\,3^3=7+9+11\,,\,\ldots\,n^3=[(n-1)n+1]+$$
$$+[(n-1)n+3]+\ldots+[(n-1)n+1+2(n-1)]$$

3° modo per obtine S_3

$$S_3=1^3+2^3+3^2+\ldots+n^3=$$
$$=1+(3+5)+(7+9+11)+\ldots+\{[(n-1)n+1]+$$
$$+[(n-1)n+3]+\ldots+[(n-1)n+1+2(n-1)]\},$$

el nam numero de numeros dispari es:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}\,,$$

et ultimo de illo es: $\dfrac{2n(n+1)}{2}-1=n(n+1)-1$, per (9) nos habe: $\left(\dfrac{1+n(n+1)-1}{2}\right)\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

12. *4° modo per obtine* S_3.

Nos habe:

(20) $S_3=1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2$.

Dem. Si nos habe:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3=[1+2+3+\ldots+(n-1)]^2\,,$$

si nos adde ad 1° membro n^3 et ad 2°, in parenthesi, n, dum es:

$$n^3=n^2+2n+4n+6n+\ldots+2(n-1)n\,,$$

nam $n^2+2n+4n+6n+\ldots+2(n-1)n=n^2+n[2+4+$
$$+\ldots+2(n-1)]=n^2+n^2-n^2=n^3\,,$$

nos habe (20).

Nunc (20) es vero per $n=1\,,2\,,\{1^3+2^3=9=(1+2)^2\}$, ergo [Induct] (20) es vero in generale.

Ergo homo habe: $S_3=(1+2+\ldots+n)^2=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Digitized by Google

13. *5° modo per obtine* S_3.

Si nos quaere summa de numero de tabella:

1	2	3	4	. . . . . n
2	4	6	8	. . . . . $2n$
3	6	9	12	. . . . . $3n$
4	8	12	16	. . . . . $4n$
. . . . .				
. . . . .				
n	$2n$	$3n$	$4n$	. . . . . n^2

nos inveni:

$$S_{(1)} = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$S_{(2)} = 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = \frac{2n(n+1)}{2},$$

$$S_{(3)} = 3 + 6 + 9 + \ldots + 3n + \frac{3n(n+1)}{2},$$

. . . . . .

$$S_{(n)} = n + 2n + 3n + \ldots + n^2 = \frac{n.n(n+1)}{2},$$

Ergo summa que nos quaere, es:

$$S = S_{(1)} + S_{(2)} + S_{(3)} + \ldots + S_{(n)} = \frac{n(n+1)}{2}\{1 + 2 + 3 + \ldots + n\} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Si nos observa (19), vide que $S = S_3$. Quare?

Summa de numero de *gnomone* (1) in tabella es:

$$1 = 1^3\,;\; 2 + 2 + 4 = 8 = 2^3\,;\; 3 + 6 + 9 + 3 + 6 = 3^3\,;\; 4 + 8 + 12 + 16 + 12 + 8 + 4 = 4^3\,;$$

$$n^2 + 2[n + 2n + 3n + \ldots + n(n-1)] = n^2 + 2n\frac{(n-1)n}{2} = n^3.$$

Ergo:

$$S_3 = \frac{n(n+1)}{2} + 2\frac{n(n+1)}{2} + 3\frac{n(n+1)}{2} + \ldots + n\frac{n(n+1)}{2} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^3.$$

---

(1) Si es quadrato nos tolle parvo quadrato cum vertice commune, nos habe *gnomone*.

Digitized by Google

Una notevole corrispondenza fra i termini di una progressione e quelli di una successione

di ENRICO PICCIOLI (Siena)

1. Sono dati:

una progressione aritmetica di ragione r e primo termine a

$$(\alpha) \qquad \div a \cdot a + r \cdot a + 2r \cdot a + 3r \ldots\ldots$$

e una successione (β) ottenuta scrivendo uno dopo l'altro i termini delle progressioni limitate

$$P_1 P_2 P_3 \ldots\ldots P_{m-1}$$

e quelli della progressione illimitata P_m,
dove:

P_1 è costituita di h_1 termini, ha come 1° term. a_1 e rag. r_1
$P_2 \ldots\ldots\ldots h_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_2 \ldots\ldots r_2$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$P_{m-1} \ldots\ldots\ldots h_{m-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{m-1} \ldots\ldots r_{m-1}$
e P_m ha per primo termine a_m e ragione r_m.

Stabilita una corrispondenza fra i termini della progressione (α) e i numeri:

$$a_1\ a_1+r_1 \ldots\ldots a_1+(h_1-1)r_1\,;\ a_2\ a_2+r_2 \ldots\ldots a_2+(h_2-1)r_2 \ldots\ldots$$
$$a_{m-1}\ a_{m-1}+r_1 \ldots a_{m-1}+(h_{m-1}-1)r_{m-1}.$$

che costituiscono la successione (β), per modo che si corrispondano a ed a_1 e si ritengano come corrispondenti due termini equidistanti da a e da a_1 ci proponiamo di trovare una formula che permetta di calcolare quale termine di (β) corrisponde al termine s — mo di (α).

É chiaro che basterà conoscere:

1) a quale delle progressioni $P_1 P_2 \ldots P_m$ appartiene il corrispondente di questo termine s-mo di (α).

2) qual'è il posto occupato da questo corrispondente nella progressione di cui fa parte.

Digitized by Google

Poniamo

$$H_1 = h_1 \ ; \ H_2 = h_1 + h_2 \ ; \text{ e in generale}$$

$$(1) \qquad H_p = h_1 + h_2 + h_3 \ldots . h_p .$$

e confrontiamo s con le H così ottenute. Supponiamo, per esempio, che sia H_{n-1} la *massima* fra le H che è *minore* di s: potremo asserire che l's-mo termine della progressione α) ha per corrispondente in β) un termine appartenente alla progressione P_n. Se poi risulti:

$$(2) \qquad s = H_{n-1} + t , \qquad (t = 1 , 2 \ldots . h_n)$$

questo corrispondente occuperà in detta progressione il posto t — *mo*: cosicchè si potrà dire che al termine s — *mo* della progressione α) corrisponde nella successione β) il termine:

$$a_n + (t - 1) \cdot r_n .$$

Esempio. La progressione α) sia quella dei numeri dispari

$$\div 1 . 3 . 5 . 7 . 9 \ldots \ldots$$

e la (β) sia formata da

P_1	$\div 3 . 4 . 5 . 6 . 7$	$h_1 = 5$	$r_1 = 1$
P_2	$\div 9 . 8 . 7 . 6$	$h_2 = 4$	$r_2 = -1$
P_3	$\div 6 . 10 . 14 . 18 . 22 . 26 . 30$	$h_3 = 7$	$r_3 = 4$
P_4	$\div 11 . 8 . 5 . 2 . -1 . -4 . -7$	$h_4 = 7$	$r_4 = -3$
P_5	$\div 1 . 2 . 3$		$r_5 = 1$

e si voglia il corrispondente del termine *trentesimo* della prima progressione.

Siccome è

$$H_1 = 5 \qquad H_2 = 9 \qquad H_3 = 16 \qquad H_4 = 23 \qquad H_5 \text{ illim...},$$

per essere $s = 30$, si potrà scrivere $s > H_4$:

cosicchè $\qquad n - 1 = 4 \ , \ n = 5$

e il corrispondente del termine trentesimo della prima progressione si troverà in P_5.

Avendosi poi $\qquad 30 = 23 + 7 ,$

sarà proprio il *settimo* termine di P_5 e quindi

$$a_5 + (7 - 1) \cdot 1 = 1 + 6 = 7.$$

Digitized by Google

Osservazione. Si possono imporre delle condizioni alle progressioni $P_1 P_2 \ldots . P_{m-1}$: per esempio, si può supporre che abbiano tutte un *medesimo* numero di termini h e la medesima *ragione* ρ. Possiamo supporre inoltre che i primi termini delle progressioni formino a loro volta una progressione di ragione d. In tal caso si avrà:

(3) $$H_2 = 2h \qquad H_3 = 3h \ \ldots \ H_p = ph.$$

e il corrispondente del termine $s - mo$ sarà:

(4) $$a_1 + (n-1) \cdot d + (t-1)\rho,$$

essendo n determinato dalla condizione di essere il massimo numero intero per cui è soddisfatta la: $s > (n-1) \cdot h$. Basta scrivere: $n \cdot h \geq s > (n-1) \cdot h$.

Applicazione.

2. Si convenga che ai giorni della settimana:

domenica, lunedì, martedì, mercoledì, giovedì, venerdì, sabato

corrispondano rispettivamente i numeri:

0 1 2 3 4 5 6

e si assuma come progressione fondamentale (α) quella dei numeri

(α') $$\div 1901 \ . \ 1902 \ . \ 1903 \ . \ . \ . \ . \ . \ 2100$$

facendo corrispondere a ciascun termine — che è un anno del secolo ventesimo o ventunesimo — il numero del giorno con cui l'anno è *incominciato*, valendosi della convenzione precedente. Così, al 1901, cominciato di martedì, si farà corrispondere il numero 2, al 1905, cominciato di domenica, il numero 0 ecc.

Allora:

P_1	sarà	costituita	dei	numeri	2	3	4	5	
P_2	"	"	"	"	0	1	2	3	
P_3	"	"	"	"	5	6	0	1	
P_4	"	"	"	"	3	4	5	6	ecc.

Si vede subito che è $\rho = 1$ e $h = 4$.

Se poi conveniamo ancora che a un numero m si possa

Digitized by Google

sostituire uno qualunque dei numeri p che soddisfanno alla congruenza:

$$p \equiv m \pmod 7,$$

potremo anche dire che:

P_1	è formata dei numeri			2	3	4	5
P_2	"	"	"	7	8	9	10
P_3	"	"	"	12	13	14	15
P_4	"	"	"	17	18	19	20;

e allora risulterà chiaro che il numero che abbiamo indicato con d è uguale a 5.

Con questi dati, cioè $h = 4$, $p = 1$, $d = 5$, e tenuto conto della (2) e (3) da cui segue

$$t = s - 4 \cdot (n - 1),$$

l'espressione (4) che fornisce il corrispondente del termine che occupa il posto $s - mo$ nella progressione (α), assume un aspetto più semplice:

(5) $$a_1 + n + s - 2$$

dove n soddisfa alla limitazione: $4n \geq s > 4 \cdot (n - 1)$.

Esempio:

Si vuol sapere in quale giorno della settimana comincierà l'anno 1984.

Essendo 1984 l'84-esimo termine della progressione (α'), sarà $s = 84$. D'altra parte la limitazione ci porta a $n = 21$; non ci resta che sostituire nella (5) ricordando che $a_1 = 2$.

Si trova $2 + 21 + 84 - 2 = 105$

E siccome è $105 \equiv 0 \pmod 7$,

il 1984 comincierà di *domenica*.

Altro esempio. Si voglia sapere in che giorno comincierà il 1972.

Si ha $s = 72$, $n = 18$,

$$a_1 + n + s - 2 = 2 + 18 + 72 - 2 = 90.$$

$$90 \equiv 6 \pmod 7.$$

Il 1972 comincierà di *sabato*.

Osservazione. La progressione (α') si può proseguire a destra e a sinistra. Per proseguirla a destra basta calcolare il numero corrispondente al termine 2101 — che è 6 — dietro

Digitized by Google

l'osservazione che l'anno 2100 comincierà e finirà di venerdì: tanto ci basta per poter prolungare la progressione fino al termine 2199. Così poi di seguito.

Per il prolungamento a sinistra basta calcolare il numero corrispondente a 1801, numero ottenibile con l'espressione (5):

$$a_1 + s + n - 2$$

con riferimento alla progressione:

$$\div\ 1801 \cdot 1802 \ldots\ldots 1900.$$

In essa è incognito — lo diremo x — il corrispondente del primo termine, mentre quello di 1900 — è facile calcolarlo — è *uno*.

Si ricava $x + 100 + 25 - 2 \equiv 1 \pmod 7$

da cui $x = 4$.

Il 1801 cominciò di *giovedì*: così si trova che il 1701 cominciò di *sabato* e il 1700 di *venerdì*.

Per l'intervallo 1583-1700 non occorre spezzamento alcuno, essendo stato bisestile il 1600 per la riforma Gregoriana. Si trova che il 1583 cominciò di *sabato*, cosicchè il 1582 terminò di *venerdì*. Fu questo l'anno della riforma, per la quale il 5 Ottobre fu chiamato 15 Ottobre: ma il 15 Ottobre viene nello stesso giorno dell'ultimo dell'anno, dunque il 5 Ottobre venne di *venerdì*: il 1582 era cominciato di *lunedì*. Dietro questo resultato il computo dei numeri corrispondenti agli anni del calendario Giuliano si effettua col solo aiuto della formula (5).

Volendo rimanere nell'intervallo 1901-1999, la ricerca si può effettuare molto facilmente, anche a memoria, perchè l'espressione $a_1 + s + n - 1$, per essere $a_1 = 2$, si riduce a $n + s$.

Qui s è rappresentato dal numero formato dalle *due ultime* cifre a destra del numero dato, mentre n è il quoziente esatto della divisione di n per 4 se l'anno è bisestile, il *successivo* del quoziente approssimato se non è bisestile.

Esempio. In qual giorno comincierà l'anno 1957?

Si ha $s = 57$

$n = \underline{15}$ $\qquad$ $57 \mid \underline{4}$

72 $\qquad$ $1\ \ 14$

$\therefore\ 72 \equiv 2 \pmod 7$ *martedì*.

Digitized by Google

3. Ci rimane a risolvere un altro problema:

« Intendendo per *data* l'insieme dei tre elementi: *giorno*, « *mese* ed *anno*, calcolare in quale giorno settimanale cade « una data assegnata.

Questa questione si risolve facendo ricorso al problema da noi trattato al numero *uno* del presente articolo.

La progressione (α) non è altro che quella dei numeri naturali e che può esser limitata a 366 termini, massimo numero di questa progressione: dire infatti 5 febbraio 1928 vuol dire il 36-mo termine della (α), cioè il 36-mo giorno dell'anno.

La progressione (β) è costituita dalle progressioni parziali $P_1 P_2 \ldots$ tutte uguali, aventi per ragione $p = 1$ e per termini i numeri 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 o una loro permutazione circolare.

É $d = 0$, cosicchè l'espressione (4), che ci dà il corrispondente del termine D di (α) nella (β) diventa $a_1 + t - 1$ dove, essendo t il resto della divisione di D per 7 ($h = 7$), è $t - 1$ il resto della divisione di $D - 1$ per 7.

In conclusione, il corrispondente in (β) del termine D di (α) è dato dal resto della divisione per 7 di $a_1 + D - 1$. Il computo di D si può render semplice per due motivi:

1°) convenendo di aggiungere al numero che nella *data* indica il giorno del mese, il numero dei giorni contenuti nei mesi che precedono quello indicato nella data stessa: ciò equivale a porre questa corrispondenza:

anno comune	gennaio	0	luglio	181
	febbraio	31	agosto	212
	marzo	59	settembre	243
	aprile	90	ottobre	273
	maggie	120	novembre	304
	giugno	151	dicembre	335
anno bisestile	gennaio	0	luglio	182
	febbraio	31	agosto	213
	marzo	60	settembre	244
	aprile	91	ottobre	274
	maggio	121	novembre	305
	giugno	152	dicembre	336

Digitized by Google

2°) osservando che è lecito rimpiazzare i detti numeri coi resti della loro divisione per **7**: il quadro prende allora l'aspetto:

MESI	Anno comune		Anno bisestile	
	Numero	Resto	Numero	Resto
Gennaio	0	0	0	0
Febbraio	31	3	31	3
Marzo	59	3	60	4
Aprile	90	6	91	0
Maggio	120	1	121	2
Giugno	151	4	152	5
Luglio	181	6	182	0
Agosto	212	2	213	3
Settembre	243	5	244	6
Ottobre	273	0	274	1
Novembre	304	3	305	4
Dicembre	335	5	336	6

Non potrei fare migliore applicazione di quanto precede se non calcolando due date ugualmente care al cuore di ogni buon Italiano: quella della nascita di Benito Mussolini e quella della Marcia su Roma.

Per la prima — 29 luglio 1883 — si ha:

$$D = 29 + 6 = 35 \equiv 0 \pmod 7 \; ; \; a_1 = 1$$
$$a_1 + D - 1 = 1 + 0 - 1 \equiv 0 \pmod 7$$

Il Duce del Fascismo — che Dio conservi alle maggiori fortune d'Italia — è nato di *domenica*.

Per la seconda — 28 ottobre 1922 — si ha:

$$D = 28 + 0 \equiv 0 \pmod 7 \; ; \; a_1 = 0$$
$$a_1 + D - 1 = 0 + 0 - 1 \equiv 6 \pmod 7.$$

Il giorno della Marcia su Roma cadde in *sabato*.

Digitized by Google

PICCOLE NOTE

Un problema inverso di miscuglio

Il problema che dice: In un recipiente vi erano n litri di vino; di questi ne sono stati tolti a e sostituiti con acqua; poi ne sono stati tolti b e sostituiti con acqua; poi ancora c e sostituiti con acqua. e così via; quanto vino e quanta acqua trovasi infine nel miscuglio?

è problema elementare che, coi dati espressi da numeri, trovasi in molti libri di aritmetica, come utile esercizio di calcolo frazionario.

La quantità di vino richiesta è:

$$\frac{(n-a)(n-b)(n-c)}{n^2},$$

e quella d'acqua:

$$\frac{a(n-b)(n-c)+n^2(b+c)-bcn}{n^2}.$$

Sommando si ritrova, come deve essere:

$$\frac{(n-a)(n-b)(n-c)+a(n-b)(n-c)+n^2(b+c)-bcn}{n^2}=n.$$

Ma il problema inverso non è così semplice come potrebbe parere a prima vista. Un tale, un giorno, mi dice di aver visto proposto su un almanacco (*) il seguente problema:

« Da un caratello pieno di vino furono tolti 12 litri e sostituiti con « 12 litri d'acqua. Una seconda volta furono tolti altri 12 litri e sosti- « tuiti con acqua; la 3ª volta altri 12 litri e sostituiti con acqua. Arrivato « il vino a destinazione si accorsero della sottrazione del vino e fatta « l'analisi constatarono che vi erano rimasti soli 55 litri di vino.

« Quanto vino conteneva in principio il caratello? ».

Ecco come può trattarsi il problema.

Sia x il numero dei litri di vino che conteneva il caratello in principio. Dopo la prima sottrazione esso conterrà:

(α) litri $x-12$ di vino ; litri 12 di acqua

Ora i 12 litri che vengono sottratti la 2ª volta non sono di puro vino, ma contengono vino e acqua in parti proporzionali alle quantità (α), cioè:

vino litri $\frac{12(x-12)}{x}=\frac{12x-144}{x}$; acqua litri $\frac{144}{x}$;

(*) (*N. d. D.*) Nel *Sesto Caio Baccelli*, almanacco toscano...., così fu riferito anche a noi.

Digitized by Google

e però dopo la seconda sostituzione di acqua a vino avremo nel caratello:

$$\text{vino: litri } x - 12 - \frac{12x - 144}{x} = \frac{x^2 - 24x + 144}{x} = \frac{(x-12)^2}{x};$$

(β)

$$\text{acqua: litri } \frac{24x - 144}{x} = \frac{12(2x-12)}{x}.$$

Similmente i 12 litri tolti la terza volta non sono di puro vino, ma contengono acqua e vino in parti proporzionali alle quantità (β), ovvero:

$$\text{vino: litri } \frac{12(x-12)^2}{x^2}; \text{ acqua: litri } \frac{12^2(2x-12)}{x^2}.$$

Epperò dopo la terza sostituzione di acqua a vino avremo nel caratello:

$$\text{vino: litri } \frac{(x-12)^2}{x} - \frac{12(x-12)^2}{x^2} = \frac{(x-12)^3}{x^2},$$

(γ)

$$\text{acqua: litri } \frac{12(2x-12)}{x} - \frac{12^2(2x-12)}{x^2} + 12 = \frac{12(x-12)(2x-12)+12x^2}{x^2}.$$

A riprova dell'esattezza dei calcoli si ha:

$$\frac{(x-12)^3}{x^2} + \frac{12(x-12)(2x-12)+12x^2}{x^2} = x.$$

D'altra parte dall'analisi è risultato essere rimasti nel caratello 55 litri di vino: Si tratta pertanto di risolvere l'equazione cubica:

$$\frac{(x-12)^3}{x^2} = 55, \tag{1}$$

ovvero:

$$x^3 - 91x^2 + 432x - 1728 = 0. \tag{2}$$

Quest'equazione è priva di radici razionali. Infatti per noti teoremi di Algebra (Vedi per es. Frattini G. Lezioni di Algebra, Geometria, Trigon. per 2° biennio d'Istituti tecnici, vol. 2°, Cap. 1°) la (2), avendo eguale a 1 il coeff. di x^3, se ha radici razionali, queste debbono essere intere e divisori del termine noto. D'altra parte, poichè la 1ª volta si sono tolti 12 litri di vino schietto, e la 2ª e 3ª volta più della metà del miscuglio era vino, e infine sono rimasti 55 litri di vino, in principio il caratello doveva contenere più di 79 litri di vino, ma meno di 91 perchè non tutto vino era quello tolto nelle tre volte.

Ora dei divisori di 1728 compresi fra 79 e 91 non se ne hanno; dunque la (2) non ha radici razionali.

Chi voglia le radici irrazionali, può trasformare la (2) per radici aumentate:

$$x = y + \frac{91}{3}$$

e applicare la formula risolutiva dell'equazione che risulta:

$$y^3 - \frac{6985}{3}y + \frac{6.130.952}{9} = 0. \tag{3}$$

Digitized by Google

Io, per me, vi rinunzio. Preferisco piuttosto, dopo aver constatato che il dato del problema 55 è male scelto, trovare qualche valore approssimato alla soluzione sotto forma di numero razionale.

1° Tentativo. — Sia 87 il numero dei litri di vino che erano in principio nel caratello.

Dopo la prima sostituzione vi saranno:

$$\text{vino litri } 75 \ ; \ \text{acqua litri } 12;$$

$$\text{dopo la } 2^a, \text{ vino litri } \frac{5625}{87}; \ \text{acqua litri } \frac{1944}{87};$$

$$\text{e dopo la } 3^a, \text{ vini litri } \frac{421875}{7569} \text{ e acqua litri } \frac{1944 \times 75}{87^2} + 12.$$

Ora:

$$\text{l. } \frac{421.875}{7569} = \text{l. } 55\frac{620}{841}.$$

2° Tentativo. — Sia 86 il numero dei litri di vino iniziali.

In ultimo vi saranno nel caratello:

$$\text{l. di vino } \frac{(86-12)^3}{86^2} = \frac{74^3}{86^2} = \frac{405.224}{7396} = 54\frac{5840}{7396}$$

cioè

$$\text{l. } 54\frac{1460}{1849}.$$

Si conclude che in principio nel caratello era contenuto una quantità di vino q

$$\text{l. } 86 < q < \text{l. } 87,$$

e più prossima a 87 che ad 86 perchè

$$\frac{620}{841} < \frac{1460}{1849}.$$

Tenendo conto del po' di vino versato nei travasi, possiamo ritenere anzi che vi fossero 87 l. di vino, senz'altro.

Generalizzazione. Togliendo da un recipiente per tre volte consentire a litri di vino (o di miscuglio) e sostituendoli con acqua, rimangono in esso p litri di vino. Quanti ve n'erano in principio?

Con ragionamento analogo a quello fatto sopra, trovasi che il numero x dei litri che si trovavano dapprima nel caratello è dato dall'equazione:

$$\frac{(x-a)^3}{x^2} = p. \tag{4}$$

Ma applicando a questa la trasformazione per radici aumentate:

$$x = y + \frac{3a+p}{3},$$

si perviene a un'equazione:

$$y^3 - \frac{(6a+p)p}{3}y - \frac{27a^3 + 81a^2p + 36ap^2 + 4p^3}{27} = 0, \tag{5}$$

che non si presta agevolmente all'applicazione della formula risolutiva.

Se l'operazione della permuta di acqua con vino si ripete n volte, si ha un problema di grado n.

A. Natucci (Chiavari)

Digitized by Google

La matematica e la fisica negli esami di maturità classica

Impressioni di un Commissario (*)

Incaricato di presiedere una Commissione d'esami di maturità in un importante Liceo classico, ho voluto cercare, più attentamente di quanto avessi fatto in altre simili occasioni, quali suggerimenti si possano trarre da questi esami riguardo all'insegnamento della matematica e della fisica nei Licei; e credo non inutile comunicare ai colleghi i risultati delle mie osservazioni. Le deficienze che io rileverò, ben lungi dall'essere una critica all'opera dei nostri insegnanti di matematica e fisica, il cui alto valore e la cui buona volontà sono fuori di ogni discussione, mostreranno come le condizioni difficili in cui, per ragioni ben note, essi sono posti rendano loro impossibile di esplicare con piena e sicura efficacia il loro compito. E una tale dimostrazione può essere più che mai opportuna oggi che la scienza è stata chiamata a reggere le sorti della pubblica istruzione.

Matematica.

1. Si propone ad un candidato di risolvere un triangolo.

Dialogo. « Che vuol dire risolvere un triangolo? » — « Trovare i suoi elementi ». — « Ma per trovare gli elementi bisogna conoscerne alcuni; quanti? ». — « *Almeno* tre ». — Messici d'accordo che quell'« almeno » c'è di troppo, si stabilisce quali elementi si vogliano dati e quali si cerchino. A questo punto il candidato dovrebbe dire anzitutto da quale degli elementi cercati egli preferisce di cominciare; ma no, — egli afferra a caso quello dei pochi teoremi di trigonometria che meglio ricorda (più spesso il teorema dei seni), e si mette ad applicarlo a vanvera, senza curarsi di esaminare se nel caso concreto gli serva o no. Qui non c'è tanto difetto di matematica quanto di logica. Il giovane dovrebbe essere abituato a fare questo modesto ragionamento: I dati sono per esempio i lati a, b, c, e cerco l'angolo α; dovrò perciò ricorrere ad un teorema in cui entrino i tre lati e un angolo, e non già ad uno in cui

(*) *(N. d. R.)* Per ragioni ovvie di squisita delicatezza, si omette il nome dell'illustre Professore che ci ha favorito queste impressioni.

Digitized by Google

entrino due lati e due angoli. Ma questo ragionamento egli non solo non lo fa spontaneamente, ma ben di rado vi giunge anche se messo sulla strada.

2. Si chiede come possano essere scelti i tre elementi che determinano un triangolo? Più d'uno risponde che possono prendersi anche i tre angoli; altri ricorda mnemonicamente che tra i dati ci deve essere un lato. Ma guai a chiederne la ragione! Talvolta, dopo molti giri, si riesce a fargli dire che ci sono molti (??) triangoli simili, ma la vera ragione, cioè che dare i tre angoli è dare *due soli* elementi indipendenti, non l'ho mai sentita dire.

3. Ancora sulla trigonometria. Si disegnano sulla lavagna due semirette, e si chiede di definire il seno dell'angolo da esse formato. » È il rapporto dell'ordinata al raggio ». — « Ma, se non c'è quì nessun cerchio, di qual raggio si parla? ». Dopo qualche discnssione, si conviene di tracciare un cerchio (« di raggio uno » — e che vuol dire?) col centro nel vertice, e così via. Ma io ho chiesto a qualcuno: E se prendeste un altro cerchio, otterreste lo stesso valore per il seno? Il candidato casca dalle nuvole, e non risponde. Ora è evidente che la definizione del seno come rapporto etc. non ha valore se non si dimostra l'indipendenza del rapporto dalla scelta del raggio: cosa semplicissima dal punto di vista matematico, ma che ha un alto valore logico.

4. Un'analoga lacuna si riscontra nella definizione della misura di un diedro. Dopo essere faticosamente arrivato a dire che cosa sia una sezione normale, il giovane non sogna neppure di porsi la questione, se due sezioni normali dieno la stessa misura; richiamato su questo punto, è solo dopo vari battibecchi che si riesce a fargli dire che si tratta di angoli aventi i lati rispettivamente paralleli.

5. La definizione di logaritmo viene ripetuta più o meno esattamente da quasi tutti; qualche volta occorrono lunghe discussioni per mettere al posto giusto i tre personaggi del *ménage à trois*: base, esponente, numero; non di rado, contro ogni buona norma architettonica, la base se ne va in alto, lasciando il posto all'esponente. Ma il guaio peggiore accade quando si chiede se la base dei logaritmi può essere scelta comunque. I più rispondono di sì; qualcuno, più furbo, indovina dalla domanda di dover rispondere di no, e dice che la base dev'essere intera, o razionale. o maggiore di uno, oppure che « di solito si prende per base dieci ». Naturalmente resta in gola all'esaminatore la domanda perchè la base debba essere positiva.

6. Quasi tutti sanno che sono triangoli simili quelli che hanno gli angoli eguali e i lati proporzionali, ed anche che le due condizioni sono interdipendenti. Ma, se si passa ai poligoni, ci si sente rispondere che sono simili i poligoni aventi gli angoli rispettivamente eguali; nè vale sempre a richiamare il giovane alla verità l'esempio del quadrato e del rettangolo. Come non vale l'esempio del rombo (nè tutti sanno che significhi questa parola), quando ci si dice che sono poligoni regolari

Digitized by Google

quelli aventi tutti i lati eguali. È il principio dell'analogia falsamente applicato, contro cui sarebbe necessario mettere insistentemente in guardia i giovani.

7. La risoluzione d'un sistema di due equazioni lineari con due incognite è un'operazione che molti, più o meno speditamente, sanno eseguire. Ma quale candidato mai sa dire qualche cosa del caso d'eccezione, in cui il determinante del sistema è nullo? Eppure è questa la parte più interessante della teoria delle equazioni lineari: il resto si riduce a puro meccanismo.

8. Si nota in molti giovani una grande difficoltà di esprimere in modo chiaro ed esatto le loro idee. Credo che tutti abbiano in mente ciò che è un prisma; ma da nessuno ho ottenuto una definizione precisa di questa figura geometrica. Peggio ancora se si parla, per esempio, di poliedro regolare. Converrebbe imprimere nella mente dei giovani il principio, che *definire* un oggetto significa fornire a chi ascolta elementi sufficienti per ricostruire, nel pensiero o materialmente, l'oggetto stesso. Così la definizione del prisma dovrebbe insegnare perfettamente a costruirne un modello...

9. Di un'ultima cosa vorrei dire — della poca famigliarità che hanno i giovani col calcolo numerico — peccato originale che portano dalla scuola elementare e che trascinano poi per tutta la vita; ma qui taccio, per non farmi gridare la croce addosso dai colleghi dei Licei, i quali diranno che non è affar loro insegnare l'aritmetica. Eppure è doloroso e vergognoso dover discutere, come avviene talvolta persino negli esami universitari, se moltiplicare per $\frac{1}{2}$ non sia lo stesso che dividere per 2, e se a diviso per a dia uno o zero!

Concludendo, la mia impressione è che l'ufficio *formativo* della matematica non sia abbastanza curato. Eppure, mentre la parte *algoritmica* della matematica serve solo alla minoranza che si dedicherà all'ingegneria od a studi congeneri, la parte *logica* è un sussidio necessario per tutti: per l'ingegnere come per il filosofo, per il medico come per il giurista. *Definire esattamente* e *ragionare rigorosamente* sono le premesse necessarie di qualunque ricerca od applicazione scientifica.

Fisica.

Qui le lacune si possono riassumere in due punti:

1. Deficiente visione del carattere strettamente aritmetico delle leggi fisiche, del fatto cioè, che una legge fisica è una relazione algebrica tra grandezze fisiche diverse.

Si chiede p. es. il principio di Mayer, e ci si sente rispondere semplicemente che il calore si trasforma in lavoro; si chiede la rifrazione, e ci si dice che il raggio si ripiega all'infuori o all'indentro a seconda della diversa densità dei mezzi; il coefficiente di dilatazione è l'allun-

Digitized by Google

gamento di una sbarra (di quale lunghezza?) per un aumento di temperatura (di quanti gradi?); capacità di un conduttore è la quantità d'elettricità che può contenere; il calore specifico è il calore necessario per elevare di un grado la temperatura di *un corpo*. E così via.

Anche qui, come per la matematica, si rivela un difetto di logica: troppo spesso la facoltà ragionante dorme per lasciare il campo al psittacismo. Se i giovani venissero costantemente richiamati — e non dai soli professori di matematica — al dovere di riflettere su ciò che dicono, e di esaminare se le cose dette hanno un senso, si potrebbero sentire ancora risposte errate, ma quelle prive di significato, che sono le più deplorevoli, sarebbero meno numerose. Quante volte mi sono sentito dire che l'angolo d'incidenza è eguale all'angolo di rifrazione!

2. Confusione tra le varie specie di grandezze che compaiono nella fisica.

La confusione tra forza ed energia è molto comune. Se chiediamo se la forza viva o la forza elettromotrice sia una forza, ci si risponde quasi invariabilmente di sì. E spesso sentiamo dire che la dina è quella forza che, applicata ad un grammo, lo sposta di un centimetro. « Un cavallo vapore equivale a 75 chilogrammetri »; e solo dopo un richiamo si ottiene di sentire aggiungere « per minuto secondo ». Giacchè non è frequente venire a conoscere la differenza che passa tra potenza e lavoro.

« La pressione esercitata da un fluido si trasmette egualmente in tutte le direzioni »: questo lo dicono tutti. Ma il difficile viene quando si domanda che cosa significhi quell' « egualmente »; per portarli sulla via della verità non c'è che richiamare il torchio idraulico, la cui imagine, per fortuna, quasi tutti ricordano. Il difetto dipende da confusione tra i concetti di pressione e di forza. Mi è avvenuto di chiedere a qualcuno se, ingrandendo la vaschetta, o variando il diametro del tubo, di un barometro torricelliano varierebbe l'altezza della colonna barometrica. Dopo qualche incertezza, l'istinto portò quasi sempre a rispondere di no; ma non ho mai potuto saperne la ragione.

Ora, se la matematica, dal punto di vista informativo, serve solo a pochi, non è lo stesso per la fisica, la cui conoscenza non è solo necessaria agli studenti di ingegneria e di matematica, ma anche a quelli di scienze naturali, chimica, farmacia, medicina. Ed è ovvio che chi studia la fisica senza avere un'idea netta delle varie grandezze fisiche è come chi contasse delle monete senza conoscere il loro singolo valore.

Per finire, un gioiello regalatomi da un collega: « Lo zero assoluto è un numero irrazionale ».

X.

Digitized by Google

NOTIZIE A FASCIO

La parola del Duce. Il 2 febbraio di quest'anno, il Capo del Governo, insediando solennemente, in Campidoglio, il Consiglio Nazionale delle Ricerche, ha detto:

« Il Governo Fascista riafferma la sua volontà di porre il problema della scienza e delle ricerche scientifiche al primo piano dei problemi nazionali »

Nuova costituzione del C. S. della P. I.: Plaudiamo vivamente alle nuove norme date col R. D. 23 novembre 1928 sulla costituzione ed il funzionamento del Consiglio Superiore della P. I. e ci compiacciamo nolto della nomina del Comm. ing. Giuseppe Cavazzana Preside del R. Liceo Scientifico di Verona a membro della Sezione del C. S. per l'istruzione media classica, scientifica e magistrale. Dal Comm. Cavazzana, che da lunghi anni è fedele abbonato di questo Bollettino, e concorde col programma del Bollettino stesso, molto attendiamo per l'alto ufficio a cui Egli è stato chiamato.

Interessamento del prof. Scorza e del prof. Severi: Merita di essere segnalato l'interessamento vivo che gli illustri prof.i Scorza e Severi continuano a dimostrare con l'azione che stanno esplicando allo scopo di assicurare l'esaudimento dei voti propugnati per un migliore assetto dell' insegnamento scientifico. (cfr. a pag. 40 N. d. D.)

YOUNG-MERCOGLIANO - « I concetti fondamentali dell'Algebra e della Geometria » - Per acquistare l'importante volume, rivolgersi al prof. Domenico Mercogliano (Antignano 54 - Napoli) inviando L. 15.

TORTORICI PIETRO - « Esercitazioni matematiche » - Parte I - Raccomandatissima per tutti i Lettori del Bollettino e più specialmente per coloro che intendano sostenere i Concorsi per cattedre di Scuole medie. Rivolgersi all'Autore in Via Garibaldi 50 Palermo (51) unendo la fascetta del Bollettino per fruire del ribasso del prezzo da L. 60 a L. 45.

Il 28 dicembre 1928 ha cessato di vivere il prof. **Luigi Carlini** del R. Istituto Tecnico di Udine. « È un altro valoroso — come « ha scritto di Lui l'illustre Preside Massimo Misani — che « scende nella tomba, uno di quelli, che insegnando l'arte e la « scienza, hanno pure insegnato colla voce, e coll'esempio la via « della rettitudine e della fede alla legge morale ». Ad altro numero un adeguato elogio dei meriti scientifici e didattici del compianto Collega e Amico alla cui desolata Famiglia rinnoviamo l'espressione del nostro più vivo cordoglio!

LA DIREZIONE

Digitized by Google

Copia della Lettera di Capodanno a S. E. il Ministro della P. I.

Capodanno del 1929 (VII)
(Firenze)

Eccellenza,

Sicuro di interpretare il sentimento dei Lettori del Bollettino di Matematica, Le rivolgo, anche a loro nome, i più fervidi auguri pel nuovo anno e manifesto la più salda fiducia nell'opera Sua di Ministro, dalla quale l'insegnamento della matematica e della fisica attende una sistemazione adeguata al posto eminente assegnato a queste due discipline dalle tradizioni italiane e dal meraviglioso progresso d'ogni ramo della scienza.

Lungi da me l'idea d'un suggerimento, anche minimo, a Chi, con tanta dottrina e con tanta fede, è preposto all'importante dicastero della P. I.: i Presidi dei Licei scientifici che impartiscono l'insegnamento della matematica e della fisica; i docenti di queste materie nel Liceo e nel ginnasio classico, nell'Istituto tecnico e nell'Istituto magistrale; i professori di matematica, computisteria e scienze fisiche e naturali della Scuola complementare testè trasformata dall'E. V. in Scuola secondaria d'avviamento al lavoro; gli alunni e le loro famiglie; tutti confidano che la Riforma del 1923, rimanendone saldi, immutati, i principi fondamentali per un più elevato tono di studio e di insegnamento, conduca, nel suo naturale sviluppo e in connessione colla recente riforma della Scuola complementare, ad una sistemazione, di orari sopratutto, tale da favorire, maggiormente, il raggiungimento dei fini che il legislatore si prefisse.

Il Bollettino di matematica, che, da venticinque anni, si pubblica, con la collaborazione dei più valenti cultori della matematica degli Istituti Superiori e delle Scuole medie, col fine precipuo, e costante, di volgere i progressi della scienza a beneficio della Scuola, nutre ferma fiducia di poter registrare, in questa sua annata giubilare, una disposizione legislativa dell'E. V., a favore dei due insegnamenti della matematica e della fisica.

Con devoto ossequio

dell'E. V. dev.mo

ALBERTO CONTI

Direttore del Bollettino di Matematica
(del ruolo d'onore dei Prof. di matematica
e fisica dei R. Licei)

Digitized by Google

Onoranze al prof. Francesco Palatini

in occasione del suo collocamento a riposo (1)

Il giorno 17 novembre u. s. si riunivano all'Istituto Tecnico Sommeiller colleghi ed alunni del prof. Francesco Palatini, per salutare il venerato Maestro che, dopo quarant'anni d'insegnamento, lasciava la scuola e per offrirgli una medaglia d'oro.

La cerimonia che, in omaggio alla modestia e alla ritrosia dell'Uomo che si onorava, doveva svolgersi semplicemente, riuscì una testimonianza solenne e commovente dell'affetto e della stima da cui Egli è circondato.

Le parole del Preside dell'Istituto, prof. Chiavazza, del collega affezionatissimo prof. Trivero, vice-preside e del prof. Di Francia, che fu uno dei primi alunni del prof. Palatini ed ora è preside del R. Liceo Scientifico di Torino, misero in luce le rare qualità morali e didattiche del valoroso insegnante; il prof. ing. Carlo Levi riassunse l'opera scientifica del Palatini, dando notizia delle 75 pubblicazioni del festeggiato, scritte da Lui con ritmo ininterrotto dai primi agli ultimi anni d'insegnamento, ed un alunno disse dell'affetto filiale che egli ed i compagni sentono per il loro Maestro.

Tra la profonda commozione dei presenti si alzò allora il prof. Palatini, che con parole semplici e serene come il Suo animo, ma precise e chiare come il Suo ingegno, rievocò

---

(1) (*N. d. D.*) Ci associamo di gran cuore alle onoranze tributate al valoroso Collega, che ha pure collaborato frequentemente in questo Bollettino. Anzi in questo stesso fascicolo pubblichiamo un suo interessante articolo, che è una conferma della acutezza di mente del prof. Palatini, del suo vivo amore per la ricerca scientifica e della sua instancabile operosità, di cui attendiamo ancora abbondanti frutti in pro della scienza e della scuola.

Digitized by Google

fatti della Sua vita scolastica e famigliare, mostrando ancora una volta come la scuola e la casa indissolubilmente siano state fino ad oggi gli ideali supremi della Sua nobile esistenza.

Gli auguri e i saluti dei presenti che non sapevano staccarsi dall'amatissimo Collega e Professore e che vollero ad uno ad uno attestargli personalmente la propria devozione e il proprio affetto, chiusero la riuscitissima riunione, durante la quale, per bocca dei vari oratori, erano stati finalmente messi in luce i meriti insigni del Festeggiato, che sempre aveva cercato di celarli. In particolare il numero e la qualità delle pubblicazioni scientifiche del Palatini riuscirono inaspettati a parecchi, che pure da anni Lo conoscevano, o credevano di conoscerLo intimamente.

Le memorie, specialmente di geometria algebrica, che il Palatini pubblicò dal 1890 al 1911, su argomenti non facili e vari, danno al lettore la certezza che solo la mancanza di ogni ambizione nell'Autore L'abbia trattenuto dall'affrontare i concorsi universitari; inoltre il suo impareggiabile zelo nell'adempimento dei doveri scolastici deve avergli impedito di raggiungere quella preparazione e quella produzione scientifica che a Lui, troppo severo verso sè stesso, sembravano necessarie.

Ma i frutti del Suo insuperabile magistero, anche nel campo ov' Egli lo volle circoscritto, sono abbondantissimi e si rivelamo anzi tutto nel gran numero dei discepoli Suoi, che, anche dopo aver abbandonato da decenni le scuole, sentono di dover attribuire alle lezioni del Palatini quel che vi è di migliore nella propria educazione scientifica. In secondo luogo, monumenti imperituri dello Scienziato, rimangono i Suoi testi di matematica elementare, fra i quali particolarmente notevole il trattato di Geometria, opera mirabile per profondità di pensiero e onestà di esposizione, trattato al quale purtroppo nuocciono, presso i lettori superficiali, quella severità e quella concisione che rispecchiano il carattere dell'Autore, franco ed esteriormente rude. Ma forse non è stato scritto in Italia un altro libro di geometria elementare che — adeguatamente esposto da insegnanti capaci — lasci così

Digitized by Google

profonda e fruttifera impressione sugli alunni. Le difficoltà non sono mai nascoste, ma affrontate e abilmente superate nei modi che l'Autore ha potuto scegliere, dopo aver dedicato tutto il suo ingegno allo studio della scienza e allo studio della mentalità degli scolari. E le ultime Sue pubblicazioni contemporanee, o di poco posteriori al testo di geometria, mostrano appunto a quali sottili indagini lo avesse portato la preparazione coscienziosa del Suo libro.

Ora Egli lascia la scuola, anche perchè un indebolimento nella vista Gli renderebbe difficile proseguire nell'insegnamento con quella cura e con quei risultati ai quali non sa rinunziare; ma nell'Istituto Tecnico di Torino, al quale Egli apparteneva da un quarto di secolo, e in tutte le scuole ove si trovino professori che — come alunni o come colleghi — abbiano avuto la ventura di imparare dal Palatini, verrà gelosamente custodita la tradizione del Suo insegnamento; mentre nel cuore di tutti i Suoi alunni rimarranno l'ammirazione, la gratitudine, l'amore per il venerato Maestro, al quale da queste pagine, care agl'insegnanti medi di matematica, deve giungere l'augurio di lunga e serena vecchiaia.

Torino, 26 novembre 1928.

EMILIO ARTOM

La nomina del prof. Severi a membro della R. Accademia d'Italia.

(*N. d. D.*) - Al momento di stampare, apprendiamo che fra i primi trenta membri della R. Accademia d'Italia è stato compreso l'illustre Geometra FRANCESCO SEVERI: ci compiacciamo vivamente di tale nomina per gli eminenti meriti scientifici del Severi ed anche ricordando che in occasione del conflitto mondiale, Egli dopo aver propugnato strenuamente l'intervento, partecipò come volontario alla guerra e vi si distinse conseguendo pure una promozione per merito di guerra.

Digitized by Google

Contributi italiani alla geometria algebrica [1]

di GAETANO SCORZA (Napoli)

La geometria algebrica, cioè lo studio delle proprietà delle varietà algebriche — in contrapposto alla geometria differenziale che considera indifferentemente varietà algebriche e trascendenti —, rappresenta lo stadio finale del largo movimento di idee che iniziato in Francia (dalla scuola di Monge, dal Poncelet, dal Gergonne e dallo Chasles, in Germania (dal Möbius, dallo Steiner, dallo Staudt e dal Plücker) e in Inghilterra (dal Salmon, dal Cayley e dal Sylvester) penetrò in Italia intorno al 1860 e quivi raggiunse il suo sviluppo più rigoglioso.

Veramente per taluni, almeno, di quelli che li promossero, i nuovi indirizzi di ricerca avrebbero dovuto riuscire a svincolare la geometria dall'algebra, piuttosto che condurre ad una loro tanto intima compenetrazione da esser consacrata perfino nel nome di geometria algebrica; ma gli è che i processi di pensiero, quando siano davvero chiamati ad esser vitali e vigoreggiare, prendono norma non tanto dalle mire di chi li inizia, quanto da una loro intima dialettica che ben tardi diventa palese a chi vi partecipa. Ed oggi, da chi consideri criticamente la storia della scienza, alla tendenza puristica, che trovò la sua migliore espressione nei trattati dello Staudt e in lavori del Kötter e del De Paolis, non può attri-

---

[1] (*N. d. D.*) Per cortese concessione della Direzione degli *Annali della Istruzione Media*, riproduciamo integralmente, l'articolo dell'illustre prof. Scorza della R. Università di Napoli, apparso nel Quaderno II dell'Annata in corso degli Annali. Così i nostri Lettori potranno tutti, indistintamente, prender conoscenza di questo magnifico articolo e conservarne memoria per rileggerselo e consultarlo con tutta comodità.

Digitized by Google

buirsi altro valore che quello di aver affinato lo strumento sintetico e di averne per conseguenza aumentata la potenza di penetrazione.

Molteplici erano i germi fecondi contenuti nel movimento di idee cui più sopra è stato alluso.

Così *il metodo delle proiezioni* di Poncelet, da un lato, insegnando a dedurre proprietà proiettive da proprietà metriche, preparò la strada alla subordinazione della geometria metrica a quella proiettiva (donde il famoso motto di Cayley « *projective geometry is all geometry* »), dall'altro, mostrando quanta snellezza introducesse nello studio delle figure piane il riguardarle come proiezioni di figure dello spazio, condusse più tardi allo sfruttamento sistematico della geometria iperspaziale anche per ricerche riguardanti enti del piano e dello spazio ordinario; l'*introduzione degli immaginari in geometria* e il *principio di continuità*, che nella mente del Poncelet si illuminavano a vicenda, dettero luogo, in prosieguo di tempo, alle geniali considerazioni del Segre sugli enti iperalgebrici e al così detto *principio della conservazione del numero*, il cui enorme valore euristico è mostrato dal grandioso sviluppo della geometria numerativa; il riconoscimento dell'*identità formale delle geometrie proiettive delle varie forme fondamentali di una medesima specie*, emersa con netta chiarezza dalle trattazioni analitiche del Plücker, dette la giustificazione migliore della *legge di dualità*, condusse a concepire la nozione di spazio in forma astratta e rese presso che inevitabile la franca considerazione di spazi da un numero qualunque di dimensioni: l'uso sistematico dei concetti di *corrispondenza* e di *trasformazione*, costituenti, per dir così, l'aspetto geometrico della nozione di funzione, liberò la geometria dall'andatura impacciata e rigida che pareva dovesse essere una sua perenne caratteristica di inferiorità di fronte ai procedimenti rapidi e disinvolti dell'algebra e dell'analisi, condusse ai vari fecondissimi *principi di corrispondenza* del De Jonquières, del Cayley, dello Zeuthen e dello Schubert e dette luogo alla teoria delle trasformazioni birazionali nel piano e nello spazio, gloria del nostro Cremona; infine la teoria degli invarianti e covarianti delle

Digitized by Google

forme algebriche pose in netta evidenza il carattere peculiare delle proprietà proiettive delle figure e dette modo, mediante la nozione di sistema completo, di dominarne l'insieme con occhio sicuro.

***

Ma altre correnti di pensiero sono intervenute a reagire su quelle di cui abbiamo cercato di dar cenno ed a sboccare insieme con esse nel corpo delle dottrine costituenti la geometria algebrica.

Lo studio delle funzioni algebriche di una variabile e dei loro integrali, a proposito dei quali l'Abel aveva scoperto uno dei più famosi e più proteiformi teoremi della matematica, non poteva raggiungere sviluppo adeguato finchè la teoria delle funzioni di variabile complessa non avesse superato la fase iniziale e non fosse pervenuta a dominare il campo delle funzioni polidrome con la sicurezza con la quale si moveva in quello delle funzioni monodrome.

A ciò furono apprestati i mezzi, in direzioni distinte ma cospiranti, dal Puiseux e sopratutto dal Riemann, che sfruttando insieme la teoria delle funzioni di variabile complessa e l'*Analysis situs*, fornì con le sue superficie a più fogli una chiara rappresentazione intuitiva del reciproco comportamento dei vari rami di una funzione algebrica e del loro connettersi in un'unica funzione analitica, permise di approfondire lo studio delle varie specie di integrali abeliani, scoperse, assegnandone il significato topologico e trascendente, uno dei più importanti caratteri delle curve algebriche — il loro così detto *genere* — e mostrò come di fronte alle trasformazioni birazionali le curve di un medesimo genere venissero a distinguersi in classi contraddistinte dai valori di un determinato numero di parametri o *moduli*.

***

La partecipazione dell'Italia al rinnovamento delle vedute e dei metodi di ricerca in geometria, a non tener conto

Digitized by Google

dei contributi anteriori ben poco significativi, non cominciò a diventar viva e fattiva che dal 1860 in poi. In quell'anno l'istituzione di due cattedre di geometria superiore, l'una nell'Università di Bologna, affidata al Cremona, l'altra, nell'Università di Napoli, affidata al Battaglini, segnò insieme il riconoscimento ufficiale da parte dello Stato dell'importanza dei nuovi studi e l'inizio di una scuola geometrica italiana che ben presto si pose in grado di gareggiare con quelle straniere, e, più tardi, di guadagnare su di esse un indiscutibile ed indiscusso primato.

Diversi furono gli indirizzi impressi dal Cremona e dal Battaglini ai loro insegnamenti. Il Cremona, pur avendo iniziata la sua opera scientifica con l'accorto uso di rappresentazioni analitiche per lo studio di enti geometrici, venne via via orientandosi sempre più spiccatamente, con le sue lezioni e le sue ricerche, verso i metodi sintetici puri; il Battaglini preferì approfondire, sull'esempio della Scuola inglese, quella che può dirsi la teoria geometrica delle forme algebriche.

E differenti furono pure il valore e la fortuna delle loro fatiche. Ma la maggiore profondità scientifica, il miglior pregio artistico e l'assai più brillante successo divulgativo e didattico dell'opera del Cremona non debbono far dimenticare la notevole importanza del Battaglini nella storia della geometria italiana.

La bella armonia con cui si fusero nel Segre e nei suoi scolari la geometria e l'analisi, tanto intima e profonda che di taluno di essi è difficile decidere se sia maggiormente significativo come geometra o come analista, fu derivazione diretta dell'insegnamento di Enrico D'Ovidio, lucida mente di studioso, nella quale vennero a congiungersi e contemperarsi in un sano eclettismo i due diversi indirizzi rappresentati dal Cremona e dal Battaglini.

***

La figura preminente della geometria italiana a partire dal 1860 fu per oltre un ventennio quella del Cremona.

Con due famose monografie, l'una del 1863, l'altra del

Digitized by Google

1866, poco dopo tradotte in tedesco, il Cremona fornì la letteratura matematica degli scritti che per dirla col Nöther, sulla formazione e lo sviluppo dei metodi geometrici nella trattazione delle proprietà proiettive delle curve e superficie algebriche, in Italia e fuori, hanno avuto l'influenza più notevole; con la Memoria premiata dall'Accademia di Berlino nel 1866 sulla superficie del 3° ordine egli dette un esempio di ricerche sintetiche, cospicuo per abbondanza di risultati ed eleganza di procedimenti; e con una serie di pubblicazioni iniziate da una celebre Nota del 1863 gittò le basi della teoria delle trasformazioni birazionali piane e spaziali; trasformazioni che, appunto in suo onore, sono state dette *cremoniane*.

Il campo nel quale egli si mosse fu pertanto quello della geometria proiettiva ordinaria; che è il campo nel quale si aggirarono per qualche tempo tutti i geometri italiani e nel quale si aggirano ancora quanti non hanno saputo sottrarsi, pur di fronte ai richiami di teorie più elevate e più vaste, al fascino grande che indiscutibilmente essa esercita.

Le stesse trasformazioni cremoniane che, secondo le vedute manifestate dal Klein col suo programma di Erlangen, rendevano possibile la creazione di una nuova geometria — quella cioè avente per gruppo fondamentale il gruppo delle trasformazioni birazionali piane o spaziali — dal Cremona e da buona parte dei suoi continuatori non furono considerate e non sono considerate tuttora che dal punto di vista proiettivo. Ed infatti di natura proiettiva sono tanto gli studi del Cremona e le ricerche di Caporali, Bertini, Martinetti e Berzolari sulle involuzioni cremoniane piane di classe 1, 2, 3, 4 e 5, provocate da un'idea non molto felice del Caporali, quanto le numerose e belle pubblicazioni del Montesano che sulle trasformazioni cremoniane, in ispecie su quelle piane, è pervenuto a risultati di alto interesse scientifico.

Nell'argomento in discorso chi per primo si pose a guardar le cose dal punto di vista adeguato, segnando una svolta notevolissima nella storia della nostra geometria, fu il Bertini, quando nel 1877 si pose e risolse il problema della determinazione dei tipi distinti cui per mezzo di trasforma-

Digitized by Google

zioni cremoniane possono esser ricondotte tutte le corrispondenze piane involutorie. Egli inaugurò così le ricerche di quella geometria che, dal nome del suo gruppo fondamentale, possiamo dir *cremoniana*; geometria che via via venne arricchendosi di risultati copiosi: sulla determinazione dei tipi distinti, di fronte alle trasformazioni birazionali piane, di sistemi lineari di curve di dato genere (Bertini, Gucci, Martinetti, Jung, De Franchis), sullo studio delle proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve algebriche piane (Castelnuovo), sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane piane o spaziali (Enriques, Fano), sulle curve algebriche piane cremonianamente equivalenti (Castelnuovo, Enriques, Marletta).

***

Il passaggio dalla geometria proiettiva ordinaria a quella iperspaziale fu segnato da una classica memoria del Veronese del 1881 inserita nel 19° volume di *Mathematische Annalen*.

Veramente la convenienza di introdurre spazi a più che tre dimensioni per interpretare geometricamente i sistemi di equazioni con più che tre incognite era apparsa da tempo agli analisti ed ai geometri; il concepire astrattamente gli spazi come totalità di elementi di natura qualsiasi, soddisfacenti ad un acconcio gruppo, di postulati, aveva fin dal 1844 condotto il Grassmann con la sua *Ausdehnungslehre* alla nozione di iperspazio; e vere e proprie ricerche di geometria iperspaziale, proiettiva o metrica, erano state compiute anche prima del 1881 dal Cayley, dal Sylvester, dal Plücker, dal Klein, dal Jordan, dallo Halphen, dal D'Ovidio, dal Clifford...; ma l'importanza dell'opera del Grassmann, sfuggita per lungo tempo all'attenzione dei matematici, non fu riconosciuta che ben tardi, quando ai frutti che avrebbero potuto esserne colti per la geometria iperspaziale si era giunti per altre vie; nè si era in possesso di sviluppi sistematici che permettessero di riguardare i contributi staccati degli autori in discorso come risoluzioni di problemi riferentisi ad un nuovo organismo scientificamente autonomo. Di iperspazi si parlava, ma per via incidentale e quasi di sfuggita; e proposizioni di

Digitized by Google

geometria a più dimensioni se ne conoscevano; ma una vera e propria geometria proiettiva iperspaziale, come insieme di dottrine organicamente connesse fra di loro da principî fondamentali comuni e da metodi ad esse peculiari, non esisteva. Fu il Veronese a porne le basi con la Memoria or ora ricordata; e la prova migliore che a questo risale il merito di averla imposta all'attenzione dei matematici e di averne mostrata con esempi concreti assai suggestivi la fecondità, rivelatasi poi veramente stragrande, si ha nel fatto che solo posteriormente ad essa si verificò quella lussureggiante fioritura di ricerche, sopratutto di italiani (Segre, Del Pezzo, Castelnuovo, Bertini, Pradella, Fano, Severi, Marletta,...), per la quale la geometria proiettiva a più dimensioni ha potuto diventare una delle teorie matematiche più notevoli per ampiezza di risultati e duttile pieghevolezza alle applicazioni.

***

Chi nel nuovo campo di studi, inaugurato dal Veronese, assunse presto la posizione più eminente per profondità di cultura, per ampiezza di vedute e per l'alto magistero didattico, esercitato con magnifico successo e con instancabile entusiasmo fino alla morte, fu Corrado Segre, indimenticabile figura d'uomo e di scienziato, che, conseguita la cattedra di geometria superiore a Torino nel 1888 a soli venticinque anni, fece di quella città per oltre un decennio il nostro maggiore e miglior centro di studi geometrici.

La sua tesi di laurea sulla teoria delle quadriche iperspaziali e le sue applicazioni alla geometria della retta pubblicata in due voluminosi fascicoli delle *Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino* fu seguita con rapidità vertiginosa nell'anno della laurea (1883), funestato da una grave sventura domestica, e nell'anno successivo, durante il quale ebbe pure a prestar servizio militare, da ben altri quindici lavori di geometria, di cui anche oggi, a tanta distanza di tempo e dopo tanti ulteriori progressi degli studi matematici, non si sa se ammirare più la freschezza dell'ispirazione, la netta e luminosa eleganza della forma, l'ele-

Digitized by Google

vatezza delle vedute, la mirabile dovizia di deduzioni, la pronta disinvoltura nell'avvalersi dei mezzi più riposti dell'algebra e della geometria, o la ricca e profonda informazione bibliografica; e bisogna guardar bene alle date per persuadersi che non si tratta dei lavori di un matematico provetto, bensì di quelli di un giovane appena quadrilustre, tanta è la ferma maturità di giudizio e la magistrale sicurezza di incesso che in essi si rivela.

***

Ma ciò che ora più preme di mettere in luce è che al Segre spetta il vanto di aver immesso, in modo fattivo, nella nostra cultura matematica, le correnti di pensiero che, promosse dal Riemann nel campo della teoria delle funzioni ed ivi estese dal caso di una a quello di due o più variabili indipendenti dal Clebsch, dal Nöther e dal Picard, avevano dato luogo per opera del Brill e del Nöther alla trattazione algebrico-geometrica della così detta geometria sopra una curva.

Egli mostrò quale fruttuoso partito potesse esser tratto da codesta geometria per lo studio dei sistemi lineari di curve algebriche piane, idea messa a profitto, con brillante successo, dal Castelnuovo; egli ne costruì, per via iperspaziale, coadiuvato efficacemente dal Castelnuovo; una trattazione più spiccatamente sintetica; ed egli riuscì, con assidua opera di propaganda che presto si guadagnò la piena adesione del Bertini, a farla diventare dominio comune dei nostri geometri, preparando così la via al sorgere ed al grandeggiare della geometria sopra una superficie, che indubbiamente costituisce uno dei maggiori titoli di gloria della scienza italiana.

***

Le ricerche sistematiche di geometria sopra una superficie furono iniziate presso di noi dall'Enriques nel 1893, indi proseguite da lui e dal Castelnuovo, in un continuo amichevole scambio di idee che spesso si tradusse in effettiva collaborazione.

Digitized by Google

L'idea fondamentale dell'Enriques per ritrovare dal punto di vista più adeguato, e cioè quello invariantivo, i caratteri delle superficie algebriche che dal punto di vista trascendente o proiettivo erano stati introdotti dal Nöther, dal Cayley e dallo Zeuthen (genere geometrico, genere numerico,...), fu la seguente.

Le proprietà, di un sitema lineare di curve algebriche tracciato sopra una superficie algebrica possono distinguersi in due classi; e cioè vi sono proprietà che dipendono essenzialmente dalla particolare natura dei sistema preso in esame e che quindi variano al variar di esso, e proprietà che dipendono non dal sistema ma dalla superficie che lo sostiene.

Orbene per scoprir quest'ultime, che sono di gran lunga le più interessanti, un primo mezzo cui fece ricorso l'Enriques e che in prosieguo di tempo si è rivelato assai fecondo, fu quello di considerare insieme con un sistema lineare i suoi successivi sistemi aggiunti; indi di trarre da essi, con operazioni di somma e sottrazione, sistemi legati invariantivamente alla superficie. Così egli riuscì non solo a ritrovare sotto una nuova luce la nozione di genere geometrico, ma a riconoscere l'esistenza di tutta una serie di caratteri della superficie da lui chiamati bigenere, trigenere ecc.

Gli rimaneva di pervenire dal suo nuovo punto di vista al genere numerico. A questo egli riuscì prendendo di mira la deficienza delle serie lineari staccate sopra le curve di un sistema da quelle del sistema aggiunto, e dimostrando per essa un teorema che più tardi fu notevolmente precisato dal Picard, per via trascendente, indi dal Severi, per via geometrica.

Con ciò i fondamenti della geometria sopra una superficie erano fissati; e la fruttuosità del metodo seguito fu messa in chiara luce da una numerosa serie di lavori dell'Enriques e del Castelnuovo, ricchi di risultati del più alto interesse scientifico e di procedimenti assai suggestivi.

Basti ricordare a questo proposito il criterio per decidere della razionalità di una superficie, dovuto al Castelnuovo, la piena caratterizzazione delle superficie algebriche per le quali il processo di aggiunzione successivamente applicato finisce

Digitized by Google

per estinguersi, dovuta al Castelnuovo ed all' Enriques, l'estensione alle superficie del teorema di Riemann-Roch (Castelnuovo), e la dimostrazione della riducibilità a rigate, per mezzo di trasformazioni birazionali, di ogni superficie possedente un fascio di curve razionali (Enriques).

***

Con tutti questi lavori nei quali l' Enriques e il Castelnuovo si erano attenuti costantemente a metodi algebrico-geometrici, rimaneva per altro non chiarita una questione fondamentale, se cioè una superficie algebrica potesse essere o no convertita, per trasformazioni birazionali, in una superficie dotata di sole singolarità ordinarie — questione che se avesse dovuto esser risolta in senso negativo avrebbe diminuita la generalità di qualche loro teorema —; nè venivano pienamente inquadrate nella nuova trattazione le ricerche del Picard e dello Humbert sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie algebrica.

Ebbene, che alla prima questione dovesse darsi risposta affermativa fu dimostrato da Beppo Levi (indi per altre vie dal Severi, dal Chisini e dall'Albanese); e quanto al modo di sanare il secondo inconveniente rimasto per lungo tempo uno dei *desiderata* insoddisfatti della teoria, l' impulso maggiore fu dato dal Severi con la sua importante scoperta (1904) della irregolarità di ogni superficie algebrica dotata di integrali semplici di 2ª (o di 1ª) specie; dopo di che ricerche del Severi stesso, dell' Enriques e del Castelnuovo riuscirono a porre in chiarissima luce i vincoli intercedenti fra l' irregolarità di una superficie algebrica e i suoi sistemi di integrali semplici di 1ª e 2ª specie.

***

Al teorema, cui or ora è stato alluso, il Severi pervenne avvalendosi e dei metodi algebrico-geometrici della scuola italiana e dei metodi trascendenti della scuola francese; e la sicura padronanza degli uni e degli altri, che costituisce una delle caratteristiche più invidiabili di questo nostro

Digitized by Google

valorosissimo matematico, gli ha permesso di raccogliere, e di venire ancora raccogliendo, con instancabile operosità e strenua vigoria, frutti copiosissimi di rara bellezza e di estrema importanza. Tali, ad es., l'estensione in varie forme del teorema d'Abel alle superficie, la sua teoria della base per le curve tracciate sopra una superficie algebrica, e le recenti profonde ricerche sugli integrali algebrici semplici e doppi.

Ma taceremmo di un lato notevolissimo dell'attività del Severi, se non alludessimo ai suoi importanti contributi alla geometria numerativa.

La geometria numerativa, coltivata fra noi con ottimi successi, oltre che dal Severi, dal Pieri, dal Castelnuovo, dal Berzolari, dal Tanturri e dal Giambelli, deve il suo nome al fatto che essa non è se non un insieme di metodi per calcolare il numero delle soluzioni dei problemi geometrici determinati. Fondamentali per codesti metodi sono il principio della conservazione del numero e quello intimamente collegato con esso della degenerazione, cioè della sostituzione di enti algebrici riducibili, convenientemente scelti, ad enti algebrici irriducibili; principî codesti di altissimo valore euristico, ma di scarso valor probativo quando non siano adoperati con opportune cautele.

Ebbene il Severi ha sottoposto il principio della conservazione del numero ad un esame approfondito, che l'ha condotto ad indicare sotto quali ipotesi può esser adoperato con fiducia, ed a traverso studi di fondamentale importanza sulle totalità di curve piane di dato ordine e dato genere e sulla classificazione delle curve algebriche sghembe ed iperspaziali, che gli hanno concesso di chiarire molte altre difficili questioni (per es. di ricondurre nel campo algebrico-geometrico il famoso teorema di esistenza del Riemann), egli è riuscito a dimostrare, che in ogni famiglia di curve algebriche, di dato ordine e dato genere, di un qualsiasi spazio esistono curve spezzate in rette.

Con che egli venne a risolvere una questione che nel 1901 era stata posta inutilmente a concorso, per consiglio dello Zeuthen, dall'Accademia delle Scienze di Copenaghen

Digitized by Google

ed a porre su basi sicure numerose ricerche precedenti fondate sul metodo di degenerazione.

***

Le ricerche, di cui siamo venuti via via discorrendo, insieme con quelle compiute, sul terreno percorso dai tre geometri ultimamente nominati, dal De Franchis, dal Bagnera, dal Torelli, dal Comessatti, dal Chisini, dal Rosati e dall'Albanese, costituiscono certo il prodotto più caratteristico della scuola geometrica italiana e il suo maggior titolo a quella preminenza che dalle scuole straniere le viene unanimemente riconosciuta.

Ma ubbidirei, credo, ad un sentimento di modestia inopportuna, se addirittura tacessi dei lavori con i quali fra il 1916 e il 1921, riconosciuto come taluni dei più elevati argomenti della geometria algebrica e della teoria delle funzioni abeliane trovassero il loro sostrato comune in ciò che ho detto la teoria delle matrici riemanniane, ho proceduto allo sviluppo di codesta teoria che recentemente dallo Spampinato e più specialmente dal Rosati ha ricevuto complementi essenziali; e sorvolerei infine su notizie, non prive di significato e gradite certo ai nostri cuori di italiani, se non dicessi che al Fano, intorno al 1900, per iniziativa del Klein, fu rivolto l'invito ad assumere una cattedra di matematica nell'università di Gottinga, invito che egli, per nostra fortuna, non potè accogliere; che la medaglia ed il premio posti a concorso dal Guccia fra i geometri di tutti i paesi, in occasione del 4° Congresso internazionale di matematica tenutosi a Roma nel 1908, dalla Commissione giudicatrice, composta dal Nöther, dal Poincaré e dal Segre, furono assegnati al Severi; che il premio Bordin dell'Accademia di Parigi fu conferito nel 1907 all'Enriques ed al Severi e nel 1909 al Bagnera e al De Franchis; che il premio Steiner dell'Accademia di Berlino per il 1914 fu vinto dal Togliatti; che la grande enciclopedia matematica tedesca, promossa dal Klein, si è avvalsa largamente della collaborazione dei nostri geometri, affidando articoli di elevata importanza al Segre, al Fano, all'Enriques, al Castelnuovo ed al Berzolari; che il Togliatti quando tre

Digitized by Google

anni fa ha vinto il concorso per la cattedra di geometria analitica e proiettiva dell'Università di Genova, occupava già una cattedra del Politecnico di Zurigo, e che infine sono stati invitati in questi ultimi tempi a tener corsi straordinari di geometria, in Inghilterra il Fano, negli Stati Uniti l'Enriques, e in Ispagna, per due anni di seguito il Severi.

Conferenza del prof. Gaetano Scorza

Il 14 giugno, a Firenze, nel Salone delle Conferenze all'Esposizione di Storia della Scienza, il prof. Scorza ha tenuto una Conferenza sul Tema: « *La Scuola Geometrica Italiana* ». La Nazione del 15 giugno ne ha dato notizia col trafiletto che integralmente riportiamo:

L'argomento affidato ieri sera all'illustre prof. Gaetano Scorza della R. Università di Napoli, per la settima conferenza del ciclo ordinato dal Comitato Esecutivo della Mostra della Scienza, non era certo dei più facili per intrattenere durante un'ora un pubblico sia pure fra i più eletti. Pure il valoroso conferenziere seppe trattare il tema con piacevole disinvoltura, conferendo all'austerità della materia quel tanto di agilità espressiva che valse a renderla facile e gradita anche ai non iniziati.

Dopo una rapida rassegna del contributo italiano alle origini della scuola geometrica, l'illustre professore volle principalmente soffermarsi sul movimento di reviviscenza iniziato dal Cremona dopo il '60 e sviluppato attraverso i suoi seguaci, fra i quali valorosissimi Eugenio Bertini, Giuseppe Veronese, il De Paolis, il Caporali ecc. per poi mettere in rilievo la figura di Corrado Segre e dei più eletti della scuola geometrica moderna. Nè dimenticò, il chiaro oratore, di ricordare come ancora oggi gli studi degli italiani in Geometria siano accuratamente seguiti e largamente sfruttati all'estero dove i nostri professori mietono frequenti allori nei concorsi e nelle cattedre a cui sono chiamati a dissertare.

La fine della interessante conferenza, ispirata a nobile orgoglio nazionale e a elevatezza di propositi, fu calorosamente applaudita dal folto uditorio tra cui si notavano molte personalità della scienza e della cultura.

Digitized by Google

Dei varî metodi di risoluzione grafica dei problemi di 2° grado

di ISABELLA F. CLARKE (Genova)

Fin dal 1903 il Prof. Gino Loria richiamava l'attenzione dei Lettori di questo Bollettino sopra il fatto che nei libri di testo non veniva trattato il problema della risoluzione grafica delle equazioni di 2° grado (1); ma la Direzione faceva notare che in qualche trattato si trovavano le costruzioni date da Euclide.

Recentissimamente il Sig. Dintzl di Vienna nel: « Zeitschrift für Mathematischen un Naturvissenschaftlichen Unterricht aller schulgattungen - anno 1929 - I° Heft - Leipzig, B. G. Teubner, Berlin » riproduce un procedimento di Staudt che dà una costruzione abbastanza semplice delle radici di una equazione di 2° grado, e della applicazione che lo Staudt ne fece alla costruzione del poligono regolare di 17 lati senza darne però la dimostrazione, che più tardi viene data da Schröter e poi da Lill.

Metodo generale.

Data la equazione

$$ax^2 - bx + c = 0$$

abbiamo

$$x = +\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}.$$

Supponendo $b^2 > 4ac$ possiamo costruire graficamente x_1 ed x_2 in un modo abbastanza semplice.

Posto $y^2 = 4ac = (4a)c$, y è il medio proporzionale tra $4a$ e c, che si ottiene con una nota costruzione.

Allora $$x = +\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - y^2}{4a^2}}.$$

(1) Vedi « Bollettino di Matematica » Anno II, N. 3-4, pag. 68.

Digitized by Google

Sia ora $z^2 = b^2 - y^2$; z è il cateto di un triangolo rettangolo avente b per ipotenusa ed y per altro cateto.

Così $$x = +\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{z^2}{4a^2}} = +\frac{b \pm z}{2a}$$

Cioè $$x_1 = \frac{b+z}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{b-z}{2a}.$$

Sia allora m il segmento che rappresenta $b+z$, ed n quello che rappresenta $b-z$, avremo:

$$x_1 = \frac{m}{2a} \quad ; \quad x_2 = \frac{n}{2a} \quad \text{cioè}$$
$$(2a)x_1 = m \quad ; \quad (2a)x_2 = n$$

che possiamo scrivere così:

$$(2a)x_1 = m \cdot 1 \quad ; \quad (2a)x_2 = n \cdot 1.$$

Allora x_1 è il quarto proporzionale in ordine a: $2a, m, 1$; ed x_2 il quarto proporzionale in ordine a: $2a, n, 1$; che si ottengono con una costruzione nota.

Se $b^2 = 4ac$ allora $x_1 = x_2 = \frac{b}{2a}$; cioè x_1 ed x_2 coincidono e sono entrambi il quarto proporzionale dopo: $2a, b, 1$.

Gli antichi si occuparono di questo problema; dopo Euclide e Omar ben Ibrahim (1) Francoeur (1) risolve graficamente il problema di determinare le radici di una equazione di 2° grado nel caso che questa sia del tipo:

$$x^2 - ax + b^2 = 0.$$

Vediamo come il metodo usato da Francoeur si riconduce alla risoluzione del problema nel caso generale esposto sopra.

L'equazione:

$$x^2 - ax + b^2 = 0$$

---

(1) Ledwig Matthiessen: *Grundzüge der Antiken und Modernen Algebra der Litteralen qleichungen - Siebenter Abschnitt - geometrische Methoden III* Leipzig, druck Verlag von B. G. Teubner, 1878.

Digitized by Google

si può scrivere:

$$x : b = b : (a - x)$$

cioè b è il medio proporzionate tra x ed $(a - x)$.

La costruzione geometrica delle radici si può eseguire così: Sia $AB = a$, si tracci una semicirconferenza di diametro AB, si inalzi in A una perpendicolare ad AB, e si porti su questa un segmento $AD = b$. Da D si conduca la parallela ad AB, questa incontrà la semicirconferenza nei punti E ed E'.

Da questi abbasso le perpendicolari su AB che incontrano AB in F ed F'. Si dimostra facilmente che $AF' = x_1$ ed $AF = x_2$ sono i segmenti che rappresentano le radici.

Applicando il metodo generale enunciato sopra si giunge alla costruzione delle radici con un metodo che teoricamente è più semplice.

Infatti

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2 - 4b^2}{4}} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}$$

quindi se

$$y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2$$

ed O è il centro della semicirconferenza descritta di diametro AB vediamo che è

$$y = OF'$$

e perciò:

$$x_1 = \frac{a}{2} + y = AO + OF' = AF'$$

e:

$$x_2 = \frac{a}{2} - y = AO - OF' = AO - OF = AF$$

sono i segmenti che rappresentano le radici.

Quindi basta costruire un triangolo rettangolo di ipotenusa $\frac{a}{2}$ e cateto b perchè l'altro cateto aggiunto e tolto ad $\frac{a}{2}$ dà i segmenti chiesti.

Francoeur considera a parte il caso:

$$x^2 - ax - b^2 = 0$$

cioè

$$b^2 = x(x - a)$$

Digitized by Google

ossia $$x : b = b : (x - a)$$

e fa la seguente costruzione:

Descrive una circonferenza di centro arbitrario D e raggio $AD = \frac{a}{2}$, in A conduce una tangente a questa circonferenza e sulla tangente porta un segmento $AC = b$. Quindi congiunge C con D e prolunga CD sino ad incontrare la circonferenza nei punti E, F. Allora $EC = x_1$ e $CF = x_2$ sono i segmenti che rappresentano le due radici.

Se applichiamo a questa equazione il metodo generale abbiamo che è

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}$$

e quindi costruendo un triangolo rettangolo di cateti $\frac{a}{2}$ e b l' ipotenusa è

$$y = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}$$

ed essendo

$$x_1 = \frac{a}{2} + y = FD + DC = FC$$

e $$x_2 = \frac{a}{2} - y = DE - DC = -EC = CE$$

la radice x_1 si otterrà aggiungendo y ad $\frac{a}{2}$, ed x_2 togliendo y da $\frac{a}{2}$.

Un altro che tratta lo stesso problema è Koppe [1], il quale parte dalla equazione da cui parte Francoeur e determina i segmenti che rappresentano x_1 ed x_2 nel modo come li abbiamo ottenuti sopra applicando il metodo generale.

Heiss ed Eschweiler [2] si occupano dello stesso problema nel caso che l'equazione sia

$$x^2 - ax + bc = 0$$

---

[1] L. Matthiessen: *Grundzüge d. ant. u. mod. Algebra.*

[2] idem.

Digitized by Google

oppure

$$x^2 + ax - bc = 0$$

e danno per ognuna di esse due soluzioni.

Queste equazioni nelle quali il termine noto è scomposto nel prodotto di due fattori non sono del tutto generali; vediamo come Heiss ed Eschweiler abbiano risolto la questione, e quale sarebbe la costruzione da farsi seguendo il metodo generale.

Sia l'equazione $x^2 \mp ax \pm bc = 0$ con a, b, c, positivi e sia $a^2 \geq 4bc$ per la realtà delle radici.

Si costruisca un segmento $AB = a$, si inalzino in A ed in B le perpendicolari ad AB dalla stessa parte di AB nel caso della equazione $x^2 - ax + bc = 0$ e da parte opposta nel caso della equazione $x^2 + ax - bc = 0$.

Su queste perpendicolari portiamo rispettivamente $AC = b$ e $BD = c$.

Congiungiamo C con D e descriviamo una circonferenza di diametro CD che incontra AB nei punti X ed X'.

Si dimostra che AX' ed AX rappresentano nella prima figura le radici della equazione $x^2 - ax + bc = 0$ mentre AX' ed AX rappresentano in valore assoluto le radici della

$$x^2 + ax - bc = 0.$$

In questo secondo caso le radici sono sempre reali giacchè la circonferenza taglia sempre la AB essendo infatti $\Delta > 0$ sempre.

Se osserviamo la prima figura abbiamo se O è il punto medio di CD.

$$r = OD = \frac{CD}{2} \quad \text{ma} \quad CD = \sqrt{a^2 + (b - c)^2}$$

quindi

$$r = OD = \frac{\sqrt{a^2 + (b - c)^2}}{2}.$$

Da D conduciamo la parallela ad AB che incontra AC in R, e la perpendicolare OM, abbassata da O su AB, nel punto N.

Digitized by Google

Allora

$$ON = \frac{CR}{2} = \frac{b-c}{2} \text{ e perciò } OM = c + \frac{b-c}{2} = \frac{b+c}{2}.$$

Così

$$MX' = XM = \sqrt{\overline{XO}^2 - \overline{OM}^2} = \sqrt{\overline{OD}^2 - \overline{OM}^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{(b-c)^2+a^2}{4} - \frac{(b+c)^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2-4bc}{4}} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - bc}.$$

Quindi:

$$AX' = AM + MX' = \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - bc}$$

$$AX = AM - XM = \frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - bc}.$$

Ma qui dobbiamo vedere quali sono le condizioni necessarie per la realtà delle radici.

La circonferenza taglia AB se $r \geq OM$, cioè se

$$r \geq \frac{b+c}{2} \text{ ossia: } \frac{\sqrt{a^2+(b-c)^2}}{2} \geq \frac{(b+c)^2}{4}$$

che elevata a quadrato dà:

$$a^2 \geq 4bc$$

che per ipotesi è soddisfatta.

Dall'esame della seconda figura si può dedurre con facilità che AX ed AX' rappresentano in valore assoluto le radici di: $x^2 + ax - bc = 0$.

Osservo qui, che si può vedere analiticamente come AX ed AX' siano le radici in entrambi i casi.

Infatti assumo A come origine delle coordinate ed AB, AC come assi coordinati, allora

$$C \equiv (0, b) \qquad D \equiv (a, \pm c) \qquad 0 \equiv \left(\frac{a}{2} \cdot \frac{b \pm c}{2}\right).$$

Perciò l'equazione del cerchio è:

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left[y - \frac{(b \pm c)}{2}\right]^2 = \frac{a^2 + (b \mp c)^2}{4}$$

Digitized by Google

che svolta dà:

$$x^2 - ax + y^2 \pm bc - by \mp cy = 0.$$

Se in questa faccio $y = 0$ ho i punti di intersezione del cerchio con l'asse x, cioè con AB, ottenendo:

$$x^2 - ax \pm bc = 0$$

che è appunto l'equazione data.

Quindi i punti di intersezione con l'asse x sono le radici della equazione data.

Questo problema si risolve come i precedenti col metodo generale; giacchè essendo

$$x = \pm \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \mp bc}$$

e ponendo $y^2 = bc$ cioè indicando con y il medio proporzionale tra b e c si ha:

$$x = \pm \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \mp y^2}.$$

Quindi costruiti i segmenti:

$$z_1 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - y^2} \quad \text{e} \quad z_2 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + y^2}$$

si ottengono le radici aggiungendo $\pm \frac{a}{2}$ e sottraendo da $\pm \frac{a}{2}$ questi segmenti.

Heiss ed Eschweiler danno una seconda costruzione delle equazioni:

$$x^2 \mp ax \pm bc = 0$$

non meno ingegnosa della precedente.

Si consideri la

$$x^2 - ax + bc = 0$$

e si porti su una retta a partire da un suo qualunque punto

Digitized by Google

O due segmenti $OB = b$, $OA = c$, si inalzi nel punto medio di AB una perpendicolare.

Si costruisca con vertice O e lato OB un angolo $\widehat{BOY}$ grande a piacere e si porti su OY un segmento $OD = \frac{a}{2}$. Si inalzi in D la perpendicolare ad OY che incontra la perpendicolare ad OB in M; centro in questo punto e raggio MA si descriva una circonferenza e siano X, ed Y, i punti in cui incontra la OD. Dico che

$$OX = x_1 \quad \text{ed} \quad OY = x_2 = a - x_1$$

sono le radici cercate.

Infatti da un teorema di geometria abbiamo:

$$OA : OX = OY : OB \qquad \text{cioè}$$
$$OX \cdot OY = OA \cdot OB = bc.$$

Quindi OX ed OY sono le radici cercate, giacchè il loro prodotto è uguale al termine noto.

Per la realtà dovrà essere $\frac{a^2}{4} > bc$.

Se si considera l'equazione

$$x^2 + ax - bc = 0$$

la costruzione è analoga, la sola differenza consiste nel costruire OA ed OB da parte opposta di O cioè

$$OA = b \qquad OB = c$$

e poichè anche quì

$$AO : OY = OX : OB$$

cioè
$$OX \cdot OY = AO \cdot OB = -bc$$

OX ed OY sono le radici della equazione proposta. In questo caso è $\frac{a^2}{4} + bc > 0$ sempre, quindi le radici sono sempre reali.

Digitized by Google

Risoluzione dello stesso problema col Metodo delle coordinate rettilinee ortogonali (1).

Consideriamo l'equazione di secondo grado ottenuta dalla eliminazione di y fra due equazioni con due variabili x, y, di cui la x ad esempio rappresenti l'ascissa dei punti di una linea e la y rappresenti l'ordinata degli stessi punti.

Vuol dire che queste due equazioni rappresentano due linee che si tagliano in uno o più punti, le cui ascisse sono le radici della equazione data.

Se consideriamo le equazioni delle due linee come coesistenti le coordinate x, y sono le coordinate dei punti di intersezione delle due linee.

Siccome il numero delle radici reali di una equazione di 2° grado è due, così si dovranno scegliere due curve che si taglino in due soli punti a distanza finita. Dunque sceglieremo due cerchi, o per semplicità una retta ed un cerchio.

Supponiamo di volere le radici delle equazioni

$$\text{I} \quad x^2 - ax + b^2 = 0$$
$$\text{II} \quad x^2 - ax - b^2 = 0.$$

La I può ottenersi eliminando y fra le:

$$(1) \quad y = mx + n$$
$$(2) \quad y^2 = x(2r - x)$$

dove (1) rappresenta una retta e (2) un cerchio.

Abbiamo allora: $(mx + n)^2 = 2rx - x^2$ che dà

$$x^2(1 + m) + 2x(mn - r) + n^2 = 0.$$

Affinchè questa si identifichi con I deve essere:

$$m = 0 \qquad n = b \qquad r = \frac{a}{2}.$$

Allora (1) e (2) divengono

$$(1') \quad y = b$$
$$(2') \quad y^2 = x(a - x).$$

---

(1) L. Matthiessen: *Grundzüge d. ant. u. mod. Algebra.*

Digitized by Google

E la risoluzione grafica di questo caso si accorda con quella data da Francoeur. Se infatti è A l'origine delle coordinate $AB = a$ e $AD = b$. Allora $y = b$ è l'equazione della retta DE'.

D'altra parte

$$y = ax - x^2$$

cioè

$$y^2 + x^2 - ax = 0$$

è l'equazione del cerchio di centro $O = \left(\frac{a}{2}, 0\right)$ e raggio $\frac{a}{2}$.

Quindi le ascisse AX', AX dei punti E' ed E in cui la DE' cioè $y = b$ incontra la circonferenza di diametro a sono le soluzioni della I.

Se ora consideriamo la II, essa si può ottenere in modo analogo dalle:

$$(3) \quad y = mx + n$$
$$(4) \quad y^2 = r^2 - x^2$$

facendo $m = 1 \quad n = -a \quad r^2 = a^2 + 2b^2$.

Allora le (3) (4) divengono:

$$(3') \quad y = x - a$$
$$(4') \quad y^2 = a^2 + 2b^2 - x^2.$$

Donde la seguente costruzione delle radici:

Sia O l'origine delle coordinate cartesiane ortogonali ed OX, OY i due assi.

Si porti su OX un segmento $OM = a$ ed in direzione opposta un segmento $OK = b$. Si innalzi in K la perpendicolare ad OK e la si prolunghi di un segmento $KL = b$. Si unisca L con O, si riporti OL sopra OY e sia OC il segmento trovato.

Allora centro in M e raggio MC si costruisca una circonferenza. Le ascisse dei punti di intersezione di questa circonferenza con la retta LO che è la bisettrice dell'angolo $\widehat{MOY}$, e cioè i segmenti OP, OR, sono le radici della equazione proposta.

Dalla direzione di questi due segmenti segue che una radice è sempre positiva e l'altra sempre negativa.

Digitized by Google

La circonferenza descritta ha raggio

$$\overline{MC}^2 = a^2 + OC^2 = a^2 + 2b^2$$

e se assumiamo M come nuova origine vediamo che questo cerchio ha per equazione:

$$y^2 = a^2 + 2b^2 - x^2$$

e giacchè la retta LO aveva per equazione

$$y = x$$

rispetto alla nuova origine ha per equazione

$$y = a - x.$$

Quindi le intersezioni H, F, di LO con la circonferenza sono i punti le cui ascisse sono le radici di II.

Dalla costruzione ho:

$$OK = b = KL \ , \ \overline{OL}^2 = 2b^2$$
$$r^2 = CM = a^2 + 2b^2$$

quindi è sempre $MO < MC$ ed allora la retta incontra sempre il cerchio e le radici sono sempre reali.

Risoluzione con i metodi della Geometria Proiettiva.

Sieno date due punteggiate proiettive, le ascisse di due punti qualunque di queste sono legate dalla relazione:

$$axy + bx + cy + d = 0. \qquad (1)$$

Se le due punteggiate sono sovrapposte avremo l'involuzione quando la trasformazione diretta e l'inversa coincidono cioè quando $b = c$.

Allora (1) diviene

$$axy + b(x + y) + d = 0. \qquad (2)$$

Ora questa involuzione avrà due punti doppi i quali corrispondono ad $x = y$ e la equazione (2) diventa

$$ax^2 + 2bx + d = 0 \qquad (3)$$

Digitized by Google

Vuol dire che « La ricerca dei punti doppi di una involuzione » si riduce alla « risoluzione di una equazione di 2° grado ». Quindi cercare i punti doppi di una involuzione equivale al problema geometrico di: determinare le soluzioni di una equazione di 2° grado.

Vediamo come si possa allora individuare geometricamente l'involuzione corrispondente ad una data equazione di 2° grado:

$$ax^2 + 2bx + d = 0.$$

L'equazione di una involuzione è la (2). Diamo ad x due valori qualsiasi e cerchiamo i corrispondenti di y. Ad esempio facendo:

$$x = 0 \qquad \text{abbiamo} \qquad y = -\frac{d}{b}.$$

Così se dividiamo la (2) per x ho:

$$ay + b\left(1 + \frac{y}{x}\right) + \frac{d}{x} = 0$$

e se facciamo in questa

$$x = \infty \qquad \text{ottengo} \qquad y = -\frac{b}{a}.$$

Allora al punto $x = 0$ corrisponde il punto di ascissa $-\frac{d}{b}$, ed al punto $x = \infty$ quello di ascissa $-\frac{b}{a}$.

Questo punto di ascissa $-\frac{b}{a}$ è il punto centrale della involuzione.

Ora perchè vi siano i punti doppi è necessario che il punto centrale *non divida* il segmento determinato da due punti corrispondenti, quindi deve essere $-\frac{b}{a} < -\frac{d}{b}$.

Scelta una origine qualunque O e una retta passante per esso sulla quale segno con una freccia il verso negativo, porto in questo verso un segmento $OB = -\frac{d}{b}$ e poi $OC = -\frac{b}{a}$.

Digitized by Google

C è il punto centrale.

Faccio passare una circonferenza per i punti corrispondenti O, B; e da C conduco la tangente a questa, sia CH.

I punti doppi si troveranno a destra ed a sinistra di C alla distanza CH essendo

$$CH^2 = CB \cdot CO.$$

Perciò centro in C e raggio CH descrivo una circonferenza che taglia la retta data in X' e X''.

Dico che OX' ed OX'' rappresentano le due radici della equazione.

Infatti:

$$\overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB} = -\frac{b}{a} - \left(-\frac{d}{b}\right) = -\frac{b}{a} + \frac{d}{b} = \frac{-b^2 + ad}{ab}$$

cioè

$$\overline{CB} = \frac{b^2 - ad}{ab}.$$

Inoltre per un teorema di geometria ho:

$$\overline{CX}'^2 = CO \cdot CB = \frac{b}{a} \cdot \frac{b^2 - ad}{ab} = \frac{b^2 - ad}{a^2} \quad \text{e}$$

$$CX = CX' = \frac{\sqrt{b^2 - ad}}{a}.$$

Allora

$$OX' = OC + CX' = -\frac{b}{a} + \frac{\sqrt{b^2 + ad}}{a}$$

$$OX'' = OC + CX'' = OC - CX' = -\frac{b}{a} - \frac{\sqrt{b^2 - ad}}{a}$$

sono le radici di $ax^2 + 2bx + d = 0$.

Queste radici sono reali quando

$$b^2 - ad > 0$$

cioè quando:

$$\frac{b^2 - ad}{ab} > 0 \qquad \text{ossia} \qquad \frac{b^2}{ab} - \frac{ad}{ab} > 0$$

Digitized by Google

cioè per

$$\frac{b}{a} > \frac{d}{b}$$

o per

$$-\frac{b}{a} < -\frac{d}{b}$$

che è appunto la condizione ammessa per la esistenza dei punti doppi.

Pubblicazioni recenti pervenute alla Direzione

Fubini Guido - Luigi Bianchi e la sua opera scientifica.
» » - Sugli invarianti di un'equazione di Laplace.
» » - Una rapida scorsa ai fondamenti della geometria proiettivo-differenziale.
» » - Il problema dell'applicabilità negli spazi quadratici.
» » - Le trasformazioni di Laplace, di Lévy e di Moutard per le ipersuperficie.
» » - Una nuova generazione delle quadriche di Darboux.
» » - Un problema della teoria delle congruenze di rette con applicazioni.
» » - Riassunto di alcune ricerche di geometria proiettivo-differenziale.
» » - Relazione sui lavori del prof. Koebe.
Sansone Giovanni - Sul XVII Problema dell'Analisi indeterminata di Eulero.
» » - Sopra una famiglia di cubiche con infiniti punti razionali.
C. Burali-Forti ed R. Marcolongo - Elementi di trigonometria.
Vincenzo Esperti - Derivazione grafica.
Franceschi Odoardo - Una proprietà caratteristica delle superficie rigate.
» » - Intorno ad una proprietà delle varietà algebriche.
Riccardo La Marca - ..... parva ..... (norme impartite agli alunni, all'inizio dell'anno scolastico).
Fausta Audisio - I numeri interi e le quattro operazioni su di essi.
Eugenio Maccaferri - I numeri reali.
Giovanni Sandri - Alcune esperienze di elettrofisica moderna.
Gaetano Pigozzi - La seconda formola di Simpson per il calcolo delle aree.

Digitized by Google

La relazione che lega le mutue distanze di quattro punti conciclici dedotta dal teorema detto di Tolomeo

di GIACOMO CANDIDO (Brindisi)

La relazione che forma oggetto di questa Nota non mi consta che sia stata ricavata senza l'ausilio de' determinanti. È noto poi come, pervenuti a questa, da essa si ricavi il teor. detto di Tolomeo. Ora io qui, partendo da questo teorema, pervengo alla relazione in discorso, e siccome il processo da me seguito è affatto elementare così penso che la cosa non debba riuscire discara agli studiosi.

Indichiamo con 1, 2, 3, 4, ed in quest'ordine, i vertici di un quadrangolo convesso inscritto in una circonferenza (tre di essi non sono mai coincidenti) e con $\delta_{i,j}$ la misura della distanza, presa sempre positivamente, de' vertici i e j. La relazione che vogliamo stabilire (detta pure di *Feuerbach*) dovrà essere espressa in funzione delle sei distanze δ_{12}, δ_{13}, δ_{14}, δ_{23}, δ_{24}, δ_{34}, non solo, ma non deve alterarsi comunque si permutino gl' indici che in essa figurano.

Ciò premesso osserviamo che il teor. detto di *Tolomeo*, colle nostre notazioni, e rispetto al quadrangolo (1, 2, 3, 4) dà luogo alla relazione

$$\delta_{12}\delta_{34} + \delta_{14}\delta_{23} = \delta_{13}\delta_{24}, \ldots \quad (1)$$

e se si prende il quadrangolo convesso (1, 2, 4, 3), ottenuto dal precedente colla permutazione de' vertici 3 e 4, la (1) si trasforma nell'altra

$$\delta_{12}\delta_{34} + \delta_{13}\delta_{24} = \delta_{14}\delta_{23}, \ldots \quad (2)$$

differente dalla (1), e se si considera il quadrangolo convesso (1, 4, 2, 3), ottenuto dal precedente colla permutazione de' vertici 2 e 4, la (2) diviene

$$\delta_{14}\delta_{23} + \delta_{13}\delta_{24} = \delta_{12}\delta_{34}, \ldots \quad (3)$$

che è differente dalle due relazioni precedenti.

Ora osserviamo che tutti i quadrangoli per i quali deve

Digitized by Google

valere la relazione che vogliamo stabilire sono 24, dati naturalmente dalle 24 permutazioni de' vertici del quadrangolo (1, 2, 3, 4), questo incluso, e la ispezione di questi 24 quadrangoli porta al risultato che essi si dividono in tre gruppi di otto quadrangoli ciascuno, e precisamente

(I)	(II)	(III)
(1234)	(1243)	(1423)
(2143)	(2134)	(4132)
(1432)	(2431)	(2413)
(4123)	(4213)	(4231)
(2341)	(1342)	(1324)
(3214)	(3124)	(3142)
(3412)	(3421)	(2314)
(4321)	(4312)	(3241)

e tutti i quadrangoli di ciascun gruppo verificano rispettivamente la (1), o la (2), o la (3).

In conclusione la relazione di cui andiamo in cerca e che deve soddisfare in tutti i casi è

$$(\delta_{12}\delta_{34}+\delta_{14}\delta_{23}-\delta_{13}\delta_{24})(\delta_{12}\delta_{34}-\delta_{14}\delta_{23}+\delta_{13}\delta_{24})(-\delta_{12}\delta_{34}+\delta_{14}\delta_{23}+\delta_{13}\delta_{24})=0$$

Moltiplicando ambo i membri di questa per la espressione, mai nulla,

$$\delta_{12}\delta_{34}+\delta_{14}\delta_{23}+\delta_{13}\delta_{24},$$

possiamo enunciare la proposizione.

Le mutue distanze di quattro punti conciclici sono legate dalla relazione

$$(\delta^2_{12}\delta^2_{34}-\delta^2_{13}\delta^2_{24}-\delta^2_{14}\delta^2_{23})^2-4\delta^2_{13}\delta^2_{14}\delta^2_{23}\delta^2_{24}=0,\ldots \quad (4$$

E questa è la relazione alla quale volevamo pervenire.

Ponendo

$$\delta_{12}\delta_{34}+\delta_{14}\delta_{23}+\delta_{13}\delta_{34}=2\Delta^2,$$

la (4) prende la forma datale dal *Crelle*

$$\Delta^2(\Delta^2-\delta_{12}\delta_{34})(\Delta^2-\delta_{14}\delta_{23})(\Delta^2-\delta_{13}\delta_{34})=0.$$

Come è noto, la (4) stessa si scrive sotto forma, più consueta, di determinante

$$\begin{vmatrix} 0_2 & \delta^2_{12} & \delta^2_{24} & \delta^2_{14} \\ \delta^2_{12} & 0 & \delta & \delta^2_{13} \\ \delta^2_{24} & \delta^2_{23} & 0 & \delta^2_{34} \\ \delta^2_{34} & \delta^2_{13} & \delta^2_{34} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Digitized by Google

Discussione di un sistema di 4° ordine

di RENATO MANCINELLI (Firenze)

Ci proponiamo la discussione del sistema:

$$(I)\quad \begin{cases} a_1 x^2 + b_1 xy + c_1 y^2 = k_1 \\ a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2 = k_2 \end{cases}$$

Per l'interpretazione geometrica di un tal sistema si veda l'articolo di O. Chisini nel I° fascicolo dell'anno 1922 del « Periodico di Matematica », e per una completa discussione didattica si confronti il II° Vol. dell' « Aritmetica ed Algebra » di O. Nicoletti e G. Sansone, in cui, (pag. 202), tale discussione é svolta coll' introduzione di una variabile ausiliaria. Vogliamo mostrare un semplice metodo di discussione che prescinde dall' impiego della variabile ausiliaria.

A tale scopo consideriamo, formalmente, le (I) come equazioni lineari nelle uniche incognite x^2 ed y^2:

$$(II)\quad \begin{cases} a_1 x^2 + c_1 y^2 = k_1 - b_1 xy \\ a_2 x^2 + c_2 y^2 = k_2 - b_2 xy \end{cases}$$

e analizziamo separatamente il caso in cui il determinante Δ dei coefficenti di x^2 ed y^2, $\begin{vmatrix} a_1 c_1 \\ a_2 c_2 \end{vmatrix}$, è diverso da zero, e il caso in cui $\Delta = 0$.

1) $\Delta \neq 0$.

La regola di Kramer fornisce il sistema

$$(III)\quad \begin{cases} x^2 = \dfrac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} k_1 - b_1 xy & c_1 \\ k_2 - b_2 xy & c_2 \end{vmatrix} \\ y^2 = \dfrac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_1 & k_1 - b_1 xy \\ a_2 & k_2 - b_2 xy \end{vmatrix} \end{cases}$$

equivalente al sistema (II) e quindi all' (I).

Digitized by Google

Possiamo scrivere le (III) sotto la forma:

$$(IV)\quad \begin{cases} x^2 = A_1 + B_1 xy \\ y^2 = A_2 + B_2 xy \end{cases}$$

in cui

$$A_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} k_1 c_1 \\ k_2 c_2 \end{vmatrix},\quad A_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_1 k_1 \\ a_2 k_2 \end{vmatrix},\quad B_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} c_1 b_1 \\ c_2 b_2 \end{vmatrix},\quad B_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} b_1 a_1 \\ b_2 a_2 \end{vmatrix}$$

ed esaminare il caso di $A_1 . A_2 = 0$ o di $A_1 . A_2 \neq 0$.

a) $A_1 . A_2 = 0$.

O A_1 o A_2 dovrà esser nullo, e per fissare le idee, sia $A_1 = 0$. Il precedente sistema diventa:

$$(IV)'\quad \begin{cases} x^2 = B_1 xy \\ y^2 = A_2 + B_2 xy \end{cases}$$

e si spezza nei due sistemi:

$$(V)\quad \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = A_2 + B_2 xy \end{cases} \qquad (V)'\quad \begin{cases} x = B_1 y \\ y^2 = A_2 + B_2 xy \end{cases}$$

di cui il primo fornisce sempre le soluzioni

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{A_2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = -\sqrt{A_2} \end{cases}$$

distinte o coincidenti secondo che A_2 è o no diverso da zero, mentre il secondo sistema, che si trasforma in

$$\begin{cases} x = B_1 y \\ y^2 (1 - B_1 B_2) = A_2 \end{cases}$$

ammette sempre soluzioni se $1 - B_1 B_2 \neq 0$, e se $1 - B_1 B_2 = 0$ è impossibile o indeterminato secondochè A_2 è diversa o eguale a zero. Infatti, nell'ultima ipotesi, il sistema (V)′ si riduce alla sua prima equazione.

b) $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$.

In questo caso il sistema (IV) non può ammettere solu-

Digitized by Google

zioni nulle, e perciò sostituendo il prodotto delle due equazioni alla seconda di esse, otteniamo il sistema:

$$\text{(VI)} \quad \begin{cases} (xy)^2 = (A_1 + B_1 xy)(A_2 + B_2 xy) \\ x^2 = A_1 + B_1 xy \end{cases}$$

che è ancora equivalente al dato.

Abbiamo:

$$\text{(VII)} \quad \begin{cases} (1 - B_1 B_2)(xy)^2 - (A_1 B_2 + A_2 B_1) xy - A_1 A_2 = 0 \\ x^2 = A_1 + B_1 xy \end{cases}$$

e indicando con α e β i due valori di xy forniti dalla prima equazione, possiamo spezzare le (VII) nelle:

$$\begin{cases} xy = \alpha \\ x^2 = A_2 + B_1 \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} xy = \beta \\ x^2 = A_1 + B_1 \beta \end{cases}$$

che forniscono le quattro soluzioni;

$$\begin{cases} x = \pm \sqrt{A_1 + B_1 \alpha} \\ y = \dfrac{\alpha}{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \pm \sqrt{A_1 + B_1 \beta} \\ y = \dfrac{\beta}{x} \end{cases}$$

Il caso d'impossibilità che si verificherebbe per

$$1 - B_1 B_2 = 0 \quad \text{e} \quad A_1 B_2 + B_1 A_2 = 0,$$

in quanto la prima delle (VII) si ridurrebbe alla falsa eguaglianza $A_1 A_2 = 0$, tale caso non può presentarsi, perchè come facilmente si verifica, si ha $A_1 B_2 = A_2 B_1$, e perciò dovrebbe essere $A_1 B_2 = 0$, il che è incompatibile con

$$A_1 A_2 \neq 0 \quad \text{e} \quad B_1 B_2 = 1.$$

Ci resta da considerare il caso di $\Delta = 0$.

2) $\Delta = 0$.

Poichè Δ è nullo, la sua caratteristica sarà al massimo eguale ad uno. Se essa è zero, il sistema (I) si riduce a

$$\begin{cases} b_1 xy = k_1 \\ b_2 xy = k_2 \end{cases}$$

Digitized by Google

ed è perciò impossibile se le due equazioni sono indipendenti, o ammette le infinite soluzioni di ciascuna di esse.

Se la caratteristica di Δ è uno, fra le a e le c sussisterà una relazione del tipo

$$a_2 = \rho a_1 \quad , \quad c_2 = \rho c_1$$

(oppure $a_1 = \rho a_2$, $c_1 = \rho c_2$, se a_1 o c_1 fosse nullo senza che lo fosse il corrispondente a_2 o c_2), e il sistema (II) si scriverà:

$$\begin{cases} a_1x^2 + c_1y^2 = k_1 - b_1xy \\ \rho(a_1x^2 + c_1y^2) = k_2 - b_2xy \end{cases}$$

e sostituendo

$$\text{(VIII)} \quad \begin{cases} a_1x^2 + c_1y^2 = k_1 - b_1xy \\ (b_2 - \rho b_1)xy = k_2 - \rho k_1 \end{cases}$$

Qui si presenta realmente il caso dell'impossibilità se $b_2 = \rho_1 b_1$ e $k_2 \neq \rho k_1$, oppure l'indeterminatezza se $b_2 = \rho b_1$ e $k_2 = \rho k_1$. Infine, se $b_2 \neq \rho b_1$ e $k_2 \neq \rho k_1$, detta α la soluzione della seconda equazione del sistema (VIII), si ha

$$\begin{cases} a_1x^2 + c_1y^2 = k_1 - b_1xy \\ xy = \alpha \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} a_1x^4 - (k_1 - b_1\alpha)x^2 + c_1 = 0 \\ y = \dfrac{\alpha}{x} \end{cases}$$

e in relazione alle quattro soluzioni (distinte o coincidenti) della biquadratica, otteniamo le quattro soluzioni del sistema (I). Possiamo sottolineare il fatto che se $\Delta \neq 0$ il sistema ha sempre soluzioni.

Digitized by Google

Una dimostrazione non chilometrica della formola di addizione degli archi

di ARDICCIO MARENGONI (Bergamo)

Partendo dal teorema dei seni, e precisamente dalle formole

$$a = 2R \cdot \operatorname{sen} \alpha, \quad b = 2R \cdot \operatorname{sen} \beta, \quad c = 2R \cdot \operatorname{sen} \gamma,$$

e da quello delle proiezioni

$$c = a \cdot \cos \beta + b \cdot \cos \alpha,$$

si ha:

$$2R \cdot \operatorname{sen} \gamma = 2R \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta + 2R \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta;$$

considerando poi che $\operatorname{sen} \gamma = \operatorname{sen} (\alpha + \beta)$, si ottiene:

$$\operatorname{sen} (\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta \ldots \quad (1);$$

la quale relazione risulta così dimostrata per due angoli convessi la cui somma sia minore di 180°.

Nei casi limiti $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\alpha + \beta = 180°$ la (1) si riduce a una identità.

Se poi α, β sono due angoli convessi la cui somma sia maggiore di 180°, la somma dei loro supplementi sarà minore di 180°, e avremo:

$$\operatorname{sen} [(180° - \alpha) + (180° - \gamma)] = \operatorname{sen} (180° - \alpha) \cdot \cos (180° - \beta) + \\ + \cos (180° - \alpha) \cdot \operatorname{sen} (180° - \beta),$$

da cui si deduce facilmente la (1).

Si conclude così che la (1) *è valida per due angoli convessi qualunque;* e siccome qualunque angolo può ottenersi da un altro convesso aggiungendo o togliendo un numero intero di semicirconferenze, così per completare la dimostrazione basterà far vedere che se la (1) valida per due angoli α, β essa vale altresì per $\alpha \pm 180°$, β.

E invero dalla (1) si ricava:

$$- \operatorname{sen} (\alpha + \beta) = - \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta,$$

ossia:

$$\operatorname{sen} [(\alpha + 180°) + \beta] = \operatorname{sen} (\alpha + 180°) \cdot \cos \beta + \cos (\alpha + 180°) \cdot \operatorname{sen} \beta.$$

In tal modo mi sembra possa conciliarsi la brevità con una certa semplicità di procedimento.

Digitized by Google

CORRISPONDENZA

Copia di una Lettera inviata all'On. Direttore Generale per l'Istruzione Media il 9 Maggio 1929

Nella mia qualità di Direttore del « Bollettino di Matematica » ricevo questa mattina un biglietto, che dolorosamente mi colpisce e che mi toglie ogni esitazione per quanto già mi proponevo di fare, allo scopo di richiamare tutta la Sua autorevole attenzione e tutto il suo ottimo cuore sulla situazione, penosissima, in cui si trovano i docenti di matematica e di fisica delle Scuole medie.

Il biglietto, che testualmente Le trascrivo, è listato a lutto... ed è scritto da una figlia del prof. *Antonio Bindoni*, già professore di matematica e fisica nel R. Istituto Tecnico di Reggio Emilia, immaturamente spentosi nello scorso dicembre. La figlia del Compianto Collega mi scrive:

« Il mio Babbo è morto il 17 dicembre 1928 *vittima del* « *dovere*; già delicato di costituzione si è affaticato, specialmente « in questi ultimi anni, con l'insegnamento della fisica e il suo « debole organismo ha dovuto soccombere.... ».

On. Direttore Generale, questo non è il primo caso!... Giunge a me, di continuo, l'eco delle sofferenze a cui sono sottoposti i Colleghi che, pel dovuto rispetto alla Cattedra già tenuta con tanto decoro, e per conservare il loro prestigio dinanzi alla scolaresca anche nelle ore in cui devono impartire l'insegnamento della fisica, si sono sottoposti e si sottopongono a uno studio e ad un lavoro che li sfibra, tutti, ad uno ad uno, venendone così privata la Scuola Media di uomini, di alto valore scientifico e didattico, quale fu, ad esempio, il Collega prof Bindoni che, entrato nei ruoli delle R. R. Scuole Medie, per effetto di concorsi da Lui brillantemente superati, dava le migliori speranze di se coi lavori pubblicati, che rivelarono il suo grande acume e la sua potenzialità a percorrere pure la carriera superiore...

La situazione dei Colleghi dei Licei e degli Istituti magistrali è resa ancor più penosa dall'aggravio dell'orario settimanale e dalla molteplicità delle classi a loro affidate: tipica sopratutto è

Digitized by Google

la posizione del docente di matematica e fisica del Ginnasio e del Liceo classico, posizione che alla S. V. Ill.ma è perfettamente nota, onde reputo superflua ogni mia parola in proposito. Altrettanto tipica è la posizione del Preside del Liceo Scientifico quando abbia pure l'onere dei due insegnamenti della matematica e della fisica.

Vi sono stati, e vi sono forse tuttora, alcuni casi, pietosissimi, di Colleghi passati, per effetto della Riforma, ad un orario di matematica di 24 ore settimanali nell'Istituto tecnico inferiore, e quindi pure con correzione di compiti in molte classi, con una sperequazione enorme rispetto a chi riuscì ad essere assegnato ad un ginnasio isolato con sole 9 ore settimanali di matematica. Una simile sperequazione vige pure in varî Licei classici tra il prof. di Storia Naturale e il prof. di Matematica e Fisica.

Un senso di scrupolosa disciplina e di vera devozione al Regime, che salvò l'Italia dalla follia bolscevica, ha ispirato i Colleghi a far di tutto perchè la Riforma si attuasse integralmente e desse i migliori frutti. Ed ora è lecito sperare che l'abnegazione dei Colleghi sia premiata con una serie di provvedimenti di vera giustizia che si risolveranno più a favore della Scuola e della Nazione che non a vantaggio dai singoli Colleghi i quali domani, come sempre, saranno disposti a dare tutte le loro migliori energie fisiche e morali per l'adempimento, il più scrupoloso, dei loro doveri.

Confido che Ella con l'opera Sua d'intelligenza e d'amore, contribuirà efficacemente a promuovere gli invocati provvedimenti, diguisachè abbiano attuazione i nobilissimi propositi manifestati da S. E. il Ministro della P. I. on. Belluzzo in occasioni solenni che i Colleghi non dimenticano. Pertanto con profondo ossequio

dev.mo
Direttore ALBERTO CONTI

***

A questa lettera l'on. Direttore Generale Gr. Uff. Trabalza si è compiaciuto di rispondere il 20 maggio colla lettera che segue

Ill.mo Signor Prof. ALBERTO CONTI
R. Liceo Michelangiolo *FIRENZE*

Egregio Professore,

della questione da Lei segnalatami nel Suo memoriale il Ministero s'è occupato più volte, con la maggiore attenzione e

Digitized by Google

col vivo desiderio di porre un rimedio ad uno stato di cose veramente degno di molta considerazione. Ma, il problema è meno facile a risolversi di quello che sembra, sopratutto per ragioni di indole economica per le quali il Ministero si è trovato ogni volta a dover fare i conti con la finanza. Tuttavia non è mio intendimento lasciar cadere la cosa, anzi m'è grato assicurarLe fin d'ora che terrò particolarmente presenti le Sue considerazioni nella speranza che, in un eventuale prossimo riesame delle questioni d'orario, si offra l'opportunità di ovviare ai gravi inconvenienti da Lei segnalati nei riguardi dell'abbinamento della matematica e fisica nelle Scuole medie superiori.

Le porgo i miei più distinti saluti

dev.mo
TRABALZA

***

Ed appena ricevuta la precedente cortese risposta, fu inviata l'altra lettera che segue:

Firenze, 21-V-929 (VII)

On. Sig. Direttore Generale,

Grazie, dal profondo del cuore, della Sua cortese risposta! Grazie per tutto quello che Ella potrà fare, per tutto quello che Ella potrà ottenere per una migliore sistemazione degli insegnamenti della matematica e della fisica, e dei Colleghi a cui è affidato l'insegnamento di queste due discipline, così fondamentali per la cultura e per l'avvenire della nostra Patria!

Sento vibrare concordi di gratitudine i cuori dei Colleghi e dei Lettori tutti del Bollettino di Matematica. Interprete del loro sentimento Le porgo, anche a loro nome, i miei più devoti ossequi.

A. CONTI

(*N. d. D.*) .... Ma ahimè le ultime notizie non sono punto confortanti.... Ed a noi pare che non si tratti soltanto di difficoltà finanziaria, ma dell'indirizzo filosofico ancora dominante.... L'illustre Padre Gemelli, in un'applauditissima Conferenza tenuta il 20 corr. a Firenze, all'Esposizione di Storia della Scienza, ben rilevava « *l'olimpico sprezzo del sapere scientifico* » caratteristico della cosidetta filosofia idealistica e dei più strenui e più valorosi sostenitori di questo indirizzo filosofico.

Digitized by Google

NOTE BIBLIOGRAFICHE [1]

Lezioni di fisica ad uso degli istituti magistrali di Lorenzo Siriati. Vol. I. Meccanica dei solidi, dei liquidi, degli aeriformi. Termologia. Ed. Ant. Vallardi, Milano, 1929 - L. 10.

La riforma scolastica, col separare la fisica negli istituti magistrali dalle scienze naturali ed abbinarla alla matematica, imponeva al suo insegnamento un cambiamento di indirizzo rendendolo più conforme alla natura e allo sviluppo storico di questa disciplina. Mentre essa ha per oggetto principalmente lo studio delle relazioni fra le grandezze fisiche che s'introducono per interpretare i fenomeni, l'insegnamento s'era ridotto più che altro alla descrizione di esperienze e fenomeni e all'enunciazione frammentaria delle leggi che vi si riferiscono. Eppure lo stesso Galileo, che nell'esperienza aveva ravvisato il fondamento della fisica, traeva dalla ricerca matematica dei rapporti quantitativi fra le grandezze ogni suo sviluppo.

Ma ben pochi sono finora i testi per gl' istituti magistrali corrispondenti al nuovo indirizzo. Fra questi vanno segnalate le lezioni di fisica del prof. Siriati, compilate esclusivamente per tali istituti. L'autore, seguendo fedelmente nello svolgimento della materia i programmi prescritti per gli esami di abilitazione, tiene in sommo conto i bisogni specifici della scuola, la preparazione media degli alunni e le possibilità pratiche consentite dai limiti degli orari. In tal modo, bene conscio dei fini cui deve servire e dei mezzi di cui può disporre, riesce a farne un valido ausilio all'opera dell'insegnante, meglio di altri, eccellenti anche nel trattare la propria disciplina, ma troppo lontani dalla scuola media per avere l'esatta visione delle sue pratiche necessità.

L'opera compiuta sarà di due volumi, ma di questi è pubblicato per ora solamente il primo, che tratta la meccanica e la termologia. La materia vi è svolta in forma sobria, ma chiara. Con rigorosa precisione sono enunciati i principi, le definizioni delle grandezze fisiche, le leggi. Le descrizioni degli apparecchi, delle esperienze e dei fenomeni sono brevi, ma generalmente esaurienti. Cenni opportuni sulla spiegazione di fenomeni della vita quotidiana e sulle più comuni applicazioni scientifiche chiudono ciascun capitolo. E' evitata con cura qualunque prolissità, è omesso tutto ciò ch'è superfluo e può riuscire ingombrante e quanto si può meglio apprendere a scuola dalla viva voce del docente e dall'osservazione diretta degli apparecchi e delle esperienze.

---

[1] (*N. d. D.*) Facciamo volentieri un'eccezione alla regola in pro di quest'opera del Siriati, per non ritardarne troppo una recensione nell'altra Sezione di questo Bollettino.

Digitized by Google

Per esemplificare, non sono dedicate che poche parole alla descrizione delle bilance, pochi cenni alle macchine composte, una brevissima trattazione alla forza centrifuga, della quale va osservato non esservi alcuna menzione nei programmi vigenti. Ma si trova una definizione molto chiara e completa della densità e del peso specifico dei corpi, distinti in assoluti e relativi, quale indarno si cerca spesso anche in testi voluminosi. Gli elettroni, che nella fisica moderna vengono ad assumere una parte tanto importante, sono introdotti già fra le proprietà generali della materia, per cui è da attendersi che ne sarà fatto largo uso per l'interpretazione dei fenomeni elettrici nel secondo volume.

Queste lezioni sono destinate dunque a soccorrere all'opera dell'insegnante non a sostituirlo; l'alunno vi troverà dei riassunti chiari e succosi, atti a ravvivare nella sua mente, senza fuorviamenti e divagazioni, le lezioni udite nella scuola.

Particolare rilievo dev'esser fatto sulla parte che nella trattazione della materia è assegnata alla matematica. Stabilite con esattezza le definizioni delle grandezze fisiche si che, le leggi possono venir espresse nella forma trasparente e precisa delle formule e discusse matematicamente, talora anche con grafiche; alcune di esse si possono ricavare anche deduttivamente. Quà e là delle tabelle di dati numerici sulle costanti fisiche si prestano ad opportuni raffronti quantitativi. In tal modo la matematica, pur limitata ai mezzi elementari di cui dispongono gli alunni degli istituti magistrali, giova molto alla precisione e alla chiarezza della trattazione.

Parecchi capitoli sono seguiti da numerose applicazioni di calcolo, ugualmente utili a far penetrare meglio il senso delle leggi fisiche e a mettere in valore le conoscenze acquisite con lo studio dalla matematica. Si tratta di problemi di cui è discusso in generale lo svolgimento o problemi avviati soltanto alla soluzione o semplicemente proposti, con dati sia generali che particolari, dove trovano uso frequente le proporzioni e le equazioni di primo grado. Notiamo in particolare i problemi variati sul moto, quelli sulle condizioni di equilibrio delle macchine, sul galleggiamento dei corpi, sulla pressione dei gas, sulla dilatazione termica e sulla misurazione del calore; un'interessante discussione sul problema proposto dal re Gerone di Siracusa ad Archimede, una deduzione matematica elementare delle leggi del pendolo.

Anche le illustrazioni sono in generale sufficenti; numerose per qualche capitolo, come quello sui velivoli e sui dirigibili; alcune, come quelle sulle macchine termiche, fanno desiderare una migliore evidenza didattica.

Dei brevi cenni di storia della scienza inquadrano qua e là nei vari periodi storici le più importanti scoperte e rilevano l'importanza del progresso scientifico per quello della civiltà, mettendo nel debito posto le glorie nazionali. Particolarmente diffuso è, in questo riguardo, il capitolo sulla navigazione aerea e sull'aviazione, dove sono registrate le più recenti conquiste, unite ai nomi di parecchi italiani.

Opportune sono pure le indicazioni bibliografiche, sparse, di

Digitized by Google

operette di volgarizzazione adatte per i giovani, relative ad argomenti particolari. Queste indurranno più di un alunno, attratto da un interessamento speciale, ad intraprendere delle letture profittevoli alla sua cultura scientifica.

Anche nei riguardi degli esami di stato va segnalata l'opportunità di un testo che si adegui opportunamente alle reali esigenze dell'istruzione, potendo esso costituire un ottimo campo di intesa fra il commissario d'esami e colui che ha il compito di preparare i candidati sul modo d'interpretare nei particolari i programmi prescritti.

GIACOMO FURLANI

***

ALBERTO CONTI: *Aritmetica pratica ad uso delle Scuole medie inferiori* - Volume corredato di oltre 700 esercizi e problemi da risolvere (R. Bemporad, Firenze - L. 13).

La Casa editrice deve prepararne una *quinta edizione*, essendo già esaurita anche la quarta.

L'Autore sarà grato a quei Colleghi che, entro il mese di luglio, gli faranno conoscere quelle eventuali correzioni o modificazioni che essi proporrebbero per rendere il testo sempre più corrispondente alle esigenze dell'insegnamento dell'aritmetica pratica e allo spirito della riforma Gentile.

ALBERTO CONTI: *Elementi di Aritmetica Razionale ad uso degli allievi degli Istituti magistrali*, con numerosi esercizi. (Casa Ed. Zanichelli - L. 12,50).

Questo trattato che fu già tra i più diffusi nelle scuole normali dal 1900 al 1923, fu poi rigorosamente coordinato ai nuovi programmi per gli Istituti magistrali creati dalla riforma Gentile.

I nuovi insegnanti possono averne una copia in omaggio rivolgendosi direttamente alla Casa Editrice N. Zanichelli (Bologna).

ALBERTO CONTI: *Elementi di calcolo letterale ad uso dell'Istituto magistrale.* (Casa Ed. Zanichelli - L. 5), *Quarta edizione conforme ai programmi vigenti.*

ETTORE BARONI: *Algebra ad uso delle Scuole medie* - VI Edizione riveduta da *A. Conti* (Casa Ed. Bemporad). In due volumetti, al prezzo di L. 5 ciascuno.

Nel chiederne copie in omaggio, gli Insegnanti indichino il Volume che loro occorre, perchè l'opera è divisa in volumi diversi a seconda dei vari tipi di scuola media (Ginnasio, Liceo classico, Liceo scientifico, Istituto tecnico inferiore, Istituto tecnico superiore).

Digitized by Google

Anno XXV dalla fondazione - Fasc. III - Annata VIII Nuova Serie

Sull'estensione delle figure convesse

Nota di FRANCESCO SEVERI
Accademico d'Italia (Roma)

Il concetto di figura convessa (cioè di figura tale che il segmento che ne congiunge due punti qualunque appartenga sempre ad essa) è indispensabile nella geometria elementare (1); ed ogni trattazione che non lo ponga in modo esplicito in evidenza, è o manchevole o inutilmente prolissa.

Restando nell'ambito elementare, il concetto può altresì porsi a base di definizioni nominali di linee, superficie, solidi; e, se ciò non ho fatto ne' miei « Elementi », è per ovvii motivi didattici, tanto più che queste nozioni si riattaccano direttamente all'intuizione e si precisano (come ho mostrato) per quel tanto che basta agli scopi elementari, con semplici attributi logici, senza rinunciare ad un'utile e adeguata generalità, rispondente all'ampiezza con cui le nozioni medesime si presentano spontanee alla mente dello scolaro.

Così una linea piana, finita e chiusa (2), può, in un primo tempo, definirsi come il contorno (3) di una figura piana convessa, finita. Dedotto, da tale definizione, che sopra una linea siffatta esistono due versi opposti e quindi che può parlarsi di archi ad essa appartenenti (che si chiaman brevemente convessi (4)), può definirsi in generale una linea piana finita come

(1) Ved. le varie edizioni de' miei *Elementi di geometria*, ed in particolare le prefazioni e le appendici.

(2) Per la definizione di figura finita, ved. il I. vol. dell'ed. ridotta de' miei *Elementi* (Firenze, Vallecchi, 1928-VI), pag. 36.

(3) Ved. a pag. 22 del l. c. in (2).

(4) È l'uso comune, ma sarebbe meglio dire (con JUEL) archi *elementari*, perchè un tal arco, che non si riduca ad un segmento, non è una figura convessa.

Digitized by Google

una figura formata da una successione di un numero finito di archi convessi AB, BC, ..., KL (L coincidendo con A, se la linea è chiusa).

Lo studio delle figure convesse, sviluppato da MINKOWSKI e da coloro che ne hanno seguito le orme, permette di concludere (considerando, per brevità, le sole figure piane) che una figura convessa F — sottintendiamo sempre, nel seguito, *finita* e *limitata* (cioè contenente *tutti* i propri punti contorno) — possiede un'estensione finita, e così il suo contorno; ossia che F ed il suo contorno l sono grandezze estensive, da ascriversi rispettivamente alla specie delle superficie e delle linee.

Desidero mostrare come tale risultato possa conseguirsi con mezzi molto semplici.

1. Osservo anzitutto che *una figura convessa rettilinea F (finita e limitata) è un segmento (coi suoi estremi)*. Infatti, poichè F è finita, possiede due punti estremi A, B (postulato della continuità), i quali appartengono ad F, in quanto la figura è limitata. Ma allora, per la convessità di F, ne segue che F coincide col segmento AB.

Tenuto conto che l'intersezione di due figure convesse o è un punto o una figura convessa [l. c. in (2), pag. 23], si deducono i corollari seguenti:

Una figura convessa F o non è incontrata da una retta (del suo piano) o è incontrata in un punto o in un segmento, i cui estremi appartengono al contorno di F.

Le rette del piano di F si distribuiscono in tre categorie: rette secanti (contenenti un segmento di F e secanti in due punti il contorno l); rette radenti (contenenti un sol punto del contorno o tutto un segmento del contorno); rette esterne (non contenenti punti di F).

Ogni retta passante per un punto interno è secante.

2. Preso un punto O, interno ad F, havvi dunque una corrispondenza biunivoca ω fra i punti della linea l, contorno di F, e le semirette di origine O. Sia P un punto qualunque di l e C un cerchio di raggio δ e centro P, che lasci all'esterno O. La figura convessa F' comune ad F e a C, contiene una parte di l, comprendente P: si chiama l'*intorno* di am-

Digitized by Google

piezza δ di P sopra l. Le semirette proiettanti da O i punti di quest'intorno appartengono all'angolo delle due semirette tangenti mandate da O a C; onde, quando δ tende a zero, tendono a zero anche gli angoli formati da quelle proiettanti colla semiretta OP. Questo significa che la corrispondenza ω è continua: è un *omeomorfismo* tra l ed il fascio di semirette di centro O (5). Sicchè l è altresì omeomorfa ad una circonferenza (di centro O) e quindi è una linea chiusa di JORDAN.

Ne deriva che su l esiston due versi opposti aventi significato topologico (cioè invarianti per trasformazioni biunivoche continue). Uno di questi versi proiettasi da O in uno dei versi del fascio di semirette e l'altro nell'opposto (6). Si può quindi parlare su l di archi e questi godono delle stesse proprietà topologiche degli archi di circonferenza, e, in particolare, soddisfanno al postulato della continuità.

3. Un arco AB di l giace tutto da una parte della propria corda, perchè altrimenti, in forza del postulato della continuità, applicato all'arco, ne seguirebbe l'esistenza di un'ulteriore intersezione della corda AB con l. Dunque un semipiano contornato da una retta secante di F, ha in comune con l un arco. Epperò un angolo, di cui un lato almeno sia secante, ha altresì comune con l un arco.

4. Fissiamo una, PA, delle semirette che escon da un punto P di l, la quale vada ad un altro punto A della linea; e sia PM la semiretta opposta. Scelto uno degli archi AP e ordinate le semirette dell'angolo piatto APM, che contiene il detto arco, col prender come primo lato PA e come ultimo

---

(5) Ved., a proposito di omeomorfismi tra linee aperte e segmenti e tra linee chiuse e circonferenze, la mia recentissima Nota su *Le curve intuitive*, Rend. del Circolo mat. di Palermo, t. 54.

(6) Occorre dimostrare, come ho fatto con estrema semplicità nella Nota citata in (5), che i versi indotti sopra una linea dall'omeomorfismo con un segmento o con una circonferenza, sono topologicamente invarianti, per poterli usare come proprietà intrinseche della linea. *Definendo* i versi su l come i trasformati, mediante la corrispondenza biunivoca ω, dei versi del fascio O, è necessario poi provare che i versi così definiti non mutano cangiando O.

Digitized by Google

PM, l'insieme delle semirette proiettanti da *P* i punti dell'arco ha per estremo superiore una semiretta *PS*, la quale non può incontrar l'arco in un punto *B* distinto da *P*, perchè se no vi sarebbero semirette ad essa successive, incontranti l'arco *BP*, contenuto nell'angolo *BPM* (n. 3). Ogni semiretta *PR* dell'angolo *APS*, distinta dal lato *PS*, incontra l'arco *AP* in un punto diverso da *P*, perchè, in caso contrario, il semipiano *PRM* non conterrebbe che l'estremo *P* dell'arco *AP*, epperò non vi sarebbe nell'angolo *APM*, alcuna semiretta, successiva a *PR*, proiettante un punto dell'arco, distinto da *P*.

Dunque fra i punti dell'arco *AP* e le semirette dell'angolo *APS* havvi una corrispondenza biunivoca, che è *ordinata*, perchè (n. 3) ad un arco contenuto in $\frown P$ corrisponde un angolo contenuto in *APS*.

Pertanto la detta corrispondenza è continua (7). Onde la semiretta *PS* può altresì definirsi come *limite* della semiretta proiettante da *P* un punto *X* mobile sull'arco *AP*, quando *X* tende a *P*. Si dirà che *P* è una *semiretta tangente* ad *l* in *P*. Un'altra semiretta tangente s'ottiene similmente in corrispondenza all'altro arco *AP*. Concludendo:

In ogni punto di l *vi son due semirette tangenti, limiti di semirette proiettanti un punto mobile su* l *che si avvicina a* P *in un verso o nell'altro.*

Il punto *P* di *l* è *semplice*, se le due semirette tangenti son opposte; è un *punto angoloso*, in caso contrario. Si potrebbe agevolmente verificare che *P* è semplice nel senso precisato nella mia Nota citata in (5); che *l* non può possedere infiniti punti angolosi; ecc.

Retta tangente è una retta che contenga una semiretta tangente. Poichè l'angolo di due semirette tangenti, che contiene *F*, attesa la convessità della figura, è necessariamente convesso, la opposta di una semiretta tangente in *P* non può incontrare *l*, fuori di *P*. Pertanto *le rette tangenti son particolari rette radenti*; *anzi le sole rette radenti, se* l *non ha punti angolosi*. La *F* giace tutta da una parte di ogni sua retta tangente (o radente).

---

(7) Ved. il n. 1, Oss., della mia Nota citata in (5).

Digitized by Google

5. Le semirette che escon da un punto Q esterno ad F, si repartiscono in semirette esterne e semirette secanti (incontranti F in un segmento) o radenti (cioè incontranti l in un sol punto o in un segmento e situate su rette radenti). Dal postulato della continuità segue subito che le semirette non esterne son contenute in un angolo, i cui lati non possono essere che rette radenti (n. 3). E si verifica altresì (sempre sul fondamento del n. 3) che ogni semiretta interna al predetto angolo è secante, mentre ogni semiretta ad esso esterna, è pure esterna ad F. Sicchè *da un punto esterno escon due semirette radenti, formanti necessariamente un angolo convesso.*

6. Trasformiamo F con un'omotetia diretta ρ, avente il centro in un punto interno O ed il rapporto $r < 1$. Sia F' la figura convessa trasformata, che contiene nel suo interno F, l' il suo contorno, omologo del contorno l di F.

Dato un punto P' di l', si può sempre scegliere un arco di l', contenente P' all'interno, e la cui corda sia esterna ad F. Basta perciò condurre una delle infinite tangenti di F, che non passano per P'. Essa divide l' in due archi, di cui uno contiene P'. Ogni arco interno a quest'ultimo, e contenente P' all'interno, soddisfa alla voluta condizione.

Pel teorema di Pincherle-Borel (8) si può dunque determinare un numero *finito* di archi di l' ciascun dei quali sottenda una corda esterna ad F, e tali che ogni punto di l' sia interno ad uno almeno di essi. Mediante soppressioni di parti comuni, si posson ricavare dagli archi ottenuti altri archi analoghi, in modo però che due qualunque non abbiano punti interni comuni e che ogni punto di l' sia interno ad uno solo di essi o estremo di due. Ordinati gli estremi di tali archi in un verso di l' e congiunte le coppie di estremi consecutivi mediante segmenti, s'ottiene il perimetro t' di un poligono convesso T', inscritto in l', i cui lati non tagliano F e che perciò contiene F nel suo interno. Il corrispondente di

(8) Ved. la semplice dimostrazione di Bagnera, contenuta in una mezza pagina di Rend. del Circolo mat. di Palermo, t. 28 (1909) p. 244.

Digitized by Google

T' nell'omotetia ρ^{-1} è un poligono convesso T, di perimetro t, inscritto in l; e si hanno le relazioni:

$$T' - T = \frac{1 - r^2}{r^2} T \ , \ t' - t = \frac{1 - r}{r} t \ ,$$

donde:

$$T' - T < \frac{1 - r^2}{r^2} K \ , \ t' - t = \frac{1 - r}{r} k \ ,$$

ove K sia un *fissato* poligono convesso, che contenga F all'interno, k il suo perimetro. Prendendo r abbastanza prossimo ad 1, si può ottenere dunque che $T' - T$ sia minore di una superficie, comunque prefissata; e, similmente, che $t' - t$ sia minore di una lunghezza, comunque prefissata. Concludendo

La classe dei poligoni convessi contenuti in una figura convessa F (*finita e limitata*) *e quella dei poligoni convessi contenenti* F, *sono contigue; e son altresì contigue le classi dei loro perimetri.*

La prima coppia di classi individua una superficie finita, la cui estensione può *definirsi* come estensione di F; e la seconda una lunghezza finita, che può *definirsi* come lunghezza di l.

7. Ho ampiamente detto nelle prefazioni e nelle appendici de' miei « Elementi » le ragioni che mi hanno indotto ad assumer come primitivo il concetto di estensione di una linea o superficie o solido. Tali ragioni trovansi anche esposte, insieme ad altro, in un recente articolo del prof. Cassina (*).

Il sapere se una figura ha o meno un'estensione (soddisfacente al complesso dei postulati caratterizzanti una specie di grandezze continue), allorchè trattasi di un ente intuitivamente noto, del quale sia possibile realizzare un modello materiale, è questione cui risponde l'intuizione medesima dell'ente. Nell'atto in cui il pensiero lo identifica, le attribuisce, tra le altre, anche quella proprietà, come inscindibilmente connessa alla sua intuizione. Così è p. es. di un poligono, di un cerchio; ecc.

(*) Schola et vita, Milano, Junio-Julio 1929, p. 133.

Digitized by Google

Non havvi, in questo processo psicologico, nulla di nuovo, rispetto a quel che occorre per qualunque altra parte, anche più elementare, della geometria. Ogni volta che s'identifica un oggetto astratto definito per postulati, in un oggetto reale, si compie un atto d'intuizione analoga.

Non è così quando la figura F considerata è stata nominalmente definita, ma non è intuibile nella sua piena generalità (è il caso di una figura convessa!).

Allora l'attribuire o no ad essa un'estensione, non dipende più da un atto d'intuizione, ma dalla possibilità o meno di definire una grandezza, univocamente determinata da F. Havvi in ciò qualcosa di arbitrario. Tuttavia, se alla definizione di F soddisfanno particolari classi di figure, immediatamente intuibili, occorre che la definizione di estensione sia data in modo che in quei casi particolari si ritrovi proprio la grandezza di cui l'intuizione ci aveva fatto postular l'esistenza. A tale condizione soddisfa la definizione data nel n. prec. di estensione di una figura convessa o del suo contorno. Quando la figura di cui si parla è un poligono o un cerchio, la definizione esprime infatti una proprietà *caratteristica* della postulata estensione del poligono o del cerchio o dei loro contorni.

Staggiano (Arezzo), 2 agosto 1929 - VII.

Digitized by Google

L' Uebertragungsprincip di O. Hesse
ed
Il sistema di due quadratiche binarie

di DOMENICO MERCOGLIANO (Napoli)

In un precedente lavoro (1), promettendone un altro in un campo superiore, ho accennato anche a questo che qui presento, pensando che sia non del tutto privo d' interesse.

Come si vedrà, mi giovo fondamentalmente anche qui d' un principio di O. Hesse (*Ein Uebertragungsprincip*, Journ. für die reine und ang. Mathematik, 1866) per ottenere, in noti risultati, interpretazioni e vedute nuove (2).

Premetto all'uopo le linee principali della trasformazione.

Si consideri l'equazione

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_1 x_2 + a_3 x_2^2 = 0,$$

---

(1) *I complessi quadratici contenenti la congruenza degli assi di una cubica gobba ecc.*, di prossima pubblicazione con l'altro naturalmente derivantene « *Sulle equazioni della superficie di Veronese* » (per il suggerimento dei quali e per altri affettuosi consigli non posso che ringraziare qui assai cordialmente il Prof. Gaetano Scorza, sempre pronto a *trarre tutti dietro il gran carro di luce*).

(2) L' Hesse, stabilendo il suo principio di trasporto con formole di corrispondenza generali, cita anche qualcuna delle proprietà di cui ci occuperemo. La ragione però di questo lavoretto vuolsi ricercare non tanto nel voler presentare un quadro più sistematico delle relazioni, che nascono dallo studio di due binarie quadratiche, quanto nel fatto che, avendo sostituito nel piano **alle** espressioni lineari in x ed y dell' Hesse **delle** espressioni di grado zero (le ordinarie coordinate omogenee del punto) i risultati che si ottengono o sono immediati, o sotto veste di grande semplicità. E si vedrà inoltre che non solo la retta può servire da *Telegraphenbureau* del piano, secondo il pensiero dell' Hesse, ma che anche il piano può presentare qualche semplificazione per lo studio delle proprietà dei punti della retta.

Digitized by Google

rappresentante una coppia di punti di r, ed il punto

$$(a_1 \ , \ a_2 \ , \ a_3)$$

(del piano α) che a tale coppia si può far corrispondere.

Nella corrispondenza, che in tal modo si viene a stabilire, alla totalità (∞^1) dei punti di r, costituiti tutti da un punto contato due volte,

$$(x'_2 x_1 - x'_1 x_2)^2 = 0,$$

corrispondono in α i punti di coordinate

$$(k) \qquad X_1 = x'^2_2 \ , \ X_2 = -2 x'_1 x'_2 \ , \ X_3 = x'^2_1,$$

i punti cioè della conica

$$(I) \qquad X_2^2 - 4 X_1 X_3 = 0.$$

Considerando quindi la coppia di punti di r

$$(x'_2 x_1 - x'_1 x_2)(\beta_2 x_1 - \beta_1 x_2) = 0,$$

costituita dal punto precedente $\frac{x'_1}{x'_2}$, considerato come semplice, e dal punto $\frac{\beta_1}{\beta_2}$ variabile su r, è manifesto che ad essa coppia corrisponde in α il punto

$$X_1 = \beta_2 x'_2 \ , \ X_2 = -(\beta_1 x'_2 + \beta_2 x'_1) \ , \ X_3 = \beta_1 x'_1,$$

che — com'è facile verificare — appartiene alla tangente [1] alla conica (I) nel punto

$$(k) \qquad X_1 = x'^2_2 \ , \ X_2 = -2 x'_1 x'_2 \ , \ X_3 = x'^2_1.$$

Si può dire perciò che la tangente alla (I), in un suo determinato punto A, contiene ogni punto del piano, cui su r corrisponda una delle ∞^1 coppie di punti, di cui faccia sempre parte però il corrispondente di A. Onde anche — viceversa — alla totalità (∞^2) delle quadratiche di r con un punto comune corrisponde in α la ∞^2 di punti delle tangenti

---

[1] Di equazione

$$x'^2_1 X_1 + x'_1 x'_2 X_2 + x'^2_2 X_3 = 0.$$

Digitized by Google

alla conica (I), alla ∞^1 poi di quadratiche con un punto comune fissato corrispondendo — come s'è detto — i punti di una di queste tangenti.

Si considerino in primo luogo i due punti (1) di α

$$(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)$$

di una tangente alla conica (I); ad essi — per il fissato trasporto — vengono a corrispondere su r due coppie di punti aventi per punto comune il corrispondente del punto di contatto della conica con la data tangente. Ora, perchè i dati punti del piano giacciano sopra una tangente alla (I), i valori di u_1, u_2, u_3 ottenuti dalle

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 &= 0, \\ b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3 &= 0, \end{aligned}$$

cioè

$$p_{23} = (a_2b_3 - a_3b_2), -p_{13} = -(a_1b_3 - a_3b_1), p_{12} = (a_1b_2 - a_2b_1)$$

devono sodisfare l'equazione (2) della (I) in coordinate di rette

$$\text{(I')} \qquad u_2^2 - u_1u_3 = 0.$$

Si deve cioè avere la relazione:

$$\text{(III)} \qquad p_{13}^2 - p_{23}p_{12} = 0,$$

---

(1) A differenza di ciò che è detto nella citata Memoria dell'Hesse, di punti di α in linea retta, cui corrispondono su r quadratiche di una medesima involuzione, non vogliamo omettere di dire che tale proprietà p. es. è proprio immediata con la nostra notazione; poichè, dati in α i punti $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (\lambda a_1 + \mu b_1, \lambda a_2 + \mu b_2, \lambda a_3 + \mu b_3)$, ad essi corrispondono su r le quadratiche $a_1x_1^2 + a_2x_1x_2 + a_3x_2^2 = 0$, $b_1x_1^2 + b_2x_1x_2 + b_3x_2^2 = 0$, $\lambda(a_1x_1^2 + a_2x_1x_2 + a_3x_2^2) + \mu(b_1x_1^2 + a_2x_1x_2 + b_3x_2^2) = 0$, manifestamente rappresentanti coppie appartenenti ad una medesima involuzione.

(2) Ottenuta da

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 & u_1 \\ 0 & 1 & 0 & u_2 \\ -2 & 0 & 0 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Digitized by Google

più nota nella forma del Sylvester

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Questa è dunque su r la condizione necessaria e sufficente affinchè le due quadratiche

$$(a) \qquad a_1 x_1^2 + a_2 x_1 x_2 + a_3 a_{32} = 0,$$
$$(b) \qquad b_1 x_1^2 + b_2 x_1 x_2 + b_3 x_2^2 = 0$$

abbiamo nna radice comune, mentre in α — come abbiamo visto — le p_{ij} corrispondenti sono le coordinate di una tangente alla conica (I'). La nota proprietà così dell'annullarsi del risultante, perchè (a) e (b) abbiano una radice comune, è stabilita per altra via, con un'interpretazione geometrica della relazione (III), che non sembra priva d'interesse.

Se sono dati perciò due punti di α, corrispondenti a due quadratiche di r con un punto comune e per conseguenza sodisfacenti la (III) con le coordinate della loro retta, è ovvio che, determinando il punto di contatto di tale retta con la (I), si otterranno — anche — le coordinate su r del punto comune delle due quadratiche.

Infatti dalla $(I') = f(u_1, u_2, u_2) = 0$, tenendo conto dei rispettivi valori $p_{23}, -p_{13}, p_{12}$ di u_1, u_2, u_3, si ottengono per

$$f'u_1(p_{23}, -p_{13}, p_{12}),\ f'u_2(p_{23}, -p_{13}, p_{12}),\ f'u_3(p_{23}, -p_{12}, p_{12})$$

rispettivamente i valori

$$-p_{12}\ ,\ -2p_{13}\ ,\ -p_{23}\ ,$$

e per le (k)

$$\frac{x_1}{x_2} = -\frac{p_{23}}{p_{13}};$$

ovvero anche

$$\frac{x_1}{x_2} = -\frac{p_{13}}{p_{12}}.$$

E si ottiene così — anche per questa via — la radice comune delle due quadratiche.

Digitized by Google

Analogamente per il caso di una sola quadratica, se consideriamo un punto solo di $\alpha(a_1, a_2, a_3)$, è immediata la determinazione dei punti di contatto delle due tangenti condotte da esso alla conica (I). Ora è noto che ad uno di questi punti di contatto — A — corrisponde su r il punto comune alla ∞^1 di quadratiche, che corrispondono alla ∞^1 di punti della tangente per A alla conica. E così per l'altro punto B. Manifestamente perciò la quadratica corrispondente al punto (a_1, a_2, a_3) conterrà i corrispondenti dell'uno e dell'altro punto di contatto, A e B. Ed ecco in ciò una via corrispondente all'ordinaria per la ricerca delle radici dell'equazione

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_1 x_2 + a_3 x_2^2 = 0.$$

Invero l'equazione della polare di (a_1, a_2, a_3) rispetto alla (I) è

$$(p) \qquad -2a_2 X_1 + a_2 X_2 - 2a_1 X_3 = 0;$$

onde, per la ricerca delle coordinate dei punti che ha comuni con la conica

$$X_2^2 - 4 X_1 X_3 = 0,$$

si ha innanzi tutto dalla (p)

$$X_2 = 2\left(\frac{a_3}{a_2} X_1 + \frac{a_1}{a_2} X_2\right),$$

e successivamente poi

$$4\left(\frac{a_3}{a_2} X_1 + \frac{a_1}{a_2} X_3\right)^2 - 4 X_1 X_3 = 0,$$

$$a_3^2 X_1^2 + a_1^2 X_3^2 + 2a_1 a_3 X_1 X_3 - a_2^2 X_1 X_3 = 0,$$

$$a_3^2 X_1^2 + a_1^2 X_3^2 + (2a_1 a_3 - a_2^2) X_1 X_3 = 0,$$

$$a_1^2 \left(\frac{X_3}{X_1}\right)^2 + (2a_1 a_3 - a_2^2) \frac{X_3}{X_1} + a_3^2 = 0,$$

$$\frac{X_3}{X_1} = \frac{a_2^2 - 2a_1 a_3 \pm \sqrt{(2a_1 a_3 - a_2^2)^2 - 4a_1^2 a_3^2}}{2a_1^2} =$$

$$= \frac{a_2^2 - 2a_1 a_3 \pm a_2 \sqrt{a_2^2 - 4a_1 a_3}}{2a_1^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(-a_2 \mp \sqrt{a_2^2 - 4a_1 a_3}\right)^2}{2a_1^2} = \frac{\left(-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_1 a_3}\right)^2}{4a_1^2}.$$

Digitized by Google

Passando quindi dai punti della conica di α ai corrispondenti punti (doppi) di r, si ha finalmente per la (k)

$$\left(\frac{x'_1}{x'_2}\right)^2 = \frac{(-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_1a_3})^2}{(2a_1)^2}.$$

Soluzioni manifestamente coincidenti, se tali sono i due punti di contatto delle tangenti condotte dal punto (a_1, a_2, a_3) alla (I), se cioè $a_2^2 - 4a_1a_3 = 0$, appartenendo in tal caso il punto (a_1, a_2, a_3) alla (I) stessa (1).

Per il che è anche manifesto che ai punti delle regioni del piano da cui si possono condurre tangenti distinte, coincidenti o immaginarie alla (I) corrispondono quadratiche con due radici rispettivamente distinte, coincidenti o immaginarie.

Consideriamo ora l'jacobiano delle due quadratiche date:

$$\left(a_1\frac{b_2}{2} - b_1\frac{a_2}{2}\right)x_1^2 + (a_1b_3 - b_1a_3)x_1x_2 + \left(\frac{a_2}{2}b_3 - \frac{b_2}{2}a_3\right)x_2^2 = 0.$$

Tale coppia di punti di r ha per immagine in α il punto

$$\frac{1}{2}(a_1b_2 + a_2b_1)\ ,\ (a_1b_3 - a_3b_1)\ ,\ \frac{1}{2}(a_2b_3 - a_3b_2),$$

cioè il punto

$$(j) \qquad \frac{1}{2}p_{12}\ ,\ p_{13}\ ,\ \frac{1}{2}p_{23},$$

che non appartiene alla conica, se i due punti dell'jacobiano sono distinti, ed è un punto della conica se sono coincidenti, se cioè le (j) verificano la (I), per cui risulta

$$p_{13}^2 - 4\frac{p_{12}}{2}\cdot\frac{p_{23}}{2} = 0$$

(discriminante dell'jacobiano — nullo).

Ora questa relazione coincide col *risultante nullo* delle due date quadratiche con un punto comune, perchè in tal caso la retta individuata dalle loro immagini su α

$$u_1 : u_2 : u_3 = p_{23} : -p_{13} : p_{12},$$

---

(1) Ed è la stessa conica — come doveva essere — a fornire, con le sue tangenti o con i suoi punti, l'interpretazione geometrica dell'annullarsi del risultante di due quadratiche o del discriminante di una sola.

Digitized by Google

è tangente alla (I) nel punto

$$-p_{12}\ ,\ -2p_{13}\ ,\ -p_{23},$$

immagine del punto comune (1) delle due quadratiche e non distinto dal predetto punto (j).

In conclusione quindi il punto corrispondente in α del punto (doppio) comune a due quadratiche date coincide col corrispondente del punto doppio del loro jacobiano: onde — com'è noto — la condizione esprimente l'una cosa (Risultante nullo) coincide con quella esprimente l'altra (Discriminante nullo).

Vediamo ora quale posizione hanno tra loro nel piano due punti rappresentanti due coppie di r tra loro armoniche.

Com'è noto, data la coppia

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_1 x_2 + a_3 x_2^2 = 0,$$

la

$$b_1 x_1^2 + b_2 x_1 x_2 + b_3 x_2^2 = 0$$

è armonica ad essa, se è sodisfatta la condizione

$$a_1 b_3 + a_3 b_1 - \frac{1}{2} a_2 b_2 = 0,$$

vale a dire se nel piano α il punto (b_1, b_2, b_3) appartiene alla retta

$$-2a_3 x_1 + a_2 x_2 - 2a_1 x_3 = 0,$$

e cioè alla polare di (a_1, a_2, a_3) rispetto alla (I).

---

(1) A parte ciò, si vede facilmente che in generale i punti (a_1, a_2, a_3) (b_1, b_2, b_3) $\left(\frac{1}{2} p_{12}, p_{13}, \frac{1}{2} p_{23}\right)$ non sono allineati, perchè il determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} p_{12} & p_{13} & \frac{1}{2} p_{23} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$= \frac{1}{2} p_{12} p_{23} - p_{13}^2 + \frac{1}{2} p_{23} p_{12} = p_{12} p_{23} - p_{13}^2$ non è nullo se i punti (a_1, a_2, a_3) e (b_1, b_2, b_3) non appartengono ad una tangente alla (I), se cioè le quadratiche date non hanno un punto comune.

Digitized by Google

Quindi una coppia A, A' di r e tutte le sue coppie armoniche hanno per corrispondenti in α un punto A_1 ed i punti della polare di questo rispetto alla (I).

Ed è immediata perciò — dalla rappresentazione dei punti di r su α — la ricerca del punto corrispondente alla coppia armonica comune delle coppie AA' e BB' di r. Esso sarà dato dall' intersezione delle due polari di A_1 e di B_1 (immagini di $A, A'; B, B'$) rispetto alla (I).

Un facile calcolo dà infatti nel piano, cercando l' intersezione delle due rette

$$-2a_3x_1 + a_2x_2 - 2a_1x_3 = 0,$$
$$-2b_3x_1 + b_2x_2 - 2b_1x_3 = 0,$$

il punto

$$(ab)_{21}\ ,\ 2(ab)_{31}\ ,\ (ab)_{32}\ ,$$
$$(\text{ove } (ab)_{21} = a_2b_1 - a_1b_2\ ,\ \text{ecc.})$$

e quindi la coppia armonica richiesta

$$(ab)_{21}x_1^2 + 2(ab)_{31}x_1x_2 + (ab)_{32}x_2 = 0.$$

Catania, ottobre 1928

Sessione autunnale Esami Abil. Magistrale.

Digitized by Google

Una discussione elementare dell'equazione generale $f(x, y) = 0$ di 2° grado

di GIUSEPPE BURNENGO (Genova)

§ 1 - Casi particolari notevoli.

Data l'equazione:

(1) $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$

si possono presentare i seguenti casi particolari notevoli:

1) *Circonferenza:* se $a = c$, $b = 0$ la (1) rappresenta una circonferenza, infatti essa può in tali ipotesi ridursi alla forma: $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ dove α, β sono le coordinate del centro e r il raggio.

Es. l'equazione: $x^2 + y^2 - 6x - 4x + 1 = 0$ si riduce alla forma $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 12$; essa rappresenta dunque una circonferenza di centro $C \equiv (3, 2)$ e raggio $r = \sqrt{12}$.

2) *Ellisse o iperbole:* se $b = d = e = 0$, $a \neq 0$, $c \neq 0$, $f \neq 0$ la (1) rappresenta un'*ellisse* o un *iperbole*, infatti in tali ipotesi può assumere la forma: $ax^2 + cy^2 + f = 0$ che è riducibile alle forme tipiche:

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = \pm 1; \qquad \frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = \pm 1$$

equazioni che rappresentano rispettivamente un ellisse o un iperbole riferite ai propri assi.

Per $m = n$ l'ellisse diventa una *circonferenza* e l'iperbole si dice *equilatera.*

Es. l'equazione: $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ si riduce alla forma: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ la quale rappresenta un ellisse avente per semi assi 2 segmenti lunghi 3 e 2.

3) *Parabola:* se $b = a = e = f = 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$ ovvero

Digitized by Google

$b = c = d = f = 0$, $a \neq 0$, $e \neq 0$ la (1) rappresenta una *parabola*, infatti allora assume una delle forme:

$$cy^2 + 2dx = 0 \ , \ ax^2 + 2ey = 0$$

riducibili rispettivamente alle forme tipiche: $y^2 = 2px$, $x^2 = 2py$ rappresentanti rispettivamente la prima una parabola avente per asse l'asse x e la seconda una parabola avente per asse l'asse y ed entrambi col vertice nell'origine.

Es. l'equazione $y^2 = 4x$ rappresenta una parabola avente il vertice nell'origine e col fuoco sull'asse x nel punto di ascissa 1.

4) *Coppia di rette per l'origine:* se $d = e = f = 0$ (manca la parte di 1° grado e il termine noto) la (1) rappresenta una *coppia di rette per l'origine*, infatti essa assume la forma: $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$ riducibile mediante scomposizione in fattori del primo membro alla forma:

$$(mx + ny) \cdot (m'x + n'y) = 0$$

rappresentante 2 rette: $mx + ny = 0$, $m'x + n'y = 0$ passanti per l'origine e

reali distinte	se $b^2 - ac > 0$;
reali coincidenti	se $b^2 - ac = 0$;
immaginarie	se $b^2 - ac < 0$.

Es. l'equazione: $x^2 - y^2 = 0$ rappresenta la coppia di rette: $x - y = 0$, $x + y = 0$ che sono le bisettrici degli angoli formati dagli assi.

5) *Coppia di rette parallele:* se $b = c = e = 0$ ovvero $a = b = d = 0$ (manca una coordinata) la (1) rappresenta una coppia di rette parallele; infatti essa si riduce a una delle forme: $ax^2 + 2dx + f = 0$; $cy^2 + 2ey + f = 0$ che rappresentano rispettivamente una coppia di rette parallele all'asse y o all'asse x.

Es. l'equazione: $x^2 - 5x + 6 = 0$ riducibile alla forma: $(x - 2)(x - 3) = 0$ rappresenta le 2 rette: $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$ parallele all'asse y.

§ 2 - Caso generale.

1) *Riferimento della curva ad un sistema di assi paral-*

Digitized by Google

leli ai dati ed aventi l'origine nell'eventuale centro di simmetria della curva.

Data l'equazione (1), mediante la traslazione:

$$x = X + \alpha \; ; \; y = Y + \beta$$

essa si riduce alla forma:

$$aX^2 + 2bXY + cY^2 + 2X(a\alpha + b\beta + d) + 2Y(b\alpha + c\beta + e) + \\ + f(\alpha, \beta) = 0 .$$

Ora se si possono determinare α e β in modo che:

$$\begin{cases} a\alpha + b\beta + d = 0 \\ b\alpha + c\beta + e = 0 \end{cases}$$

l'equazione assume l'aspetto:

$$aX^2 + 2bXY + cY^2 + f(\alpha, \beta) = 0 \qquad (2)$$

che è l'equazione di una curva simmetrica rispetto all'origine delle coordinate, dato che, mancando in essa i termini di 1° grado, essa è soddisfatta insieme dal punto (x, y) e dal punto $(-x, -y)$.

La determinazione di α, β è possibile soltanto se

$$F = ac - b^2 \neq 0 ,$$

nel qual caso le coordinate del centro di simmetria della curva sono date dalle formule:

$$\alpha = \frac{be - dc}{ac - b^2} = \frac{D}{F} \qquad \beta = \frac{bd - ae}{ac - b^2} = \frac{E}{F} .$$

Allora, se $f' = f(\alpha, \beta) = 0$, la (2) si riduce alla forma omogenea e rappresenta quindi una *coppia di rette distinte*, poichè $F \neq 0$; inversamente, data una coppia di rette distinte, la loro equazione complessiva risultando dal prodotto di 2 forme lineari è un'equazione di 2° grado della forma (1) riducibile con la traslazione alla forma (2), nella quale però dovrà essere 0 il termine noto cioè: $f' = f(\alpha, \beta) = 0$, dato che per una coppia di rette distinte il centro di simmetria coincidente col loro punto comune appartiene alla linea.

Possiamo quindi enunciare il seguente criterio:

Digitized by Google

Criterio 1° - *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la (1) rappresenti una coppia di rette distinte è che essendo:* $F = ac - b^2 \neq 0$, *si abbia pure:* $f' = f(\alpha, \beta) = 0$, *essendo* α, β *la soluzione del sistema:*

$$\begin{cases} ax + by + d = 0 \\ bx + cy + e = 0. \end{cases}$$

2) *Riferimento della curva ad un sistema di assi paralleli agli eventuali assi di simmetria della curva.*

Data l'equazione (1), mediante la rotazione:

$$\begin{cases} x = \overline{X}\cos\alpha - \overline{Y}\,\text{sen}\,\alpha \\ y = \overline{X}\,\text{sen}\,\alpha + \overline{Y}\cos\alpha \end{cases}$$

essa si riduce alla forma:

$$(3) \qquad a'\overline{X}^2 + 2b'\overline{X}\,\overline{Y} + c'\overline{Y}^2 + 2d'\overline{X} + 2e'\overline{Y} + f = 0$$

essendo:

$$\begin{aligned} a' &= a\cos^2\alpha + 2b\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha + c\,\text{sen}^2\alpha \\ b' &= 2(c-a)\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha + 2b(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha) \\ c' &= a\,\text{sen}^2\alpha - 2b\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha + c\cos^2\alpha \\ d' &= d\cos\alpha + e\,\text{sen}\,\alpha \\ e' &= -d\,\text{sen}\,\alpha + e\cos\alpha\,. \end{aligned}$$

Se ora si sceglie α in modo che il nuovo coefficiente b' sia nullo cioè in modo che: $(c-a)\,\text{sen}\,2\alpha + 2b\cos 2\alpha = 0$ ovvero:

$$(4) \qquad \text{tang}\,2\alpha = \frac{2b}{a-c}$$

l'equazione (3) diventa:

$$(5) \qquad a'\overline{X}^2 + c'\overline{Y}^2 + 2d'\overline{X} + 2e'\overline{Y} + f = 0\,.$$

L'equazione (4) ha sempre soluzione qualunque sieno a, b, c; se $a = c$, $b = 0$ essa ha infinite soluzioni (caso della circonferenza).

Osserviamo ora che si ha:

$$\begin{cases} a' + c' = a + c \\ a' - c' = (a-c)\cos 2\alpha + 2b\,\text{sen}\,2\alpha \end{cases}$$

Digitized by Google

ovvero per la (4):

$$\begin{cases} a' + c' = a + c \\ a' - c' = \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2} \end{cases}$$

da cui ancora:

$$\begin{cases} a' + c' = a + c = I \\ a'c' = ac - b^2 = F. \end{cases}$$

Quindi a', c' sono le radici dell'equazione:

$$z^2 - Iz + F = 0.$$

Distinguiamo ora 3 casi:

1°. $F > 0$: a' e c' hanno ugual segno, per cui l'equazione data con una traslazione e una rotazione si riduce alla forma:

$$a'\overline{X}^2 + b'\overline{Y}^2 + f(\alpha, \beta) = 0$$

che rappeesenta un *ellisse.*

2°. $F < 0$: a' e c' hanno segno contrario e quindi l'equazione data colle 2 trasformazioni assume l'aspetto:

$$a'\overline{X}^2 - b'\overline{Y}^2 + f(\alpha, \beta) = 0$$

che è l'equazione di un'*iperbole.*

3°. $F = 0$: una delle radici dell'equazione in z è 0, per cui l'equazione dopo la rotazione diventa:

$$c'\overline{Y}^2 + 2d'\overline{X} + 2e'\overline{Y} + f = 0 \qquad (6)$$

ovvero:

$$a'\overline{X}^2 + 2d'\overline{X} + 2e'\overline{Y} + f = 0.$$

Ora se $d' = 0$ nella prima delle precedenti ovvero $e' = 0$ nella seconda le equazioni (6) assumono rispettivamente una delle forme:

$$c'\overline{Y}^2 + 2e'\overline{Y} + f = 0$$
$$a'\overline{X}^2 + 2d'\overline{X} + f = 0$$

che, come si sa, rappresentano una coppia di rette parallele o eventualmente coincidenti; inversamente, data una coppia di rette parallele o eventualmente coincidenti, la loro equazione complessiva, essendo il prodotto di 2 forme, lineari in

Digitized by Google

x y del tipo:

$$ax + by + c = 0$$
$$ax + by + c' = 0$$

ha la forma:

$$(ax + by)^2 + (ax + by) \cdot (c + c') + c \cdot c' = 0,$$

nella quale si ha $F = 0$; ad essa si può applicare la rotazione di assi che porta l'asse x ovvero l'asse y parallelo ad un asse di simmetria e ridurla quindi ad una delle forme (6), nelle quali forme dovrà essere allora: $d' = 0$ ovvero $e' = 0$, poichè, essendo l'asse di simmetria la bisettrice della striscia formata dalle due rette parallele, se sono distinte, o la retta stessa se le 2 rette coincidono, l'asse x o l'asse y rispettivamente deve essere parallelo alla direzione delle due rette e perciò nella loro equazione deve mancare una coordinata.

Si può dunque enunciare questo secondo criterio più generale:

Criterio 2° - *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la (1) rappresenti una conica dei tipi sotto elencati è che, eseguendo la traslazione degli assi che porta l'origine nell'eventuale centro di simmetria, o la rotazione che rende uno degli assi parallelo ad un asse di simmetria, sieno soddisfatte le seguenti condizioni:*

a) *ellisse:* $F > 0$; $f' = f(\alpha, \beta) \neq 0$

b) *iperbole:* $F < 0$; $f' = f(\alpha, \beta) \neq 0$

c) *parabola:* $F = 0$; $d' \neq 0$ ovvero $e' \neq 0$

d) *coppia di rette distinte:* $F \neq 0$; $f' = f(\alpha, \beta) = 0$

e) *coppia di rette parallele o coincidenti:*

$$F = 0 \ ; \ d' = 0 \text{ ovvero } e' = 0$$

essendo α, β le coordinate del centro di simmetria e d', e' le metà dei nuovi coefficenti della x o della y ottenuti colla rotazione che porta l'asse x o l'asse y rispettivamente parallelo all'asse di simmetria.

§ 3 - Nota.

È facile osservare che le condizioni ora trovate necessarie e sufficienti affinchè la (1) rappresenti una coppia di

Digitized by Google

rette corrispondono alla condizione più generale data comunemente che " *affinchè la (1) rappresenti una coppia di rette è necessario e sufficiente che sia nullo il determinante:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

che si chiama " *discriminante della conica* „

Infatti:

a) nel caso $F \neq 0$ si ha:

$$f' = f(\alpha, \beta) = \alpha(a\alpha + b\beta + d) + \beta(b\alpha + c\beta + e) + d\alpha + e\beta + f =$$
$$= \frac{dD + eE + fF}{F} = \frac{\Delta}{F}$$

onde l'annullarsi di $f(\alpha, \beta)$ coincide con l'annullarsi di Δ.

b) nel caso $F = 0$ si ha invece:

$$d' = d\cos\alpha + e\,\text{sen}\,\alpha$$
$$e' = -d\,\text{sen}\,\alpha + e\cos\alpha$$

dove α è dato in generale dall'equazione:

$$b\,\text{tang}\,2\alpha + (a - c)\,\text{tang}\,\alpha - b = 0 \qquad (7)$$

che si deduce dalla (4) esprimendo tang 2α in funzione di tang α.

Nel caso $F = 0$, risolvendo la (7) si ottiene:

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{c - a \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2b} = \frac{c - a \pm \sqrt{(a+c)^2}}{2b} =$$
$$= \frac{c - a \pm (a + c)}{2b} = \begin{cases} \dfrac{c}{b} \\ -\dfrac{a}{b} \end{cases}$$

Quindi scegliendo per tang α la prima o la seconda delle 2 radici trovate, si annulla rispettivamente c' ovvero a' ed inoltre si ha:

$$d' = d\cos\alpha + e\,\text{sen}\,\alpha = \frac{db - ae}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{E}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
$$e' = -d\,\text{sen}\,\alpha + e\cos\alpha = \frac{be - dc}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{D}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Digitized by Google

Queste formule dimostrano che l'annullarsi di d' ovvero di e' coincide rispettivamente con l'annullarsi di E o di D e per conseguenza, essendo $F = 0$, di D o di E ed infine di Δ.

§ 4 - **Esempi.**

Esempio 1°.

1) *Equazione data:*

$$3x^2 + 6xy + 5y^2 - 12x - 18y - 24 = 0$$

2) *Determinazione coordinate centro:*

$$\begin{cases} 3\alpha + 3\beta - 6 = 0 \\ 3\alpha + 5\beta - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{3}{2}$$

3) *Equazione riferita al centro:*

$$3X^2 + XY + 5Y^2 - \frac{81}{2} = 0$$

essendo:

$$f' = f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = -\frac{\Delta}{F} = -\frac{243}{6} = -\frac{81}{2}$$

$\Delta \neq 0$, quindi: *conica non degenere*

$F = 6 > 0$, quindi: *ellisse.*

4) *Angolo di rotazione degli assi:*

$$\text{tang } 2\alpha = \frac{5}{3-5} = -3 \; ; \; \alpha = 54^\circ \; 13' \ldots .$$

5) *Formule di rotazione:*

$$x = \frac{\bar{X}}{2}\sqrt{\frac{10-\sqrt{10}}{5}} - \frac{\bar{Y}}{2}\sqrt{\frac{10+\sqrt{10}}{5}}$$

$$y = \frac{\bar{X}}{2}\sqrt{\frac{10+\sqrt{10}}{5}} + \frac{\bar{Y}}{2}\sqrt{\frac{10-\sqrt{10}}{5}}$$

6) *Equazione riferita ai propri assi:*

Essendo l'equazione in z: $z^2 - 8z + 6 = 0$

da cui: $$z = 4 \pm \sqrt{10},$$

Digitized by Google

ed assumendo:

$$\begin{cases} a' = 4 + \sqrt{10} \\ c' = 4 - \sqrt{10} \end{cases}$$

si ha:

$$\frac{\bar{X}^2}{\frac{81}{8+2\sqrt{10}}} + \frac{\bar{Y}^2}{\frac{81}{8-2\sqrt{10}}} = 1$$

Esempio 2°.

1) *Equazione data:*

$$x^2 + 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0 .$$

Essendo $F = 1 - 1 = 0$ la conica ***non è a centro.***

2) *Angolo di rotazione degli assi:*

$$\operatorname{tang}^2 \alpha - 1 = 0$$

$$\operatorname{tang} \alpha = \pm 1 \; ; \; \alpha = \begin{cases} 45° \\ 135° \end{cases} .$$

3) *Formule di rotazione:*

Scegliendo per tang α il valore 1 si ha:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\bar{X} - \bar{Y}) ; \qquad y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\bar{X} + \bar{Y}) .$$

4) *Equazione riferita ad un sistema avente l'asse* **y** *parallelo all'asse di simmetria:*

Essendo l'equazione in z: $z^2 - 2z = 0$ da cui $z_1 = 0, z_2 = 2$ e scegliendo $a' = 2, c' = 0$, si ha: $a' = 2$; $c' = 0$; $a' = \sqrt{2}$; $e' = 0$; $f' = f = -2$.

Quindi l'equazione ridotta è: $2\bar{X}^2 + \sqrt{2}\bar{X} - 2 = 0$ equazione che rappresenta le 2 rette

$$\bar{X} = \frac{\sqrt{2}}{2} \; ; \; \bar{X} = -\sqrt{2}$$

parallele all'asse $\bar{Y}$.

Le equazioni delle 2 rette riferite al primitivo sistema di assi sono:

$$x + y - 1 = 0$$
$$x + y + 2 = 0$$

Genova, Giugno 1929 - VII

Digitized by Google

Del numero delle soluzioni intere e positive dell'equazione: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$

TELESIO VOLPE-RINONAPOLI (Livorno)

In questa breve nota stabilisco in modo nuovo e con semplici considerazioni elementari la formula:

$$\varphi_{n,k} = \binom{k-1}{n-1} \ldots . \text{con } n \leq k, \ldots . \qquad (1)$$

che dà il numero $\varphi_{n,k}$ delle soluzioni intere e positive della equazione:

$$x_1 + x_2 + \ldots . + x_n = k \ldots . \qquad (2)$$

È noto che il numero delle soluzioni intere e positive o nulle della (2) è dato dal numero delle combinazioni con ripetizione di n elementi presi a k a k ossia da:

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Indichiamo in generale con $\varphi_{r,k}$ il numero delle soluzioni intere e positive dell'equazione:

$$x_1 + x_2 + \ldots . + x_r = k$$

e osserviamo che tra le $\binom{n+k-1}{k}$ soluzioni intere e positive o nulle della (2) quelle che contengono un valore nullo di una sola prefissata incognita sono in numero di $\varphi_{n-1,k}$ e quindi tutte le soluzioni contenenti un valore nullo di una sola qualsiasi delle x sono in numero di:

$$n\varphi_{n-1,k} .$$

Analogamente è $\binom{n}{2} \varphi_{n-2,k}$ il numero delle soluzioni intere e positive o nulle della (2) contenenti due soli valori

Digitized by Google

nulli delle x ecc.... $\binom{n}{n-2}\varphi_{2,k}$, $\binom{n}{n-1}\varphi_{1,k}$ il numero di quelle contenenti solo $n-2$, $n-1$ valori nulli delle x. Si ha pertanto:

$$\varphi_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} - n\varphi_{n-1,k} - \binom{n}{2}\varphi_{n-2,k} - \dots - \binom{n}{n-2}\varphi_{2,k} - \binom{n}{n-1}\varphi_{1,k}.$$

Ora la nota formula:

$$\binom{u+v}{k} = \binom{u}{0}\binom{v}{k} + \binom{u}{1}\binom{v}{k-1} + \dots + \binom{u}{k-1}\binom{v}{1} + \binom{u}{k}\binom{v}{0}$$

ci dà successivamente, ponendo in luogo di u, v, k rispettivamente: n, $k-1$, $n-1$:

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n}{0}\binom{k-1}{n-1} + \binom{n}{1}\binom{k-1}{n-2} + \dots + \binom{n}{n-2}\binom{k-1}{1} + \binom{n}{n-1}\binom{k-1}{0}$$

ed:

$$\binom{k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k} - n\binom{k-1}{n-2} - \dots - \binom{n}{n-2}\binom{k-1}{1} - \binom{n}{n-1}\binom{k-1}{0} \dots \quad (4)$$

Supposto che la formula (1) sia vera per tutti i numeri interi n da 1 fino ad $n-1$ dalla (3) si trae:

$$\varphi_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} - n\binom{k-1}{n-2} - \dots - \binom{n}{n-2}\binom{k-1}{1} - \binom{n}{n-1}\binom{k-1}{0}$$

e quindi dalla (4):

$$\varphi_{n,k} = \binom{k-1}{n-1}$$

Dal principio d'induzione e dall'essere evidentemente:

$$\varphi_{1,k} = 1 = \binom{k-1}{1-1}$$

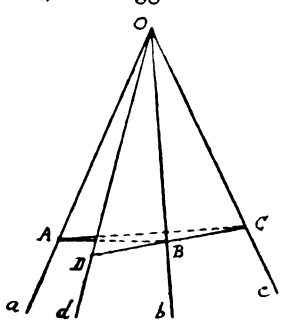
segue che la (1) è vera per ogni $n \leq k$.

Digitized by Google

PICCOLE NOTE

Una nuova dimostrazione del teorema che in ogni triedro ciascuna faccia è minore della somma delle altre due

Premesso, al solito, che il teorema è evidente per ogni faccia di un triedro *non maggiore* di una (almeno) delle due rimanenti e che perciò basterà limitare la dimostrazione ai triedri che hanno una delle tre facce *maggiore* di ciascuna delle altre due e, s'intende, soltanto a questa faccia maggiore, sia *abc* uno di questi triedri e sia, per esempio, *ac* la faccia maggiore.



Se la somma delle due facce ab, bc non è minore di un angolo piatto il teorema è evidente, perchè ogni faccia è minore di un angolo piatto. Supponiamo perciò che la somma delle due facce suddette sia un angolo convesso. Nel prolungamento del semipiano avente per origine la retta b e contenente la semiretta c, facciamo uscire per O la semiretta d in modo che l'angolo bd risulti eguale all'angolo ba. Se fissiamo ora a caso i punti C, D rispettivamente sulle semirette c, d il segmento DC incontra la semiretta b in un punto B perchè i punti C, D giacciono da parti opposte di b. Prendiamo ora sulla semiretta a il segmento $OA = OD$ e congiungendo i punti A, B consideriamo i due triangoli AOB, DOB. Essi, per costruzione, hanno due lati e l'angolo compreso eguali e quindi risulta $AB = DB$. D'altra parte nel triangolo ABC è $AC < AB + BC$ ovvero, per l'ultima eguaglianza ottenuta, $AC < DB + BC$, e cioè $AC < DC$. Confrontiamo infine i due triangoli AOC, DOC: I due lati OA, OC del primo sono rispettivamente eguali ai due lati OD, OC del secondo e fra i terzi lati sussiste la diseguaglianza $AC < DC$, come abbiamo visto or ora. Analoga diseguaglianza, per un teorema di geometria piana, deve perciò aver luogo fra gli angoli opposti a questi terzi lati, cioè $\widehat{AOC} < \widehat{DOC}$, ovvero $\widehat{AOC} < \widehat{DOB} + \widehat{BOC}$ e quindi:

$$\widehat{AOC} < \widehat{AOB} + \widehat{BOC}$$

perchè i due triangoli AOB, DOB, come abbiamo detto avanti, sono eguali.

Il teorema è in tal guisa dimostrato.

Alberto La Barbera
(Palermo)

Digitized by Google

CORRISPONDENZA

Preg.mo Sig. Prof. Conti

Lessi l'art. del prof. MARENGONI e quello della prof.ssa CLARKE (*Bollettino*, fasc. II, 1929). Rispetto al primo Le comunico che la dimostrazione del MARENGONI trovasi nell'Art. di A. DURAND « Une demonstr. simples des formules de addition en trigonometrie » (*La Revue de l'enseignement des sciences* a. I, n. 2, p. 37, 1907, Paris) (1). E quanto all'altro debbo dire che cercai invano qualche proposizione *sui vincoli dei metodi classici costruttivi delle radici di un'equazione quadratica.*

Mi consenta dunque poche considerazioni di complemento che non si trovano in altri autori.

Già l'Art. del prof. E. ARTOM « Le equazioni di 2° grado presso i greci » (*Period. di Matem.* n. 4, 1922, Bologna) suggerisce che i Pitagorici, EUCLIDE, etc. costruivano le radici di equazioni delle forme geometriche $x(b-x)=c^2$, $x(b+x)=c^2$, $x(x-b)=c^2$. Talchè il cosidetto *metodo di* FRANCOEUR (CLARKE, p. 55), interpretazione geometrica della 1ª e 3ª delle equazioni scritte, rimonta forse ai Pitagorici nella sostanza: lo chiamerei meglio *metodo della tangente e della secante al cerchio* in quanto nel processo costruttivo si adoperano quelle rette così denominate rispetto ad un cerchio.

Più che il *metodo generale* (CLARKE p. 54) mi occorre qui citare i due eleganti *metodi di* HEISS-ESCHWEILER (CLARKE p. 58-61, rilevati, come indica l'*A* dell'Art., da MATTIESSEN, 1878, Teubner, Lipsia). Ebbene il *primo metodo* è un caso particolare del *metodo del contorno poligonale rettangolare* (quando sia 2 il grado dell'equazione) (Vedi tal metodo in GHERSI. *Mat. dilett. e curiosa.* p. 242 Hoepli; *Nuove ricerche sulla genesi della sez. aurea*, **Bollettino** fasc. II, 1925). Quanto al *secondo metodo* HEISS-ESCHWEILER (CLARKE p. 61, MATTIESSEN, 1878) noto anzitutto che venne dato (certo per novità) dal Sig. A. MARJON ne *La revue de l'enseign, des sciences* a. II, p. 58, 1908, Paris.

Interessa qui accennare al bellissimo *metodo di* STEINER, non esposto dalla prof.ssa CLARKE, e del quale conosciamo le dimostrazioni elementari date da A. PADOA, E. CANTONI in questo *Bollettino* a. III, n. 1; a. IV, n. 12.

---

(1) *(N. d. D) Il prof. Bellatalla pure ci scrive in proposito, dicendoci che la stessa dimostrazione è già da varî anni nel Testo di Trigonometria del compianto prof. Michele Leoncini (Brescia Tip. Vannini).*

Digitized by Google

Ora tutti questi metodi classici, importantissimi, che son venuto indicando, son vicendevolmente indipendenti? Applicati ad una quadratica generica si presentano esteticamente così differenti che in essi non si scorgono punto vicendevoli legami.

Il che non ci autorizza ad affermare la loro reciproca indipendenza se riusciamo a trovare almeno una quadratica che li renda sostanzialmente uguali. La quadratica esiste appunto ed è l'equazione $x^2 + ax - a^2 = o$ relativa alla divisione aurea di un segmento. Tali metodi, applicati a codesta equazione, forniscono costruzioni generali sulla sez. aurea formanti *gruppo*, cioè sono in vicendevole conseguenza geometrica (Ciò è dimostrato nel mio lavoro sulla sez. aurea dianzi accennato). Talchè, in base a quanto precede, possiamo enunciare la seguente proposizione di notevole valore critico.

Il metodo generale, il metodo della tangente-secante al cerchio (EUCLIDE, FRANCOEUR,...), *il metodo del contorno poligonale rettangolare per una quadratica* (*1° metodo detto di* HEISS-SCHWEILER), *il 2° metodo di* HEISS-SCHWEILER (MARJON), *il metodo di* STEINER *relativi alla costruzione delle radici di un'equazione quadratica si riducono sostanzialmente uguali almeno nel caso de l'equazione della divisione aurea.*

Aggiungo anche che l'idea di sostituire il cerchio alla parabola nei metodi che si servono delle coordinate, non è nuova come forse lascia intravedere una recensione dell'Art. di N. GAMBETTA « I metodi della geom. anal. per la discussione dei problemi di 2° grado » (*Annuario* Liceo di Matera, 1926) Cfr. *Giornale di Mat. e Fisica della S. M.* p. 127, 1928. Codesti problemi si possono discutere col metodo di HEISS-SCHWEILER-MARJON che adopera il cerchio, è applicabile ad ogni equazione, è elementare ed ha connessione col metodo della geom. anal. che adopera il cerchio.

Altre procedure secondarie per la costruzione delle radici: R. BERARD *La revue etc* p. 208, 1908; A. SAITE-LAGÜE *id,* 1911; etc. Con metodi fisici: CAVALLARO *Boll. di Mat. e sc. Fisiche e Nat.,* 1915; S. MARCUCCI, *Riv. di Matem. pura,* Agrigento, 1929. Per ragioni di spazio ometto altre considerazioni di natura critica.

Gradisca, pregiato professore Conti, l'espressione de la mia stima e i miei cordiali e affettuosi saluti

Cefalù, luglio 1929 - VII.

Suo Dev.mo
V. G. CAVALLARO

Digitized by Google

Temi di matematica proposti in vari concorsi per le scuole medie (1) (1907 - 1929)

1. - Il candidato indichi i vari modi che si sono proposti per introdurre nell'aritmetica il concetto di numero frazionario.

Quali fra questi ritiene egli scientificamente e logicamente preferibile? Quale adotterebbe dal punto di vista pratico e didattico in una scuola media inferiore? (anno 1907),

2. - Esporre alcuni dei metodi più usati per la risoluzione dei problemi geometrici applicandoli a qualche esempio (anno 1907).

3. - La teoria della misura in geometria (anno 1907).

4. - Esponga il candidato come e a qual punto dell'insegnamento della geometria nel ginnasio creda opportuno trattare delle parallele, e dopo aver brevemente accennato al modo di svolgere l'argomento nella scuola, aggiunga, se crede, quanto sa intorno alle varie teorie che vi si riferiscono (anno 1908).

5. - I numeri irrazionali (anno 1909).

6. - L'eguaglianza, la congruenza, la simmetria (anno 1909).

7, - L'estensione del concetto del numero prendendo occasione dalle operazioni inverse dell'addizione, della moltiplicazione, dell'innalzamento a potenza (anno 1909).

8. - La teoria dell'equivalenza (anno 1909).

9. - Teoria delle grandezze direttamente (ed inversamente) proporzionali deducibili dalla trattazione di varie classi di questioni d'aritmetica e di geometria.

10. - Unità immaginaria e numeri complessi. Vantaggi principali che la loro introduzione ha arrecato in varie parti della matematica. Entro quali limiti sia da discorrerne nell'insegnamento liceale. Facoltativamente accennare a qualche ulteriore generalizzazione del concetto di numero complesso.

11. - Il candidato dimostri, facendo uso delle sole teorie

---

(1) (N. d. D.) Nel pubblicare questa Raccolta da lungo tempo desiderata, esprimiamo i più vivi ringraziamenti all'illustre prof. Marcolongo che, con la diligenza e la cortesia che Gli sono caratteristiche, si è personalmente occupato di prepararla aggiornata fino agli ultimissimi Temi.

Digitized by Google

geometriche che fanno parte del programma ginnasiale, i teoremi relativi ai rettangoli dei segmenti determinati da una circonfereuza sulle rette condotte per un punto. Ne faccia applicazione alla questione seguente. Siano dati una retta r ed un punto O; detto A un punto qualunque della r e preso sulla OA un punto A' tale che il rettangolo $OA \cdot OA'$ sia equivalente ad un quadrato dato, si determini il luogo del punto A'. Si determini il luogo analogo quando invece della retta r si prende un cerchio.

Facoltativamente il candidato studi la trasformazione definita nella questione precedente (anno 1913).

12. - Dica il candidato come esporrebbe nel suo insegnamento le nozioni fondamentali della teoria delle funzioni circolari ed a prova della sua cultura aggiunga quanto egli conosce intorno a queste funzioni, alle loro proprietà analitiche, ecc.

13. - Grandezze proporzionali. Si espongano gli elementi della teoria illustrando specialmente le definizioni con esempi tratti dalla geometria e dalla fisica.

14. - Potenze con esponente frazionario, con esponente negativo, con esponente irrazionale. Si chiede al candidato non una esposizione completa dell'argomento ordinata a guisa di lezione, ma una serie di sue considerazioni nelle quali i concetti più essenziali e delicati siano logicamente esposti e chiaramente posti in luce. Facoltativamente in seguito egli potrà dare qualche cenno di quanto vi è da aggiungere relativamente all'argomento uscendo dal campo dei numeri reali.

15. - Risolvere il seguente sistema di equazioni.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad , \quad ax^2 + by^2 + cz^2 = u$$
$$(b-c)^2 y^2 z^2 + (c-a)^2 z^2 x^2 + (a-b)^2 x^2 y^2 = v \, ;$$

dove a, b, c, u, v sono numeri reali noti, e discutere la soluzione nella ipotesi $a > b > c$.

A prova della sua cultura il candidato potrà interpretare geometricamente i risultati, considerando ad esempio x, y, z quali coordinati ortogonali di un punto nello spazio, ed u, v quali coordinati di un punto di un piano e studiare la corrispondenza che viene a stabilirsi tra i punti del piano stesso e i punti di una sfera di raggio uno.

(*Concorso istituti nautici* - 1911)

16. - Il concetto di equivalenza per i poliedri limitati da facce piane o da porzione di superficie cilindriche, coniche e sferiche, in relazione al principio di continuità (settembre 1923).

Digitized by Google

17. - Confronto critico fra i vari modi di introdurre i numeri complessi e proprietà fondamentali delle radici n^{me} dell'unità.

18. - La similitudine nello spazio; il candidato esponga inoltre come essa rientri in corrispondenze lineari più generali (sett. 1923).

19. Si riassumano brevemente i più noti ed importanti metodi per la discussione dei problemi di 2° grado. Se ne faccia applicazione al problema di inscrivere in una semiellissi (i cui semiassi sono a, b) un rettangolo di dato perimetro, oppure di area data.

(*Concorso speciale scuole tecniche:* settem. 1923)

20. - In un dato triangolo ABC, O è il piede dell'altezza condotta da C sul lato AB. Si assume O come origine di un sistema di assi di cui AB è l'asse x, OC l'asse y. Siano $(\alpha, 0)$ le coordinate di A, $(\beta, 0)$ quelle di B; (c, h) quelle di C e si consideri il fascio di coniche

$$x^2 + 2\lambda xy - y^2(\alpha + \beta)x + \left(h - \frac{\alpha\beta}{h}\right)y + \alpha\beta = 0.$$

Dimostrare che le coniche sono iperbole equilatere passanti per i vertici del triangolo e per il punto d'intersezione delle altezze del triangolo e poscia trovare il luogo dei centri di queste iperboli.

(*Concorso ginnasi isolati:* marzo 1924).

21. - Sono date le equazioni:

$$x(1 + u^2 + v^2) = 2u, y(1 + u^2 + v^2) = 2v, z(1 + u^2 + v^2) = u^2 + v^2 - 1.$$

Dimostrare che si ha inoltre

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Riguardando x, y, z come coordinate ortogonali di un punto P di una sfera di raggio 1, u e v come coordinate di un punto P_1 sul piano xy, studiare la corrispondenza tra P e P_1 stabita risolvendo le equazioni date rispetto ad u e v.

Si potrà dimostrare che:

1° P e P_1 sono allineati col punto N (1, 0, 0);

2° $NP \cdot NP_1 = 2$;

3° che se P descrive un cerchio sulla sfera, P_1 descriverà sul piano pure un cerchio (o una retta) il cui centro è la proiezione da N del polo del piano del dato cerchio rispetto alla sfera.

(*Concorso spec. ist. medi inf.:* maggio 1924).

22. - Rappresentare graficamente e risolvere algebricamente il sistema

$$y = x^3 - 3x + 2 \quad , \quad x^2 + y^2 - 4y = 4.$$

(*Concorso generale mat. e fisica ist. medi sup.;* maggio 1925).

Digitized by Google

23. Se x, y, z sono espresse mediante le u con le formule

$$(I)\begin{cases} x = 2a\cos u \\ y = a\,(3\cos u - \cos 3u) \\ z = a\,(3\,\text{sen}\,u - \text{sen}\,3u) \end{cases}$$

Dimostrare: 1° che ha luogo la relazione

$$4x^2 + y^2 + z^2 = 16a^2.$$

2° eliminare la u tra la prima e la seconda delle (I) e studiare la relazione ottenuta tra x e y e tracciarne il grafico.

3° interpretare geometricamente i risultati ottenuti.

Si potrà anche studiare la curva le cui equazioni parametriche sono le (I), determinando la tg. in un punto, l'arco da $u = 0$ ad $u = \frac{\pi}{2}$; ecc.

(*Concorso generale mat. scient. ist. medi inferiori;* maggio 1925).

24. Determinare l'equazione dell'evoluta di una parabola di equazione $y^2 = 2px$. Trovare le coordinate dei punti d'incontro di tale evoluta con la parabola e la lunghezza dell'arco di evoluta compreso tra il punto d'incontro con l'asse delle x e il punto d'incontro con la parabola.

(*Concorso speciale mat. e fisica ist. medi superiori;* maggio 1926),

25. - Il candidato dopo aver ricordato i vari modi di rappresentazione, con algoritmi infiniti, dei numeri irrazionali, parli della rappresentazione per frazioni continue, considerando poi, in modo speciale le frazioni continue che rappresentano numeri algebrici positivi e in particolare irrazionali qadratici.

(*Concorso per i combattenti. Istituti medi sup.;* settem. 1925).

26. - Il candidato esponga dal punto di vista analitico, il metodo dei luoghi geometrici e ne faccia poi applicazione al problema di condurre un cerchio per due punti e tangente a un cerchio dato.

(*Concorso generale mat. e fisica istit. medi superiori;* maggio 1926),

27. - Se un punto varia in un piano in modo tale che la tangente (segmento di tangente) condotta da esso ad un cerchio fisso e la sua distanza da una retta fissa abbiano un rapporto costante x, il luogo descritto dal punto è una conica, la quale al variare di x descrive un fascio di coniche bitangenti.

Digitized by Google

Determinare questo fascio e la specie di coniche in esso contenute.

(*Concorso generale mat. scientif. istit. medi inf.*; maggio 1926).

28. - Si consideri la parabola di equazione $y^2 = 2px$ e da un punto P del suo piano si conducano le due tangenti alla parabola per modo che gli angoli α ed α' ch'esse formano coll'asse delle x sono tali che

$$\text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \alpha' = \cos t.$$

Dimostrare che il luogo del punto P, col variare di α e α', è un cerchio.

(*Concorso speciale materie scientifiche, ist. medi inferiori*, 1926).

29. - Si riassumano brevemente i metodi per la ricerca dei massimi e dei minimi delle funzioni di una o due variabili e se ne faccia l'applicazione alla ricerca del parallelepipedo retto di volume massimo e di cui è costante la superficie totale.

(*Abilitazione per materie scient. negli istit. medi inferiori*, 1927).

30. - Dimostrare che:

1° Un fascio di sfere avente per cerchio base il cerchio C è segato da un cono di vertice V e direttrice C in un sistema di cerchi posti in piani paralleli al piano tangente in V alla sfera del fascio che passa per V.

2° Se due cerchi, posti in piani non paralleli, sono prospettivi essi giacciono sulla stessa sfera.

3° Se due cerchi giacciono su di una stessa sfera essi sono prospettivi in due modi diversi ed i centri di prospettività, mentre giacciono nel piano passante per il centro della sfera e per i centri sferici dei due cerchi, sono altresì situati sulla congiungente i vertici dei coni circoscritti alla sfera lungo i due cerchi dati.

(*Concorso speciale matem. e fisica istit. medi superiori*, 1927).

31. - Se x e y sono espresse mediante un parametro t con le formule

$$x = a \cos t \quad , \quad y = a \cos (t - \alpha), \tag{1}$$

in cui a ed α sono costanti. Si chiede

1° di eliminare il parametro t tra le due equazioni (1), di interpretare geometricamente il risultato, considerando in particolare i casi di $\alpha = 0 , \frac{\pi}{2} , \pi$.

2° di trovare i valori di t che rendono massima o minima la funzione

$$x^2 + y^2$$

Digitized by Google

o con considerazioni geometriche, o con opportuuo impiego delle formule di duplicazione degli archi, oppure applicando i metodi generali.

È in facoltà del candidato di trattare le stesse quistioni quando nelle (1) si sostituisce il coseno iperbolico a quello circolare; poscia, assimilando la variabile t al tempo, di assegnare la grandezza e la direzione dell'accelerazione del punto le cui coordinate ortogonali sono espresse dalle (1).

(*Concorso generale mat. scient. istituti medi inf.*, 1928).

32. - Dato un cerchio j di raggio r e una tangente t, trovare il luogo dei punti tali che le tangenti condotte da ciascuno di essi al cerchio, intercettino sulla tangente t un segmento di lunghezza costante $2l$.

Nel caso particolare di $l = r$ la tangente determina con la curva luogo due regioni di cui una certamente chiusa.

Calcolare l'area.

Questa seconda parte è facoltativa.

(*Concorso speciale mater. scient. istit. medi inf.*, 1928),

33. - É dato un piano π ed un punto F non appartenente ad esso. Determinare la superficie S luogo dei punti equidistanti da F e da π. Dimostrare che le sezioni di S con piani non perpendicolari a π si proiettano ortogonalmente su π secondo circoli. Calcolare l'area della calotta determinata sulla S, dal piano passante per F e parallelo a π.

È in facoltà del candidato di rispondere alla seconda questione con considerazioni geometriche.

(*Concorso generale mat. e fisica istit. medi sup.*, 1928).

34. - Si consideri la cubica circolare (cissoide di Diocle)

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x};$$

se ne scrivano le equazioni parametriche assumendo come parametro la cotangente λ dell'angolo dell'asse x col raggio vettore e si provi che la curva è razionale. Indi tenendo presente la relazione

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-2} & \lambda_1^n \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-2} & \lambda_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-2} & \lambda_n^n \end{vmatrix} = (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) D$$

dove D è il determinante di Wandermonde degli n numeri $\lambda_1, \dots \lambda_n$, si trovi la condizione affinchè tre punti della curva siano allineati

Digitized by Google

e quella affinchè quattro punti siano conciclici.

Un cerchio ha in comune con la cissoide generalmente quattro punti, dunque il cerchio osculatore in un punto incontra ulteriormente le curve in un altro punto; trovare questa ulteriore intersezione applicando la condizione affinchè quattro punti della cissoide siano conciclici.

Trovare l'inviluppo delle corde comuni alla curva ed ai cerchi osculatori.

Costruzione della tangente alla cissoide mediante la sottangente, per mezzo di una terza proporzionale.

Determinare l'area compresa fra la curva e l'asintoto, ed il volume del solido limitato dalla superficie descritta dalla cissoide nella rotazione intorno all'asintoto.

Risoluzione del problema di Delo con la cissoide.

(*Concorso speciale mat. e fisica Ist. medi sup*, 1928).

35. - Data la cubica piana di equazione cartesiana ortogonale

$$(x - 12a)^3 + 27a[y^2 + (x - 2a)^2] = 0 \; ; \; a > 0 ;$$

1° dimostrare che la cubica ha un nodo nell'origine delle coordinate e determinarne le tangenti;

2° considerando il fascio di rette $y = tx$ avente il centro nel nodo trovare l'equazione parametrica della cubica;

3° determinare la lunghezza dell'arco di curva compresa tra $t = 0$ ed il valore generico del parametro t;

4° precisare i valori di t lungo il ramo reale della curva;

5° calcolare la lunghezza del cappio, ponendo $a =$ cm. 10,6;

6° calcolare il volume quando il cappio ruota intorno l'asse x;

7° Determinare eventualmente i flessi della cubica e le relative tangenti.

(*Abilitazione in matem. istituti medi inferiori*, 1929).

36. - È data una ellissi le cui equazioni parametriche sono $x = a \cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$ $(a > b)$. Si consideri la linea per i cui punti sia $x \geq 0$ e l'asse minore; si chiede d'inscrivere in essa una circonferenza col centro sull'asse delle x. Più precisamente la circonferenza deve essere tangente all'asse y e deve toccare internamente l'ellissi.

Determinare il raggio r ed il valore del parametro t nei punti di contatto, discriminando i casi in cui i punti di contatto si riducono ad uno solo. Costruire graficamente r.

É lasciata facoltà al candidato di ricercare il valore di a che rende massimo r nell'ipotesi che $a + b$ abbia il valore costante λ.

(*Concorso matem. e fisica istituti medi sup.*; 1929).

Digitized by Google

NECROLOGIO

BINDONI ANTONIO

(del R. Istituto Tecnico di Reggio Emilia)

n. a Treviso il 7 febbraio 1879 m. a Reggio Emilia il 17 dicembre 1928

Laureatosi, con pieni voti e lode, in matematica pura nella R. U. di Padova nel 1902, vinceva subito un concorso per un posto di perfezionamento presso la stessa Università di Padova; e, dopo tre anni di insegnamento in scuole medie non governative, entrava, dal 1905, nei ruoli dei professori delle Scuole medie governative, per effetto di un concorso generale, per titoli ed esami, sostenuto nel 1904, per cattedre dei RR. Ginnasi, concorso nel quale era classificato 2° con 97/100. Nel 1909 sosteneva un altro concorso generale, per titoli ed esami, per cattedre di matematica dei RR. Istituti Tecnici, venendovi classificato 2° con 189/210 e per effetto di questo concorso passava nel ruolo dei professori degli Istituti Tecnici, con destinazione a Modena prima, e poi a Reggio Emilia ove rimase poi sempre, e dove, dopo la Riforma Gentile, assunse anche l'insegnamento della fisica.

Da un Elenco del 1919 desumesi che, fino a quell'anno, erano già 19 le sue pubblicazioni, varie delle quali apparse su questo Bollettino, quasi tutte di indole algebrica e relative ad argomenti delicati, come il concetto di numero e i vari metodi per la trattazione dei numeri reali, su cui pubblicò una Memoria apposita « Q_0 ».

Certo è che sulle pubblicazioni del Bindoni si era fermata l'attenzione degli studiosi, e questi si rammaricarono della sospensione sopravvenuta nella sua attività scientifica: dal 1919 al 1923, la sospensione fu dovuta ad un forte disinganno di cui Egli patì, e a ragione si dolse, in un concorso speciale, per soli titoli, che avrebbe dovuto procurargli il passaggio a una sede primaria (c'era ancora una distinzione fra sedi primarie e secondarie e c'erano degli ingenui che partecipavano ai concorsi) riuscì vincitore, ma 21° con 49 su 60 ed essendo 24 le cattedre messe a concorso, non potè così avere una di quelle a cui più ambiva; e dal 1923 in poi, la sospensione d'ogni sua attività scientifica fu una conseguenza dell'aggravio che piombò anche sul povero Bindoni coll'insegnamento della fisica che, ipso-facto, dovè addossarsi.

Digitized by Google

RODOLFO VITI

(del R. Liceo Scientifico di Bologna)

n. a Bologna l'11 settembre 1874 m. a Bologna l'8 febbraio 1929

Laureatosi in matematica pura nella R. U. di Bologna, nel 1898, insegnò subito nel R. Istituto Tecnico di Bologna, dapprima come supplente e poi come insegnante di ruolo ininterrottamente fino al 1923 nel quale anno, in seguito alla Riforma Gentile restò a Bologna; ma dovè passare al R. Liceo Scientifico ed assumere anche l'insegnamento della fisica. Fu anche insegnante di scienza attuariale nel corso che, in seguito alla sua attiva propaganda, fu istituito dalla Camera di Commercio di Bologna.

Una caratteristica del Viti fu una grande versatilità, anzi, pure professando una materia scientifica, ebbe una spiccata inclinazione alle lettere e alle arti, e fu conferenziere brillante ed articolista fecondo, che alimentò della sua opera tutti i principali periodici della regione emiliana.

Coprì numerose cariche, disimpegnando con zelo gli uffici conferitigli.

Partecipò intensamente alla vita politica della città di Bologna, militando nelle file della democrazia, onde in questi ultimi anni rappresentava un periodo storico tramontato, ma la sua gioventù d'animo lo aveva posto in grado di comprendere e secondare gran parte del movimento politico e sociale determinato dal nuovo orientamento della giovinezza fascista, tanto più che durante la guerra, Egli, in nome delle idealità mazziniane che prediligeva, era stato uno strenuo assertore dei diritti dell'Italia.

Dal *Resto del Carlino* del 9 febbraio abbiamo altresì appreso che « Egli appartenne, come alto dignitario, alla Massoneria, ma negli ultimi « anni della sua vita una crisi di coscienza lo aveva ricondotto alle pure « idealità religiose del cattolicismo, dandone anche pubblica prova con « articoli sulla vita di San Luigi, sulla S. Eucarestia e su altri argomenti « del genere, alcuni dei quali poterono trovare ospitalità nelle colonne « del giornale cattolico « *L'Avvenire d'Italia* ». La Chiesa può così vantare un altro successo della fede immortale da Essa custodita e noi, compiacendoci della conversione, confidiamo nella misericordia di Dio per l'anima del compianto collega.

I funerali, religiosi, che ebbero luogo il 9 febbraio, si svolsero con un imponente concorso di autorità, personalità e cittadini di ogni classe e categoria: notiamo la presenza dei professori universitari Pincherle, Flora, Tonelli, Errera, ecc.

Un anno fa, al Congresso Internazionale Matematico, avevamo ammirato l'arte spiegata dal Viti nel riassumere, di giorno in giorno, le cose più salienti dei lavori del Congresso, in articoli che comparivano nei due quotidiani bolognesi, e che erano letti con interesse da tutti i congressisti, anche dagli stranieri. Non avremmo davvero creduto di doverne, a così poca distanza, commemorare la perdita!

Digitized by Google

UMBERTO CONCINA

(del R. Liceo di Spezia)

n. a Venezia nel 1875 m. a Borgotaro il 15 agosto 1929

Laureatosi in matematica pura nella R. U. di Bologna, nel 1898, fu assistente del prof Enriques, e ne raccolse diligentemente le Lezioni di Geometria Descrittiva in un volume pubblicato dalla Casa Ed. Zanichelli. Nel 1899 vinse un concorso su un tema « La Geometria della riga a due orli paralleli » proposto dal Bollettino di Matematica e di Scienze Fisiche e Naturali, un altro nostro periodico la cui fondazione precedè di due anni il presente Bollettino. Fu presto insegnante di scuola media, ad Asti, per varî anni, e poi al Liceo di Spezia, ove dopo la Riforma Gentile, aveva assunto anche l'insegnamento della fisica. Egli fu anzi uno dei pochissimi insegnanti, che accolsero con entusiasmo l'abbinamento dei due insegnamenti, e certo si diede con lena anche al nuovo insegnamento.... Un suo Collega ci diceva che in questi ultimi tempi, pur non essendosi scosse le sue convinzioni sull'opportunità dell'abbinamento, Egli sentiva tutto il peso delle 22 ore... delle 8 classi... degli sbalzi continui da una classe di ginnasio inferiore a una di liceo.... da una lezione d'aritmetica pratica alla preparazione d'un'esperienza d'ottica o di elettricità.

Solenni e commoventi sono riuscite le onoranze funebri rese, a Spezia, alla salma lacrimata, con un larghissimo stuolo di amici, conoscenti e discepoli e numerose rappresentanze di scuole medie e di Associazioni. Dopo che hanno parlato il preside prof. Leonardo Bruni e l'Ammiraglio Profumo, presidente del Patronato Scolastico di cui il Concina era solerte ed intelligente amministratore, il Capo dell'Ufficio Stampa della Fed. Prov. Fascista in rappresentanza del Segretario federale ha fatto l'appello del defunto cui tutti hanno risposto con voce forte e sicura: « *Presente* »!

Tre tombe innanzi tempo schiusesi, tre Colleghi scomparsi, ognuno dei quali avrebbe potuto, per altri dieci anni almeno, rendere utili servigi alla Scuola, alla Patria! È verità che da qualche tempo si è intensificata la mortalità dei professori di matematica e fisica delle Scuole medie e che, vuoi per dimissioni, vuoi per anticipati collocamenti in pensione, vuoi per passaggi ad altri ruoli, vuoi per mortalità, la Scuola italiana va perdendo degli Uomini di valore autentico, nè i vuoti appaiono facilmente colmabili. Non che scarseggino in quantità, concorrenti per le cattedre, d'anno in anno, poste a concorso, nè il genio di nostra gente si estingue, bensì ancora nelle Scuole medie e nelle Università vanno maturandosi elettissimi ingegni dai quali la scienza avrà importanti contributi: questi però, o non toccano affatto come docenti, le soglie della Scuola media, o ne spiccano subito il volo per più spirabile aere.... perchè se già poco attraeva, adesso attrae sempre di meno questa Scuola media, che tuttavia è di importanza fondamentale per l'avvenire della Nazione.

Ond'è che, pur ascoltando il monito che viene da queste tombe prematuramente schiusesi, rivolgiamo un vivo appello, che non è il primo, a Chi ha la responsabilità suprema della pubblica istruzione, perchè non tardino di più quei provvedimenti che possono contribuire a temperare, almeno, le più dure conseguenze della riforma Gentile.

Digitized by Google

Ma a Te, Giovanni Gentile, a Te particolarmente mi rivolgo: ricordo troppo bene quando sedemmo insieme nella Giunta del C. S. per l'istruzione primaria e popolare ove ci trovammo sempre concordi nella difesa delle cause giuste!...; e ricordo ancora il valido appoggio da Te dato alla mia proposta di un prestito per la Scuola, in tempi nei quali, ci voleva una buona dose di coraggio civile ad avanzare simili proposte!... e so bene che dinanzi alla proposta d'un orario di 24 ore settimanali per l'insegnamento di matematica e fisica della Scuola classica, proposta che pur ti veniva avanzata dal Presidente della Mathesis, Tu avesti la sensazione dell'aggravio insopportabile che ne sarebbe derivato, e non volesti che pel ginnasio e liceo classico si oltrepassassero le 22 ore....

Ma ora Tu ti sei persuaso che anche quest'orario è eccessivo, e dilla dunque, in sede competente, la parola che i Colleghi meritano per la perfetta disciplina posta nell'applicare la tua Riforma.... dilla la parola, che basterà a vincere le ultime resistenze e a ridonare la tranquillità ai Colleghi, tra cui più di uno ti è stato affezionato compagno di studi universitari, e pur normalistici, in quella gloriosa Scuola Normale di Pisa, a cui Tu stai dando nuova rigogliosa vita.

Gli sgravi fiscali ultimamente decisi dal Governo Nazionale attestano della solidità del Bilancio dello Stato, solidità che può consentire la spesa di quei pochi milioni necessari per risolvere, con un aumento nel numero delle cattedre, la questione che da sei anni si trascina.

Dopo aver legato il Tuo nome, in modo imperituro, ad una riforma, certamente la più fascista tra tutte le riforme, per lo spirito che l'animò, lega pure il Tuo nome ad un provvedimento umanitario, di carattere integrativo, che, senza scuotere affatto i principi fondamentali della Tua riforma, valga a porre anche i docenti di matematica in condizione di cooperare coi Colleghi delle altre discipline pel conseguimento migliore di tutti gli scopi che Tu ti prefiggesti!

S. Terenzo (Spezia) 29 agosto 1929

ALBERTO CONTI

Ed ancora un gravissimo lutto colpiva la Scienza e la Scuola il 19 agosto, colla perdita, quasi improvvisa, di

CARLO ROSATI

Prof. di Geometria nella R. Università di Pisa

Di Lui, dell'opera Sua scientifica e didattica parleremo nel prossimo fascicolo: oggi ci limitiamo a rivolgere il più reverente pensiero alla memoria dell'amico valoroso e caro, e a deporre tutte le nostre lacrime ai piedi della madre — mater dolorosa — dell'estinto: Iddio che vedeva quanto amore legasse il povero Carlo alla Sua mamma, volle che Egli non avesse il dolore di sopravviverle bensì il conforto supremo della Sua benedizione e del Suo bacio.

La bontà, la dolcezza del povero Carlo ben meritavano da Dio un tale premio: fiat!

S. Terenzo 1 settembre 1929

A. CONTI

Digitized by Google

CARLO ROSATI

(1876 - 1929)

Digitized by Google

Digitized by Google

In memoria di Carlo Rosati

Parole pronunziate dal

Prof. PUCCIANTI LUIGI della R. Università di Pisa

dinanzi al feretro del prof. Carlo Rosati

Forse tutti voi, che l'annunzio di questo improvviso lutto ha chiamati, pietà ha sospinti e raccolti in questo luogo sacro alla Sapienza e alla Patria, forse tutti avete presente allo spirito la nobile e serena figura dell'uomo, che precocemente, crudelmente la morte ha rapito ai nostri occhi mortali. Perchè nemmeno la morte poteva rapirlo al nostro amore, che lo vuole suo ancora, oltre il mistero; al nostro pensiero in cui Egli vivrà ancora, sempre.

Rappresentando io (Dio sa quanto tale onore oggi mi sia doloroso, e mi dia la forza di superare il mio dolore di amico), rappresentando l'Università, il Rettore, il Preside della Facoltà di Scienze e tutti quei colleghi che non possono essere presenti di persona, io comincio col leggere nella sua rude semplicità lo stato di servizio del Prof. Carlo Rosati, pregandovi di fare attenzione a quelle date e quegli uffici, che segnano i gradi della Sua lenta, tenace ascensione ai più alti fastigi della Scienza e della Scuola.

Nato a Livorno il 24 aprile 1876.

Alunno di questa Università e della R. Scuola Normale Superiore; nel 1897 Dottore in Matematica.

1897-1899 assistente di Analisi infinitesimale in questa Università.

1899 Prof. incaricato di Matematica nel Ginnasio di Cerignola.

1900 Incaricato di matematica nel R. Liceo di Chieti.

Digitized by Google

1901 Reggente nello stesso Liceo.

1906 Reggente nel Liceo di Siena, poi in esso Professore Ordinario.

1912 Ordinario nel R. Istituto Tecnico di Pisa, e nel 1915 insieme anche Assistente alla Cattedra di Geometria Proiettiva e Descrittiva in questa Università.

1919 Incaricato di Geometria Descrittiva presso la Scuola Superiore di Agraria.

1° gennaio 1923 Nominato Professore straordinario di Geometria Descrittiva e Proiettiva nella R. Università di Parma, e nella stessa data trasferito a quella di Pisa. In questa incaricato dell'insegnamento di Geometria Superiore.

1926 Promosso ordinario.

Cavaliere della Corona d'Italia - Membro del Comitato Nazionale di Ricerche - Premiato con grande medaglia d'oro dalla Società Italiana delle Scienze detta dei XL.

Ecco nella sua eloquente aridità il Suo stato di servizio. Questa parola burocratica *servizio*, acquista ora un alto significato, perchè fa pensare alla sentenza sapiente. « Non v'è superiorità legittima di uomo sugli altri uomini se non in loro servizio » nella quale Alessandro Manzoni modernamente ha parafrasato il detto evangelico « chi di voi vuol essere il primo, sia il servo degli altri ». E il nostro illustre collega ha lungamente, fedelmente servito; così è divenuto illustre. Ed io dovevo rendergli ufficiale testimonianza e ringraziamento finale del suo servizio. Egli ha servito con devozione la Scienza, con amore la Scuola, con pietà la famiglia, e sempre e nella Scienza e nella Scuola e nella famiglia e fuori, in ogni moto dell'anima, in ogni parola, in ogni atto ha servito l'Italia. E in questo fedele diuturno servizio si è continuamente elevato, ma ogni gradino della sua ascesa è stato un benefizio per tutti, niente egli si è posto sotto i piedi per salire, nessun uomo ha abbassato per risultare maggiore, niente ha ambito per essere oggetto di ammirazione, per nessun ufficio, a nessun rango si è messo avanti facendosi largo fra gli altri; ma da nessun posto, da nessun ufficio, da nessun dovere, quando la generale fiducia lo ha chiamato, Egli si è ritratto; anzi tutte le volte che è stato proferito il

Digitized by Google

Suo nome per una cosa buona e bella, Egli ha sempre risposto con semplicità « presente ». Il Fascio, la « Dante Alighieri » ne sono testimoni.

E quali difficoltà, quanti sforzi per quella continua ascensione!

La sua vita certo è stata tutta una lotta, non lotta aspra e violenta, non contro uomini e nemmeno cose ostili; ma lotta paziente, tenace e invisibile sotto la bella serenità del Suo volto, inavvertibile sotto la imperturbabile serenità del suo spirito; lotta contro il nulla, per creare qualcosa di buono, lotta contro il brutto, il basso, per conquistare tutto ciò che è bello e alto.

Non il lievito dell'ambizione, ma la acutezza dell'ingegno, la fermezza del volere gli ha dato la vittoria. Egli che aveva saputo amorevolmente trovare le piccole parole, che insinuano le nozioni elementarissime nelle teneri menti dei giovanetti, ben possedeva la esatta, lucida, elegante espressione, che fa essere evidenti le più ardue concezioni scientifiche alle menti già con lungo studio preparate. Egli che non aveva disdegnato, anzi amorevolmente curato la trattazione scolastica della Geometria elementare, andava pure estendendo con sempre crescente fecondità le più ardue teorie della Geometria superiore. A questa Facoltà illustrata da molti e grandi matematici Carlo Rosati con la sua opera aggiungeva sempre nuovo decoro, consolidando la speranza, la piena fiducia (ahimè ora crudelmente spezzata) di un suo contributo ancora prezioso, forse sempre più prezioso in un lungo avvenire.

Questi alti meriti erano dissimulati dalla sua grande modestia, che non era incoscienza del proprio valore, ma buona, mite umiltà cristiana.

Gli alunni tuttavia ammiravano ed amavano il maestro, maestro di Scienza e di vita semplice e virtuosa: gli scienziati plaudivano al ricercatore indefesso e geniale; tutti gli uomini pregiavano altamente l'uomo.

Ma lo scienziato, l'insegnante, l'uomo, si fondevano in una salda inscindibile unità. Quella stessa perfetta armonia che Egli ricercava nella solitaria meditazione tra le forme geometriche, animava la sua parola e il suo gesto davanti

Digitized by Google

agli alunni affascinati, esaltava il suo spirito con la Musica, toccava il suo cuore con la Poesia, reggeva i suoi atti nella famiglia, nella comunione degli amici, in seno alla vita Nazionale, sollevava la sua anima verso Dio. Egli era ormai assurto in quella alta sfera di verità, di bellezza, di bene, che pochi eletti raggiungono, e in essa trovava il premio verace e migliore delle lunghe fatiche.

Perchè forse Egli aveva nel travaglio della ascesa molto sofferto; ma non ce lo ha mai detto nè fatto vedere. Certo Egli ha nella quotidiana vittoria, conquistata a passo a passo, molto gioito in cuor suo, e ciò traspariva dalle sue sembianze, dai suoi modi, e attirava su Lui la simpatia universale. Era chiaro a tutti questo suo compiacimento: non compiacimento di vanità, quale è quello di chi si mira nello specchio, e come spettatore plaude a se stesso attore, sì bene intima pace, sincera soddisfazione della più profonda coscienza. Certo a questa fonte egli attinse anche la forza per superare il dolore di trovarsi vedovo appena sposo, e la saggezza per farsi padre delle sue nipotine orfane, e quasi padre anche della sua stessa dilettissima vecchia mamma. Su lei volse i suoi luminosi occhi cerulei prima di chiuderli per sempre. Comprese forse allora di lasciarla come orfana? Ma io credo che anche in quel terribile momento la Sua fede non lo abbia abbandonato; io penso che sempre un raggio di speranza lo abbia illuminato. Perchè la perfetta armonia di questa vita non può pensarsi profanata.

Tale armonia apparve nella lunga consuetudine con Lui così bella e rara, ma pure anche così naturale, così corrispondente, così consonante con la parte migliore di noi tutti, che tutti abbiamo in essa riconosciuto un esempio cospicuo di una qualità propria della nostra stirpe, una espressione al grado più alto della nostra vetusta Civiltà Latina.

Colleghi, giovani amici, camerati, onorevole Podestà e cittadini di Pisa! col mestissimo vale tributiamo l'estremo onore a questo puro, genuino figlio della nostra grande Italia.

Digitized by Google

Sull' opera scientifica di Carlo Rosati [1]

Corrispondendo all' invito rivoltomi dal Direttore di questo Bollettino, più che delle doti dell' anima e del cuore di Carlo Rosati debbo dar notizia della sua opera di ricercatore; ma sia lecito affermare a chi ha potuto apprezzarne in una più che trentennale amicizia il sano equilibrio, la grande dirittura e la fine delicatezza, che in esse risiedeva la spiegazione migliore del calore di simpatia e del fascino che emanavano dalla Sua persona.

Al contrario di quanto per solito accade l' operosità scientifica del Rosati con l'età è andata sempre crescendo di fecondità e di importanza. Iniziatasi con lavori di geometria proiettiva di non grande interesse, ove si eccettui la Nota dedicata alla determinazione del numero degli S_p appartenenti alla quartica intersezione di due quadriche dello S_{2p+2}, dopo qualche buona incursione nella geometria sopra una varietà e una notevole Memoria sulle assintotiche della superficie di Kummer si rivolse con tenacia e successo ammirevoli allo studio delle corrispondenze (algebriche) appartenenti a curve algebriche.

Le Sue ricerche su questo argomento cominciarono con due Note presentate all'Accademia dei Lincei, ove, avvalendosi del classico teorema dello Hurwitz sulla base dell' insieme delle corrispondenze che possono istituirsi fra i punti delle curve algebriche, si stabilisce una rappresentazione del detto insieme sui punti razionali di un iperspazio, che dà modo di ritrovare con grande semplicità teoremi anteriormente incontrati da altri e interessanti interpretazioni di taluni legami che possono intercedere fra le corrispondenze stesse.

---

[1] (*N. d. D.*) L' illustre Geometra dell' Ateneo partenopeo, cortesemente aderendo al nostro invito, ci ha inviato questo Articolo, che vuole essere soltanto una rapida valutazione dell' opera del compianto Rosati, come si conviene per l' indole speciale di questo Bollettino.

Digitized by Google

Sopratutto in queste Note viene riconosciuta la decomponibilità del numero-base di Hurwitz nella somma dei numeri-base delle corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche che risponde ad un ufficio essenziale nelle ulteriori ricerche del Rosati.

A codesti lavori tennero dietro a breve distanza di tempo una bella dimostrazione del teorema di Poincaré sugli integrali abeliani riducibili e una elaborata Memoria nella quale viene effettuata con notevole eleganza e rapidità la classificazione delle curve di genere 2 dal punto di vista delle corrispondenze—classificazione che, per altro, si può riguardare come rientrante in quella conseguita con assai maggior fatica dallo Humbert dei corpi di funzioni abeliane a due argomenti.

Di assai maggiore importanza sono le ulteriori Note e Memorie nelle quali viene estesa nel modo più ampio possibile la nozione di valenza per le corrispondenze algebriche, si danno i teoremi fondamentali che la riguardano, si illuminano le profonde relazioni intercedenti fra la teoria delle corrispondenze e quella dei corpi algebrici, si ritrovano per nuova interessantissima via gli invarianti aritmetici delle serie algebriche semplicemente infinite di gruppi di punti appartenenti ed una curva algebrica — invarianti introdotti dal Castelnuovo e dal Comessatti —, e si ricostruisce dal punto di vista delle corrispondenze la teoria degli integrali abeliani riducibili data da me nella mia Memoria del 1917 sulle matrici di Riemann.

Ma i lavori ove massimamente rifulge la piena maturità di ricercatore, cui era giunto il Rosati e coi quali egli ha fornito alla Scienza i Suoi più alti contributi, sono i due ultimi sulle corrispondenze permutabili e sulle matrici di Riemann. Con questi Egli ha detto sul problema della classificazione dei corpi di funzioni abeliane le parole definitive; e l'aver io fatto rilevare in una Nota lincea, che ai tre tipi fondamentali di matrici cui egli perviene si poteva giungere più presto e più luminosamente per la via indicata da me in una mia Mamoria del 1921 sulle algebre e le matrici di Riemann, come non iscusa me del torto di non aver tratto

Digitized by Google

dalle mie considerazioni tutti i frutti che avrei potuto coglierne, così non diminuisce in nulla il merito del Rosati di aver portato a fondo una delle questioni più gravi che nello studio delle funzioni abeliane potessero esser poste.

In quanto sono venuto dicendo mi sono limitato a parlare, assai sommariamente, dei risultati raggiunti dal Rosati e dei nuovi contributi che la Scienza gli deve; ma sorvolerei sopra una delle due doti più eminenti, se non accennassi alla Sua valentia di espositore artisticamente perfetto. Le sue pubblicazioni sono modelli di chiarezza, di eleganza disinvolta, di scrupolosa cura dei minimi particolari; e per chi anche nella matematica sa risalire, come è possibile, dalle qualità dello stile alle doti dell'autore, le Memorie del Rosati sono sufficienti a rivelarne il sano equilibrio mentale e la grande dirittura intellettuale che, quando sia piena e perfetta, si traduce anche in grande dirittura morale.

E sono queste le doti che a quanti conoscevano il Rosati hanno fatto apprendere con maggior dolore e con più vivo rimpianto la Sua fine immatura.

Gaetano Scorza

Elenco delle pubblicazioni scientifiche di CARLO ROSATI (1)

1. *Rappresentazione della quartica base di un fascio di quadriche di S_n sopra un S_{n-2}* (Ann. di Mat., serie 3ª, t. I, 1899).

2. *Sugli spazi lineari di dimensione massima contenuti in una quartica base di un fascio di quadriche in uno spazio a dimensione pari* (Rend. del R. Ist. Lomb., serie 2ª, vol. XXXII, 1899).

3. *Alcune considerazioni intorno al metodo di* Hesse *per lo studio delle bitangenti di una curva piana del quart'ordine* (Giornale di Mat., vol. XXXVIII, 1900).

4. *Sulle curve ellittiche del sest'ordine* (Rend. del R. Ist. Lomb., serie 2ª, vol. XXXV, 1902).

5. *Un'osservazione sugli inviluppi dei sistemi algebrici di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, 1° sem. 1907).

6. *Sugli spazi normali delle varietà algebriche* (Atti del R. Istituto Veneto, t. LXVIII, 1908-09).

---

(1) Occorre appena ricordare ai lettori di questo Bollettino che alla collaborazione del Rosati col Benedetti è dovuto uno dei nostri migliori trattati didattici di Geometria.

Digitized by Google

7. *Intorno alla sovrabbondanza di un sistema lineare di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (Atti del R. Ist. Veneto, t. LXIX, 1909-10).

8. *Sulle assintotiche della superficie di* KUMMER (Rendic. del Circ. Mat. di Palermo, t. XXXV, 1913).

9. *Sulle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica.* Note I e II (Rend. della R. Acc. Acc. dei Lincei, 2° sem. 1913).

10. *Sugli integrali abeliani riducibili* (Atti della R. Acc. della Sc. di Torino, vol. L, 1914-15).

11. *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e, in particolare, fra i punti di una curva di genere due* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, 2° sem. 1915 (*Nota preventiva*).

12. *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e, in particolare, fra i punti di una curva di genere due* (Ann. di Mat., serie 4ª, t. XXV, 1915).

13. *Sulle corrispondenze plurivalenti fra i punti di una curva algebrica* (Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino, vol. LI, 1915 16).

14. *Sulle valenze delle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica* (Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino, vol. LIII, 1917-18).

15. *Sulle corrispondenze algebriche fra i punti di due curve algebriche* (Ann. di Mat., serie 3ª, t. XXVIII, 1918).

16. *Intorno alle corrispondenze simmetriche singolari sopra una curva di genere* 2 (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, t. XLIV, 1920).

17. *Nuove ricerche sulle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica* (Ann. di Mat., serie 3ª, t. XXXI, 1921).

18. *Sopra un teorema di Nöther* (Bollet. dell' Un. Mat. Ital., anno III, 1924).

19. *Sopra certi invarianti aritmetici delle serie algabriche semplicemente infinite appartenenti ad una curva algebrica* (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, t. XLIX, 1925).

20. *Sui sistemi regolari di integrali abeliani riducibili e sulle reti di corrispondenze ad essi associate* (Ann. di Mat., serie 4ª, vol. III, 1925-26).

21. *Sulle corrispondenze permutabili appartenenti ad una curva algebrica e sulle varietà di* JACOBI *a gruppo di moltiplicabilità abeliano* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, 1° sem. 1927) (*Nota preventiva*).

22. *Sulle matrici di* RIEMANN (Rend. della R. Acc. dei Lincei, 2° sem. 1927) (*Nota preventiva*).

23. *Sulle matrici di* RIEMANN (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, t. LIII, 1929).

24. *Sulle corrispondenze permutabili appartenenti ad una curva algebrica e sulle varietà di* JACOBI *a gruppo di moltiplicabilità abeliana* (Ann. di Mat., serie 4ª, vol. VI, 1928-29).

Digitized by Google

Principali proprietà relative alle proiettività $\begin{pmatrix} \alpha, & \mp b^2 \\ a^2, & \alpha \end{pmatrix}$ tra i diametri delle coniche a centro

di ARMANDO CHIELLINI (Pisa)

In un mio precedente lavoro (1) determinai una semplice infinità di proiettività, tra i diametri di una conica a centro, di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 ,$$

le quali hanno una proprietà (caratteristica) abbastanza notevole; cioè quella di essere le *uniche* proiettività tra i diametri di una conica a centro per le quali vale il (così detto) secondo teorema di Apollonio, relativo all'area dei triangoli formati dalle coppie di diametri coniugati e dalle corde che ne congiungono gli estremi.

Nel citato lavoro determinai poi altre proprietà di queste proiettività che vengono ad estendere quelle notissime relative all'involuzione dei diametri coniugati (2); scopo della

---

(1) CHIELLINI: Sulle proiettività tra i diametri delle coniche a centro e relative estensioni dei teoremi di Apollonio. (Stabilimento Tipografiao Vallerini, Pisa.

(2) Le proiettività del testo sono definite dalla formula

$$(a) \qquad m_2 = \frac{\alpha m_1 \mp b^2}{a^2 m_1 + \alpha}$$

dove m_1, m_2 indicano i coefficienti angolari di due diametri corrispondenti e il seguo superiore vale per l'ellisse, l'inferiore per l'iperbola. Se poi indichiamo con (x_1, y_1), (x_2, y_2) le coordinate delle estremità di due semi diametri corrispondenti, queste sono legate dalle formule

$$x_2 = \varepsilon \frac{a^2 y_1 + \alpha x_1}{\sqrt{a^2 b^2 \pm \alpha^2}} , \quad y_2 = \varepsilon \frac{\alpha y_1 \mp b^2 x_1}{\sqrt{a^2 b^2 \pm \alpha^2}} \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

Digitized by Google

presente nota è, in certo qual modo, quello di completare i precedenti risultati, cercando di determinare quali altre proprietà notevoli sulla involuzione dei diametri coniugati di una conica a centro sono estendibili alle nostre proiettività.

A) *Esiste il teorema:* Il luogo dei punti d'incontro di due tangenti negli estremi di due semidiametri coniugati di una ellisse è una nuova ellisse concentrica, coassiale a quella data, di semi assi $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$.

Nel nostro caso considereremo una coppia di semi diametri OP_1, OP_2 (O centro dell'ellisse), corrispondenti secondo la formula (a) di nota (2) e in P_1 e P_2 condurremo le tangenti all'ellisse, che avranno per equazione

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1 \quad , \quad \frac{x_2 x}{a^2} + \frac{y_2 y}{y^2} = 1 .$$

Risolvendo questo sistema e sostituendo alle coordinate x_2, y_2 le formule che le esprimono per mezzo di x_1, y_1, avremo con semplici calcoli

$$\begin{cases} \varepsilon b x = (\varepsilon\alpha - \sqrt{\alpha^2 + a^2 b^2}) \dfrac{y_1}{b} - \varepsilon b x_1 \\ \varepsilon a y = (\sqrt{\alpha^2 + a^2 b^2} - r\alpha) \dfrac{x_1}{a} - \varepsilon a y_1 \end{cases}$$

---

o dalle inverse

$$x_1 = \varepsilon \frac{\alpha x_2 \mp a^2 y_2}{\sqrt{a^2 b^2 \pm \alpha^2}} \quad , \quad y_1 = \varepsilon \frac{b^2 x_2 + \alpha y_2}{\sqrt{a^2 b^2 \pm \alpha^2}}$$

Osserviamo infine che queste formule, lineari, intere ed omogenee (a determinante $= 1$), una volta fissato il segno di ε, definiscono una corrrispondenza tra due piani sovrapposti, riferiti agli stessi elementi di riferimento, suscettibile, almeno per l'ellisse, di una costruzione geometrica abbastanza semplice ed elegante, tenendo presenti le formule

$$\cos \varphi_2 = \varepsilon \cos (\varphi_1 - \theta) \qquad \operatorname{sen} \varphi_2 = \varepsilon \operatorname{sen} (\varphi_1 - \theta),$$

dove θ è un angolo definito da

$$\cos \theta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + a^2 b^2}} \quad , \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{ab}{\sqrt{\alpha^2 + a^2 b^2}},$$

che legano le anomalie eccentriche degli estremi di due semidiametri corrispondenti.

Digitized by Google

da cui, quadrando e sommando si ha, come equazione del luogo richiesto

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2(1 + g(\alpha))$$

dove si è posto per semplicità:

$$g(\alpha) = \frac{\alpha^2 - \alpha\varepsilon\sqrt{\alpha^2 + a^2b^2}}{a^2b^2}.$$

Per $\alpha = 0$ (caso dell'involuzione dei diametri coniugati) si ha $g(\alpha) = 0$ e si ritrova il teorema precedente.

Nel caso dell'iperbola, intendendo per lunghezza del diametro corrispondente quella determinata dalla iperbola coniugata e procedendo come sopra, si giunge all'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{-\alpha\sqrt{a^2b^2 - \alpha^2}}{a^2b^2}$$

che per $\alpha = 0$ si riduce all'equazione complessiva degli asintoti, come è evidente geometricamente.

B) Esiste il teorema: Le tangenti condotte agli estremi di una corda, di una conica a centro, si incontrano sul diametro coniugato alla corda.

Dimostriamo che vale il teorema più generale:

Presa una coppia qualunque di semidiametri di una conica a centro, se dai loro estremi tiriamo le parallele ai diametri corripondenti ad essi, queste si incontrano in un punto del diametro corrispondente alla direzione della corda che congiunge gli estremi.

Nel caso poi che la coppia sia formata da semidiametri corrispondenti, il loro punto d'incontro descrive una conica, concentrica a quella data (1).

Infatti indicando con $(\xi, \eta), (\bar{\xi}, \bar{\eta})$ le coordinate degli estremi di due semi diametri qualunque, avremo, come equazioni delle nostre due rette: (2)

$$\frac{y - \eta}{x - \xi} = \frac{\alpha\eta - b^2\xi}{a^2\eta + \alpha\xi} \quad , \quad \frac{y - \bar{\eta}}{x - \bar{\xi}} = \frac{\alpha\bar{\eta} - b^2\bar{\xi}}{a^2\bar{\eta} + \alpha\bar{\xi}}$$

(1) In questo modo estendiamo ancor più il teorema enunciato al numero *A*).

(2) Per fissare le idee, eseguiamo il calcolo per il caso dell'ellisse.

Digitized by Google

da cui, con calcoli semplici ricaviamo per le coordinate dal punto d' incontro.

$$y(\xi\bar{\eta} - \bar{\xi}\eta)(\alpha^2 + a^2b^2) = a^2b^2 \{ \alpha(\bar{\varkappa} - \eta) - b^2(\bar{\xi} - \xi) \}$$
$$x(\xi\eta - \bar{\xi}\eta)(\alpha^2 + a^2b^2) = a^2b^2 \{ \alpha(\bar{\xi} - \xi) + a^2(\bar{\eta} - \eta) \}$$

Dividendo membro a membro, si ottiene come coefficiente angolare della congiungente il punto d' incontro con l' origine

$$m = \frac{\alpha(\bar{\eta} - \eta) - b^2(\bar{\xi} - \xi)}{a^2(\bar{\eta} - \eta) + \alpha(\bar{\xi} - \xi)},$$

il che dimostra il teorema.

Nel caso particolare che i due semi diametri siano corrispondenti, ponendo al solito: $\xi = x_1\ \eta = y_1$; $\bar{\xi} = x_2$, $\bar{\eta} = y_2$, si hanno le formule

$$\sqrt{\alpha^2 + a^2b^2}\, x = \alpha(x_2 - x_1) + a^2(y_2 - y_1)$$
$$\sqrt{\alpha^2 + a^2b^2}\, x = -b^2(x_2 - x_1) + \alpha(y_2 - y_1);$$

sostituendo a x_2, y_2 le loro espressioni in funzione di x_1, y_1 ed eliminando x_1, y_1 si ottiene, come equazione del luogo descritto dal punto d' incontro.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2(1 - f(\alpha))$$

dove si è posto per semplicità $f(\alpha) = \frac{\varepsilon\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + a^2b^2}}$. Per $\alpha = 0$ si ritrova il risultato noto.

C) Il baricentro del triangolo formato da due semi diametri corrispondenti e dalla corda che ne congiunge gli estremi, in una conica a centro, descrive una conica concentrica, coassiale alla conica data.

Dette x, y le coordinate del baricentro, ed eseguendo il calcolo per l' ellisse, si hanno le formole:

$$3\sqrt{\alpha^2 + a^2b^2}\, x = (\sqrt{\alpha^2 + a^2b^2} + \varepsilon\alpha)\, x_1 + \varepsilon a^3 y_1$$
$$3\sqrt{\alpha^2 + a^2b^2}\, y = (\sqrt{\alpha^2 + a^2b^2} + \varepsilon\alpha)\, y_1 - \varepsilon b^2 x_1$$

da cui, eliminando x_1, y_1 si ottiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2}{9}(1 + f(\alpha)).$$

Digitized by Google

Per $\alpha = 0$ si ottiene l'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2}{9}$$

e si ritrova il risultato enunciato dal Prof. Sibirani nel fascicolo IV, anno 1923, del Periodico di Matematica.

Nel caso dell'iperbola si trova l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{-2\varepsilon\alpha}{9\sqrt{a^2b^2 - \alpha^2}}$$

che si riduce all'equazione complessiva degli asintoti per $\alpha = 0$.

D) Esiste il teorema: La distanza δ di una tangente dal centro di una conica è inversamente proporzionale alla lunghezza d_2 del semi diametro coniugato alla tangente, secondo la formula $\delta = \frac{ab}{d_2}$.

Dimostriamo che vale il teorema più generale.

La distanza δ, dal centro di una conica, di una retta passante per l'estremo di un diametro e parallela al diametro corrispondente è inversamente proporzionale alla lunghezza d_2 di esso, secondo la formula

$$\delta = \frac{a^2b^2}{d_2\sqrt{a^2b^2 \pm \alpha^2}}$$

secondo che si tratta di un'ellisse o di un'iperbola.

Siano infatti x_1, y_1 le coordinate di un estremo di un diametro; la retta passante per esso, parallela al diametro corrispondente avrà l'equazione $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{\alpha m_1 - b^2}{a^2 m_1 + \alpha}$ (eseguiamo il calcolo per l'ellisse) e semplificando

$$(\alpha y_1 - b^2 x_1)x - (a^2 y_1 + \alpha x_1)y + a^2b^2 = 0$$

e quindi la sua distanza dall'origine sarà data da:

$$\delta = \frac{a^2b^2}{\sqrt{(\alpha y_1 - b^2x_1)^2 + (\alpha x_1 + a^2y_1)^2}}.$$

Digitized by Google

Se ora osserviamo le formule che legano le coordinate di un estremo di un diametro con quelle di un diametro corrispondente e si osserva che $d^2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ ne segue senz'altro

$$\delta = \frac{a^2 b^2}{d_2 \sqrt{a^2 b^2 + \alpha^2}}.$$

Osservando infine che i fuochi hanno le coordinate $(\pm ae, 0)$, risulta, per le distanze δ', δ'' di essi dalla retta precedente

$$\delta' + \delta'' = 2\delta,$$

formula identica a quella per la tangente.

E) In un' iperbola due diametri corrispondenti formano un birapporto costante con gli asintoti.

Ciò è geometricamente evidente; se poi cerchiamo di calcolare questo birapporto si trova il valore

$$-\frac{ab + \alpha}{ab - \alpha}$$

e quindi per $\alpha = 0$, ritroviamo il risultato che due diametri coniugati formano un gruppo armonico con gli asintoti.

F) L'area del parallelogrammo costruito su due semi diametri qualunque è uguale a quella del parallelogrammo costruito sui due semidiametri corrispondenti.

Ciò si verifica subito col calcolo, oppure basta osservare che le formule che esprimono x_2, y_2 per x_1, y_1 sono formule lineari intere, omogenee, a determinante uguale ad 1.

Da ciò deduciamo una conseguenza notevolissima (nel caso dell'ellisse).

Se supponiamo di considerare (1) due semi diametri infinitamente vicini si può confondere, a meno di infinitesimi di ordine superiore, la superficie del triangolo che essi determinano con quella del settore da essi intercettato nell'ellisse e se allora consideriamo la superficie di un settore compreso

(1) Vedi per il ragionamento analogo per le coppie di diametri coniugati: CHASLES « Traité des sections coniques » première partie, 1865. Gauthier-Villars, Paris.

Digitized by Google

tra due semidiametri qualunque, come formata da infiniti triangolini, se ne conclude che

Il settore ellittico compreso tra due semi diametri qualunque è equivalente al settore compreso tra i due semi diametri corrispondenti.

Come conseguenza si ha poi che *sono equivalenti anche i segmenti ellittici.*

G) Diametri corrispondenti eguali, nell'ellisse, e loro proprietà fondamentali.

Perchè due diametri corrispondenti siano uguali, dovrà aversi $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$ e poichè per i punti dell'ellisse si ha $y^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$ ne segue $x_1^2 = x_2^2$ e quindi $x_2 = \pm x_1$. Prendendo allora le formule che esprimono le coordinate dei punti dell'ellisse per mezzo dell'anomalia eccentrica si ha

$$\cos \varphi_2 = \cos (\varphi_1 - \theta) = \pm \cos \varphi_1$$

da cui

$$\varphi_1 = \frac{\theta}{2} \quad , \quad \varphi_1 = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} .$$

Ne segue quindi: *Su una elisse vi sono due coppie di semi diametri corrispondenti eguali che hanno per anomalie eccentriche* $\pm \frac{\theta}{2}$ e $\pm \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}$ *e che sono quindi ugualmente inclinate sull'asse maggiore dell'ellisse.*

Nel caso dell'involuzione dei diametri coniugali è $\theta = \frac{\pi}{2}$, le due coppie coincidono e si ritrova il risultato noto.

È interessante osservare che *queste due coppie di diametri eguali hanno la proprietà di essere quelle per cui la somma dei quadrati delle loro lunghezze è massima o minima e quella di racchiudere l'angolo massimo o minimo.*

Infatti la somma dei quadrati di due semi diametri coniugati, introducendo le anomalie eccentriche, è espressa da

$$S = a^2 \cos^2 \varphi_2 + b^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_2 + a^2 \cos^2 \varphi_1 + b^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_1 =$$
$$= 2a^2 - (a^2 - b^2)(\operatorname{sen}^2 \varphi_2 + \operatorname{sen}^2 \varphi_1) ;$$

è allora evidente che i massimi o minimi di S coincideranno con i minimi o massimi di

$$f(\varphi_1) = \operatorname{sen}^2 \varphi_2 + \operatorname{sen}^2 \varphi_1 = \operatorname{sen}^2 (\varphi_1 - \theta) + \operatorname{sen}^2 \varphi_1$$

Digitized by Google

Derivando si ottiene

$$f'(\varphi_1) = 2 \operatorname{sen}(2\varphi_1 - \theta)\cos\theta \ (^1)$$
$$f''(\varphi_1) = 4\cos(2\varphi_1 - \theta)\cos\theta\,;$$

Ne segue che sarà $f'(\varphi_1)=0$ per $2\varphi_1-\theta=0$ oppure $2\varphi_1-\theta=\pi$ da cui

$$\varphi_1 = \frac{\theta}{2} \quad \text{oppure} \quad \varphi_1 = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\,;$$

essendo poi

$$f''\left(\frac{\theta}{2}\right) = 4\cos\theta = \frac{4\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + a^2b^2}}$$
$$f''\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -4\cos\theta = \frac{-4\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + a^2b^2}}$$

risulta che se $\alpha > 0$ la prima coppia da il massimo di S e la seconda il minimo, se $\alpha < 0$ succede il contrario.

Per verificare la seconda parte della nostra affermazione, osserviamo che detto β l'angolo formato da due semi diametri corrispondenti, si ha per esso:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{ab(\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1)}{a^2 + b^2 \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2}$$

cioè anche

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{-ab\operatorname{sen}\theta}{a^2\cos\varphi_1\cos(\varphi_1 - \theta) + b^2 \operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}(\varphi_1 - \theta)}.$$

Dovremo quindi ricercare il massimo o minimo di

$$F(\varphi_1) = a^2\cos\varphi_1\cos(\varphi_1 - \theta)\, b^2 \operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}(\varphi_1 - \theta).$$

Derivando si ottiene

$$F'(\varphi_1) = (b^2 - a^2)\operatorname{sen}(2\varphi_1 - \theta)$$
$$F''(\varphi_1) = 2(b^2 - a_2)\cos(2\varphi_1 - \theta)$$

e quindi di nuovo

$$\varphi_1 = \frac{\theta}{2} \quad , \quad \varphi_1 = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\,.$$

---

(1) Per $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ si ha sempre $f(\varphi_1) = 0$ cioè $f(\varphi_1) = \text{costte}$ e si ritrova il primo teórema di Apollonio.

Pisa, R. Universita 1929

Digitized by Google

Le inversioni rispetto alle sfere dello spazio come trasformazioni cremoniane

di ODOARDO FRANCESCHI (Parma)

Tale è l'importanza che ormai hanno assunto le trasformazioni per raggi vettori reciproci in varî rami dell'analisi matematica, che mi sembra non sia privo di interesse ritrovarne le proprietà fondamentali partendo dal punto di vista delle trasformazioni birazionali.

N. 1 - Fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali, se diciamo x, y, z le coordinate di un punto generico P dello spazio, ed x', y', z' quelle del punto P' trasformato nella inversione rispetto alla sfera di centro $0 \equiv (x = y = z = 0)$ e di raggio R, le formule di trasformazione si scrivono, com'è noto:

$$(1) \qquad x' = \frac{R^2 x}{x^2+y^2+z^2}, \; y' = \frac{R^2 y}{x^2+y^2+z^2}, \; z' = \frac{R^2 z}{x^2+y^2+z^2};$$

si ottengono le formule della trasformazione inversa quando si scambino nelle (1) le x, y, z colle x', y', z', come risulta evidente quando si pensi che la trasformazione è involutoria

Se si introducono le coordinate omogenee, cioè si pone:

$$x = \frac{x_1}{x_4}, y = \frac{x_2}{x_4}, z = \frac{x_3}{x_4}; \; x' = \frac{x'_1}{x'_4}, y' = \frac{x'_2}{x'_4}, z' = \frac{x'_3}{x'_4},$$

le (1) divengono:

$$(2) \qquad x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = R^2 x_1 x_4 : R^2 x_2 x_4 : R^2 x_3 x_4 : (x^2_1 + x^2_2 + x^2_3);$$

e le formule della trasformazione inversa si deducono scambiando nelle (2) le x_1, x_2, x_3, x_4, con le x'_1, x'_2, x'_3, x'_4.

Ciò posto, i sistemi omaloidici di superfici relativi agli spazi (sovrapposti) in cui variano rispettivamente il punto

Digitized by Google

primitivo $P \equiv (x_1, x_2, x_3, x_4)$ e il punto trasformato $P' \equiv (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$, si rappresentano con la equazione:

$$(3) \quad R^2(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3)x_4 + \lambda_4(x^2_1 + x^2_2 + x^2_3) = 0,$$

dove le λ_i denotano parametri, e con quella che se ne deduce sostituendo alle x_i le x'_i; e sono identici.

Dunque risulta che:

Ai piani generici dello spazio corrispondono le sfere passanti per il punto 0 *(punto fondamentale).*

La intersezione di due superfici generiche del sistema (3) è data dalla linea:

$$\begin{cases} R^2(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3)x_4 + \lambda_4(x^2_1 + x^2_2 + x^2_3) = 0 \\ (\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3)x_4 = 0, \end{cases}$$

le λ_i, μ_j denotando parametri, la quale si spezza in una parte fissa:

$$\begin{cases} x^2_1 + x^2_2 + x^2_3 = 0 \\ x_4 = 0, \end{cases}$$

data dal *circolo immaginario all'infinito*, e in una parte variabile:

$$\begin{cases} R^2(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3)x_4 + \lambda_4(x^2_1 + x^2_2 + x^2_3) = 0 \\ \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 = 0, \end{cases}$$

che è un circolo passante per 0, appartenente ad un sistema corrispondente al sistema delle rette dello spazio.

Dunque:

La linea fondamentale per ciascun sistema omaloidico è il circolo assoluto, pensato come appartenente al relativo spazio.

Alle rette generiche dello spazio corrispondono i circoli passanti per il punto 0, *i quali intersecano la linea fondamentale in coppie di punti variabili date dai punti doppi delle involuzioni assolute relative ai loro piani.*

N. 2 - Determiniamo la superficie jacobiana di uno dei sistemi omaloidici, p. es. quella del sistema (3); è data da:

$$x^2_4(x^2_1 + x^2_2 + x^2_3) = 0,$$

e quindi da una superficie del 4° ordine che si spezza nel

Digitized by Google

piano all'infinito contato due volte, e nel cono quadrico (immaginario) ottenuto projettando dal punto 0 il circolo assoluto.

Il punto fondamentale 0 vi appartiene come punto doppio e la linea fondamentale come linea tripla.

N. 3 - Dalle (2) e dalle formule inverse, risulta subito che:

Al punto fondamentale 0 *corrisponde il piano all'infinito, il quale appartiene come piano doppio all' Jacobiana del relativo sistema. Alla linea fondamentale corrisponde il cono che la projetta dal punto fondamentale, e detto cono appartiene all'Jacobiana come superficie semplice. Alle coppie di punti variabili che un circolo per* 0 *ha in comune colla linea fondamentale corrispondono coppie di punti del suddetto cono* (*).

Si ha inoltre che:

Ai piani (alle rette) appartenenti alla stella di centro 0 *corrispondono i piani stessi (le rette stesse); vale a dire, tali piani (rette) si mutano in sè per la trasformazione.*

N. 4 - Ad una sfera non passante per 0:

$$(4)\quad \alpha(x^2_1 + x^2_2 + x^2_3) + \beta x_1 x_4 + \gamma x_2 x_4 + \delta x_3 x_4 + \varepsilon x^2_4 = 0$$

corrisponde la superficie:

$$(5)\quad \{\varepsilon(x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3) + \beta R^2 x'_1 x'_4 + \gamma R^2 x'_2 x'_4 + \delta R^2 x'_3 x'_4 + + \alpha R^4 x'^2_4\{(x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3) = 0\,;$$

ad un circolo non passante per 0:

$$\begin{cases} \alpha(x^2_1 + x^2_2 + x^2_3) + \beta x_1 x_4 + \gamma x_2 x_4 + \delta x_3 x_4 + \varepsilon x^2_4 = 0 \\ \lambda x_1 + \mu x_2 + \nu x_3 + \pi x_4 = 0\,, \end{cases}$$

corrisponde la linea:

$$(6)\quad \begin{cases} \{\varepsilon(x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3) + \beta R^2 x'_1 x'_4 + \gamma R^2 x'_2 x'_4 + \delta R^2 x'_3 x'_4 + \\ \quad + \alpha R^4 x'^2_4\{(x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3) = 0 \\ \pi(x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3) + \lambda R^2 x'_1 x'_4 + \mu R^2 x'_2 x'_4 + \nu R^2 x'_3 x'_4 = 0\,, \end{cases}$$

(*) Ciascheduna delle coppie di cui sopra è costituita dai punti nei quali la retta immagine del circolo appoggia alle due generatrici del cono, che formano (insieme col circolo assoluto, pensato come appartenente allo spazio trasformato) la rappresentazione dei punti ciclici del circolo considerato. Il che si vede subito anche analiticamente.

Digitized by Google

che si spezza nel circolo:

$$\begin{cases} \varepsilon(x'^2_1+x'^2_2+x'^2_3)+\beta R^2 x'_1 x'_4+\gamma R^2 x'_2 x'_4+\delta R^2 x'_3 x'_4+\alpha R^4 x'^2_4=0 \\ \rho x'_1+\sigma x'_2+\tau x'_3+\varphi x'_4 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad =0, \end{cases}$$

dove ρ, σ, τ, φ indicano opportune costanti, nella coppia di rette (immaginarie) uscenti dal punto 0:

$$(7) \qquad x'^2_1+x'^2_2+x'^2_3=\lambda x'_1+\mu x'_2+\nu x'_3=0,$$

e nel circolo assoluto, pensato come appartenente allo spazio trasformato, contato due volte. Se dunque nella superficie (5) prescindiamo dal cono $x'^2_1+x'^2_2+x'^2_3=0$, che dà l'immagine del circolo assoluto, e nella linea (6) facciamo astrazione dalla coppia di rette immaginarie (7) e dal circolo assoluto (pensato nello spazio trasformato), contato due volte, che col loro insieme danno l'immagine dei punti ciclici del circolo primitivo, si conclude che:

Alle sfere non passanti per 0 *corrispondono sfere non passanti per* 0. *Ai circoli non passanti per* 0 *corrispondono circoli non passanti per* 0; *se il piano di uno dei suddetti circoli appartiene alla stella di centro* 0, *il circolo corrispondente giace nel medesimo piano.*

In particolare, se nella (4) si pone: $\alpha=1$, $\beta=\gamma=\delta=0$, $\varepsilon=-R^2$, si ottiene dalla (5) che:

La sfera di centro 0 *e raggio* R *si muta in sé per la trasformazione.*

Si osservi in fine che se si scrivono le espressioni che dànno i coseni e i seni degli angoli di due rette (di due piani) e dei circoli (delle sfere) corrispondenti, e si tiene conto che le inversioni sono trasformazioni (generalmente) biunivoche e continue, risulta senz'altro stabilita la proprietà della conservazione degli angoli nel passare dalla figura primitiva alla trasformata.

Digitized by Google

Sulla determinazione di punti notevoli del triangolo mediante parallele al contorno

di VINCENZO G. CAVALLARO (Cefalù)

PARTE I.

DEFIN. - Il prolungamento di un lato di un triangolo ABC divide il piano in due semipiani in uno dei quali giace la superfice del triangolo. Una retta di codesto piano parallela a quel lato, ove stia o no nel semipiano che non contiene la superficie del triangolo, la diciamo rispettivamente una parallela relativa a quel lato condotta *esternamente* o *internamente* rispetto al triangolo ABC (1).

1. Generalità. Se dati tre segmenti X, Y, Z vogliamo costruire il punto Φ interno al contorno del triangolo fondamentale ABC, tale che le sue distanze dai lati $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ siano rispettivamente proporzionali ai tre dati segmenti, conduciamo, tutte esternamente, o tutte internamente le parallele ai predetti lati del fond. alle corrispondenti distanze D_a, D_b, D_c da essi date da

$$D_a = \lambda \cdot X \ , \ D_b = \lambda \cdot Y \ , \ D_c = \lambda \cdot Z \qquad (1)$$

λ essendo un conveniente fattore arbitrario di proporzionalità:

Siano rispettivamente $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ i triangoli delle parallele, simili ad ABC, costruiti con i due procedimenti. Nel primo caso le rette A_1A, B_1B, C_1C determinate dai vertici omologhi concorrono nel punto Φ. Nel secondo caso le rette analoghe A_2A, B_2B, C_2C concorrono parimenti nel punto Φ. Dunque, col doppio procedimento, ogni terna di vertici omologhi $(A_1, A, A_2), (B_1, B, B_2), (C_1, C, C_2)$ è allineata al punto Φ.

(1) Il lettore è invitato di disegnarsi successivamente le varie figure, le quali non sono di difficile esecuzione.

Digitized by Google

Oss. - Si comprende di leggeri che l'estensione superficiale di ciascuno dei due triangoli simili $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ è subordinata al valore del numero λ arbitrariamente scelto. Noi diciamo dunque che codesti triangoli delle parallele costituiscono *la coppia corrispondente* al punto interno Φ, *relativa* al numero λ.

Oltre al punto Φ, esistono, in una certa corrispondenza ai lati BC, CA, AB del fond. ABC, tre altri punti Φ_1, Φ_2, Φ_3, esterni al contorno del triangolo di riferimento, che soddisfano al problema e che sono perciò a quello *associati*. Ciascuno di essi si può costruire indipendentemente dalla conoscenza di posizione dei rimanenti e dal punto interno Φ.

Ad esempio, per costruire Φ_1, corrispondente a $BC = a$, conduciamo due parallele esterne relative rispett. agli altri due lati $AC = b$, $AB = c$ ed una interna relativa al lato scelto BC, od anche due parallele interne relative agli stessi lati AC, AB ed una esterna relativa al lato BC, sempre a quelle distanze dai corrispondenti lati che soddisfacciano alle relazioni (1) di proporzionalità. In questi due procedimenti, che allo scopo sono vicendevolmente sostituibili, siano $D_1E_1F_1$, $D_2E_2F_2$ rispettivamente i corrispondenti triangoli delle parallele, i quali — come si comprende di leggieri — sono simili al fod. ABC: diciamo A, D_1, D_2; B, E_1, E_2; C, F_1, F_2 le terne dei loro vertici omologhi. Tanto il triangolo $D_1E_1F_1$ costruito col primo modo di operare, quanto il triangolo $D_2E_2F_2$ costruito col secondo modo, è bastevole, insieme al fond. ABC, a determinare la posizione del punto Φ_1 che si desidera. Infatti le rette AD_1, BE_1, CF_1 concorrono in Φ_1 e le rette AD_2, BE_2, CF_2 concorrono parimenti in Φ_1. Dunque eseguendo il doppio procedimento (non necessario), ciascuna terna di vertici omologhi (A, D_1, D_2), (B, E_1, E_2), (C, F_1, F_2) è allineata col punto Φ_1.

I due triangoli $D_1E_1F_1$, $D_2E_2F_2$ costituiscono la coppia corrispondente al punto esterno Φ_1, relativa al numero λ (il quale, d'altronde, può essere differente da quello già scelto per la costruzione del punto interno Φ).

Procedendo analogamente determineremo, in corrispondenza a ciascuno degli altri due lati $AC = b$, $AB = c$ del

Digitized by Google

fond., rispettivamente le due coppie di triangoli delle parallele $G_1H_1I_1$, $G_2H_2I_2$; $L_1M_1N_1$, $L_2M_2N_2$ relative ad altri valori qualunque di λ e tali che ogni triangolo della prima coppia è bastevole, insieme al fond., a costruire, nel modo già indicato per il punto Φ_1, il corrispondente punto Φ_2 ed ogni triangolo della seconda coppia è bastevole, insieme al fond., a costruire il corrispondente punto Φ_3.

Oss. - La posizione geometrica dei punti $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ rispetto al contorno del fond. ABC dipende dai segmenti prestabiliti X, Y, Z e non già dal parametro arbitrario λ.

Per costruire singolarmente codesti punti, con vicendevole indipendenza geometrica, abbiano dunque nel complesso otto modi di operare cui si possono far corrispondere generalmente otto valori qualunque di λ differenti fra di loro. Ma quando sia necessario conoscere la posizione geometrica dell' intera quaterna di punti, mancherebbe di senno chi non operasse con un solo valore opportunamente prestabilito del parametro λ.

Infatti, poichè la scelta λ è comunque arbitraria, quando avremo disegnato solamente i due triangoli delle parallele $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ costituenti la coppia corrispondente al punto interno Φ, avremo altresì già costruiti contemporaneamente i triangoli delle tre coppie $(D_1E_1F_1 , D_2E_2F_2)$, $(G_1H_1I_1 , G_2H_2I_2)$, $(L_1M_1N_1 , L_2M_2N_2)$ corrispondenti rispettivamente ai punti esterni $\Phi_1\Phi_2\Phi_3$.

Operando con otto valori differenti di λ, tutti i triangoli delle quattro coppie corrispondenti ai punti $\Phi,\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3$ avranno gli elementi congeneri, lati o vertici, scevri da alcuna possibile coincidenza, onde saranno in libertà vicendevole praticamente inutile. Operando invece, con un valore unico di λ avverrà che i lati dei triangoli delle tre coppie corrispondenti ai punti esterni $\Phi_1\Phi_2\Phi_3$ giaceranno sui lati e sui prolungamenti dei lati dei triangoli $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ costituenti la coppia del punto interno Φ, mentre un sol vertice dei triangoli delle prime tre coppie coinciderà col vertice omologo conveniente appartenente ai triangoli della coppia del punto interno Φ. E questo vincolo di elementi congeneri renderà

Digitized by Google

praticamente assai più speditivo tutto il procasso grafico determinativo dei punti $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$.

Segue intanto che opponendo ordinatamente ai vertici i simboli corrispondenti già dichiarati, ogni vertice conterrà due simboli che lo rappresentano.

Fissati i vertici omologhi, sarà facile, tracciando le rette passanti per essi, costruire i punti $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$, mentre sarà altresì facile comprendere che le rette attraversanti i vertici del fond. e passanti per Φ contengono rispettivamente i punti Φ_1, Φ_2, Φ_3 a quelli associali.

Oss. - A secondo del valore scelto di λ può accadere che i triangoli delle parallele di ogni coppia corrispondente ai punti esterni Φ_1, Φ_2, Φ_3 siano da una medesima banda rispetto al corrispondente punto Φ_i (λ sufficientemente piccolo). E può anche accadere che ogni punto esterno Φ_i lasci da bande opposte, rispetto a se stesso, i triangoli delle parallele della propria coppia (λ sufficientemente grande). Infine può accadere che si varifichi contemporaneamente l'uno e l'altro dei due fatti genmetrici. E noi, per brevità di linguaggio, diremo che nel primo caso abbiamo una distribuzione triangolare conforme di prima specie, nel secondo caso che abbiamo una distribuzione triangolare conforme di seconda specie, nel terzo caso, infine, che abbiamo una distribuzione triangolare mista, tale quindi che non è conforme rispetto a tutti i tre lati del fondamentale come in ciascuno degli altri due casi.

Oss. - In una distribuzione conforme di prima specie ogni lato del fond. ABC unisce i punti medi dei lati dei trapezi aventi per basi i due lati ad esso omologhi appartenenti ai triangoli della coppia che corrisponde al punto esterno Φ_i che è stato costruito relativamente a quel lato: sarà allora uguale alla semisomma di quei due lati. Ed unisce altresì i punti medi dei lati dei trapezi aventi per basi i due lati ad esso omologhi appartenenti ai triangoli $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ della coppia corrispondente al punto interno Φ.

In una distribuzione conforme di seconda specie ogni lato del fond. unisce invece i punti medi delle diagonali di quei trapezi: sarà dunque uguale alla semidifferenza delle

Digitized by Google

loro basi che rappresentano, al solito, i due lati ad esso omologhi appartenenti ai triangoli delle convenienti coppie; etc. etc.

2. Una quaterna singolare di punti (*Il punto di* LEMOINE, *K, ed i punti essimediani associati,* K_1; K_2, K_3).

Tutte le considerazioni fatte al n. 1 sono, s'intende, applicabili al caso singolarissimo che i segmenti prestabiliti X, Y, Z siano i lati $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ del fond. ABC, di area Δ. Le (1) diventano allora

$$D_a = \lambda \cdot a \ , \ D_b = \lambda \cdot b \ , \ D_c = \lambda \cdot c \qquad (2)$$

λ essendo sempre un fattore arbitrario di proporzionalità.

Noi avremo costruito quindi i punti Φ del piano di ABC tali che le distanze di ciascuno di essi dai lati di codesto triangolo sono rispett. proporzionali ai lati stessi. Ora la recente Geom. del triangolo ci apprende (1) che codesti punti sono il *punto di* LEMOINE K ed i tre *punti essimediani* K_1, K_2, K_3 associati.

Oss. - Posto

$$g = \frac{2\Delta}{a^2 + b^2 + c^2} \ , \ u = \frac{2\Delta}{b^2 + c^2 - a^2} \ , \ v = \frac{2\Delta}{c^2 + a^2 - b^2} \ ,$$

$$w = \frac{2\Delta}{a^2 + b^2 - c^2}$$

è ben noto (*i*) che:

$$\begin{array}{l|l|l|l} KK_a = g \cdot a & K_1P_a = u \cdot a & K_2Q_a = v \cdot a & K_3S_a = w \cdot a \\ KK_b = g \cdot b & K_1P_b = u \cdot b & K_2Q_b = v \cdot b & K_3S_b = w \cdot b \\ KK_c = g \cdot c & K_1P_c = u \cdot c & K_2Q_c = v \cdot c & K_3S_c = w \cdot c \end{array}$$

nelle quali $K_a \ldots P_a \ldots S_c$ rappresentano i piedi delle perpendicolari condotte dai punti K, K_1, K_2, K_3 sui lati o sui prolungamenti dei lati del fond. ABC.

---

(1) Vedi l'unico trattato esistente in Italia: C. ALASIA, *La rec. Geom. del triangolo*, pp. 146. S. Lapi, Città di Castello, 1900.

(*i*) Queste formule trovansi, scritte altrimenti e materialmente errate, a pag. 152 del trattato dell'ALASIA, dove è appena accennata la dimostrazione che trovasi, invece, nel modo più naturale, dichiarata nel mio lavoro citato alla fine del presente scritto.

Digitized by Google

Se il triangolo ABC è, ad esempio, ottusangolo nel vertice A, si pone $u = -\frac{2\Delta}{b^2 + c^2 - a^2}$.

3. Costruzioni tipiche. - Per costruire il *punto di* LEMOINE K ed i *punti essimediani* K_1, K_2, K_3 associati, col sistema delle parallele al contorno, il relativo procedimento grafico sarebbe lungo se non ci mettessimo — come dicevamo al n. 1 — nell' ipotesi di un unico valore di λ convenientemente scelto, onde fornisca corrispondentemente costruzioni tipiche molto eleganti e tali che qualcuna di esse accoppi anche il pregio della pratica utilità (1).

α) Il caso più immediato corrisponde a $\lambda = 1$, talchè sia per le (2) $D_a = a$, $D_b = b$, $D_c = c$. Si può quindi dire che costruendo, tutti esternamente o tutti internamente, i quadrati sui lati del fond., il prolungamento dei loro lati che sono opposti a quelli del fond., determina nei due procedimenti, che allo scopo finale sono vicendevolmente sostituibili, rispett. i triangoli delle parallelè $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, simili ad ABC, ciascuno dei quali è tale che le congiungenti i suoi vertici con gli omologhi del fond. concorrono nel punto di LEMOINE, K.

Se vogliamo, ad esempio, il punto essimediano K_1 in corrispondenza del lato $BC = a$, prescindendo dalla posizione dei punti K_1, K_2, K_3, costruiamo i quadrati esternamente sui lati AB, AC e il quadrato internamente sul lato BC, od anche i quadrati interni sui lati AB, AC e il quadrato esterno sul lato BC: Il prolungamento dei loro lati che sono opposti a quelli del fond. determina nel primo caso il triangolo $D_1E_1F_1$ e nel secondo caso il triangolo $D_2E_2F_2$: entrambi sono simili al fond. ABC.

Ciascuno di essi è tale che le congiungenti i suoi vertici D_i, E_i, F_i $(i = 1, 2)$ con gli omologhi A, B, C del fond. concorrono nel punto essimediano K_1.

Quando necessiti la determinazione simultanea dei punti K_1, K_2, K_3, K, l' intersezione dei lati o dei prolungamenti

(1) Vedi in ALASIA, *loc. cit.*, pp. 146,.., le costruzioni usuali, di natura ben differente.

Digitized by Google

dei lati dei triangoli $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, darà, come sappiamo dalle GENERALITÀ del n. 1, tutti i vertici dei vari triangoli delle parallele, onde le rette passanti pei vertici omologhi fisseranno poi la posizione dei punti richiesti (1).

β) D'altronde possiamo sostituire alla costruzione di GREBE (1) due altre costruzioni tipiche eleganti di cui una di esse (la γ) è *geometrograficamente* preferibile e di più include la determinazione del *punti di* TORRICELLI.

Intanto per $\lambda = \frac{1}{2}$ veniamo a sostituire alle rette che contengono i lati dei quadrati opposti a quelli del fond., contemplati nel caso α), le tangenti ai cerchi aventi per diametro i lati del fond., condotte — s'intende — parallelamente a questi lati per poi procedere nelle varie fasi determinative dei punti K, K_1, K_2, K_3 al modo istesso già dichiarato nelle GENERALITÀ ed anche nel caso α) or ora menzionato.

γ) E quando sia $\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, veniamo ad adoperare in tutte le fasi analoghe determinative di quei punti, *striscie* aventi per larghezza le altezze dei vari triangoli equilateri costruiti sui lati del fondamentale.

Oss. - Fra tutte le costruzioni dei punti K, K_1, K_2, K_3, mediante le parallele al contorno, la γ) è quella che è più consigliabile dal punto di vista pratico. Di più — come dicevamo — essa include la costruzione dei *punti di* TORRICELLI (detti anche *centri isogoni, punti gemelli*). Infatti le congiungenti i vertici del fond. con i vertici opposti dei triangoli equilateri costruiti tutti esternamente o tutti inter-

(1) NOTA. Questa costruzione trovasi incompleta, perchè solo esposta pel caso del punto di LEMOINE, a pag. 150 del trattato già indicato, del prof. C. ALASIA. L'A. in calce alla stessa pag. aggiunge « È per questa proprietà segnalata da GREBE che al punto K si da qualche volta il nome di *punto di* GREBE, specialmente in Germania ». L'accoglienza lusinghiera che ebbe codesta costruz. incompleta (ARCHIVIO DI GRUNERT, 1847) si giustifica osservando che nel 1847 era generalmente ignota la legge di proporzionalità delle distanze di K dai lati ai lati stessi. (Però in S. LHUILIER, *Elem. d'Analyse géom.*, 1809, trovasi contemplata tale legge di proporz. Vedi ALASIA, *loc. cit.* p. VI, intr. storica). Talchè la costruzione di GREBE venne considerata, erroneamente, come proprietà intrinseca legata ai quadrati costruiti sui del fond. e non già, come è di fatto, il più immediato caso particolare di un caso altresì particolare di leggi geometriche generalissime qui adombrate (al n. 1).

Digitized by Google

namente sui lati del fond. concorrono, come si sa, nei punti di TORRICELLI, V, V'.

4. Esempio notabile di una costruzione sull'angolo e sui punti di BROCARD. Costruiamo *l'angolo* ω e quindi i *punti* di BROCARD Ω, Ω', col sistema delle parallele al contorno del fondamentale.

Sappiamo (1) che Ω, Ω' sono definiti dall'uguaglianza angolare

$$\Omega CB = \Omega AC = \Omega BA = \Omega' BC = \Omega' CA = \Omega' AB = \omega \qquad (x)$$

e, se poniamo $j = 2\Delta \frac{abc}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}$, le distanze del punto Ω dai lati a. b, c del fond. son date dalle relazioni:

$$\Omega\Omega_a = j \cdot \frac{b}{c} \ , \ \Omega\Omega_b = j \cdot \frac{c}{a} \ , \ \Omega\Omega_c = j \cdot \frac{a}{b} \qquad (y)$$

e quelle corrispondenti relative ad Ω' si deducono dalle (y) invertendo la parte frazionaria.

Scegliamo, ad es., i lati $BC = a$, $CA = b$, concorrenti in C. Avremo per le (y) $\frac{\Omega\Omega_a}{\Omega\Omega_b} = \frac{ab}{c^2}$. Se quindi tracciamo le rette parallele ai lati BC, CA, tutte e due esternamente o tutte e due internamente, alle rispettive distanze dai lati che stiano nel rapporto ultimamente determinato, esse, incontrandosi in C_1, individueranno la retta C_1C che formerà con il lato CB l'angolo ω di BROCARD. Ed ecco l'elegante costruzione: Prolunghiamo il lato $BC = a$ di $CA' = CA = b$ e su questo prolungamento pigliamo $CS = AB = c$. Descritta la circonferenza di diametro BA' e condotta la perpendicolare in C a BA', diciamo R il punto d'incontro con la semicirconferenza: è $CR = \sqrt{ab}$. Uniamo R con S e sia H il piede de l'altezza relativa all'ipotenusa del triangolo rett. SCR così determinato. Avremo $\frac{RH}{SH} = \frac{CR^2}{CS^2} = \frac{ab}{c^2} = \frac{\Omega\Omega_a}{\Omega\Omega_b}$. Dunque le rette parallele ai lati CB, CA rispettivamente alle distanze RH, SH da essi incontrandosi nel punto C_1 determinano la retta C_1C che forma con il lato BC l'angolo ω richiesto. I punti Ω, Ω' deduconsi poi direttamente mediante le (x).

(seguito e fine al prossimo numero)

(1) ALASIA, *loc. cit.* pp. 162,...

Digitized by Google

CORRISPONDENZA

Da una Lettera, del 6 ottobre 1929 indirizzata al Direttore del Bollettino dall' illustre prof. MICHELE DE FRANCHIS dell' Ateneo palermitano, Direttore dei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.

Le figure convesse ed un modo di enunciare il postulato di EUCLIDE ed il postulato di continuità.

La lettura dell' interessantissima nota pubblicata dal Prof. SEVERI recentemente in questo Bollettino mi richiama alla memoria una osservazione inedita da me fatta durante la compilazione della mia « Geometria elementare ».

L'osservazione è questa: se si chiama *figura convessa* una figura tale che contenendo due punti debba anche contenere il segmento di retta che li ha per estremi (MINKOWSKI, PEANO, ecc.) e se si chiama *figura convessa determinata da una figura data* la figura costituita dai punti comuni a tutte le figure convesse contenenti la data, il postulato di continuità per la retta può essere enunciato così: *sulla retta le sole figure convesse (non vuote e non riducentisi a un sol punto) sono i segmenti, privati o no dell' origine, e la retta* (1).

Al postulato di EUCLIDE si può dare invece questa forma: *la figura convessa determinata dai lati di un angolo convesso è l'angolo stesso.* Ricordo che l'angolo convesso determinato da due semirette aventi la stessa origine ma non appartenenti ad una stessa retta si può definire come il luogo dei punti del piano di queste due semirette, i quali giacciano dalla stessa banda di una qualunque di esse rispetto alla retta contenente l'altra.

Dico ciò a solo titolo di curiosità e non perchè ritenga didatticamente opportune queste enunciazioni, delle quali infatti non feci uso nel mio libro.

MICHELE DE FRANCHIS

(1) Questo è stato anche approvato da SEVERI nella nota predetta. In questa enunciazione del principio di continuità non entra il concetto di figura convessa *determinata* da una figura data (concetto abbastanza complesso), il quale entra invece nella enunciazione seguente del postulato euclideo.

Digitized by Google

Rassegna dei Congressi

XVIII Riunione della Società Italiana per il Progresso delle Scienze

Dichiariamo subito che non è nostra intenzione dare ai Lettori una relazione particolareggiata di questo Congresso: ce ne manca lo spazio e il tempo, e d'altra parte non dimentichiamo che il Comitato ordinatore di questa Riunione ebbe cura di dare notizia, quotidianamente, a tutti i giornali, a mezzo di uno speciale comunicato dell'Agenzia Stefani, dei lavori più notevoli giornalmente svoltisi. Il resto si apprenderà poi dagli Atti, che, certamente. saranno pubblicati con quella cura e con quella sollecitudine, che sono tradizionali per queste Riunioni della S. I. per il Progresso delle Scienze.

Ci limitiamo dunque ad alcune impressioni personali e ad alcune notizie piú dettagliate sulle riunioni tenute dai Soci dell'Associazione Mathesis nei giorni 22 e 24 settembre, riunioni che toccano assai da vicino molti fra i Lettori di questo Bollettino.

Una prima impressione è di vero rammarico per la scelta dei giorni — dal 18 al 25 settembre — epoca d'esami per le Scuole medie, onde furono pochissimi i Presidi e i Professori di Scuole medie che poterono intervenire: gli stessi Presidi e Professori delle Scuole medie di Firenze doverono, in massima parte, limitarsi a qualche apparizione. Assai più propizia, pei docenti delle Scuole medie, sarebbe stata la prima metà di settembre, come fu l'anno passato pel Congresso internazionale matematico di Bologna, al quale infatti non mancò un largo intervento di Presidi e Professori delle nostre Scuole medie; ed è da augurarsi che ciò sia tenuto presente l'anno venturo per la XIX Riunione che la S. I. per il P. delle S. terrà a Trento: queste Riunioni non sono semplici riunioni scientifiche, ma pure alte affermazioni di italianità e della inscindibile unità della cultura italiana, e i Professori delle Scuole Medie domandano fin d'ora, d'essere posti in grado di partecipare liberamente all'altissima affermazione d'italianità che la Società per il P. delle S. si prefigge di fare, l'anno venturo, nella Venezia Tridentina (1).

Altro rammarico vogliamo esprimere per la troppa materia compresa nell'ordine dei lavori, a decorrere dalla seconda giornata del Congresso, tanto più che rimase lettera morta la norma che tutti i Discorsi, a Classi

(1) Ben s'intende che, qualora l'anno scolastico delle Scuole medie ritornasse ad avere inizio col 1° ottobre, allora andrebbe benissimo anche la seconda metà di settembre per queste Riunioni come per altre simili.

Digitized by Google

riunite o di Classe, non potessero avere una durata superiore ai 30 minuti: quasi tutti i Discorsi, invece, ebbero la durata di un'ora almeno, e così avvenne più volte, che l'Aula Magna si andò vuotando, per la naturale stanchezza sopravvenuta dopo due o tre di quei Discorsi, nonostante che già stesse alla tribuna un altro oratore, che, per la propria fama scientifica e per il tema di cui trattava, avrebbe meritato più imponente uditorio e più intensa attenzione. Basterà un'indicazione delle ore d'inizio delle varie sedute per dare un'idea dell'affaticamento che doveva derivarne a chi avesse voluto assistervi per intero: ore 9, per 4 Discorsi a classi riunite; ore 14,30, per 5 Discorsi di Classe; ore 17,30, per le Riunioni delle Sezioni che si protraevano fino alle 19 o alle 19,30; ore 21 Conferenze alla Mostra della Storia della Scienza... a cui poi si aggiungevano altre riunioni per gli appartenenti alle varie Società scientifiche.... e vi si aggiunse pure la ripetizione, nel Duomo, nei giorni 21 e 23, della classica esperienza del Foucault, per parte dell'illustre Scolopio Guido Alfani.

Tutto ciò vien detto, ben s'intende, non per muovere appunto a chicchessia, chè anzi gran plauso meritano i componenti il Comitato ordinatore e in specie i membri della Giunta Esecutiva, di cui vogliamo particolarmente ricordare i nomi, a cominciare da quello del suo illustre Presidente On. Sen. Principe Piero Ginori Conti e proseguendo coi valorosi ed infaticabili Prof. Giorgio Abetti (Vice Presidente) e Prof. Giovanni Sansone (Segretario) meritevoli davvero di ogni elogio per l'opera illuminata e solerte prestata, prima e durante il Congresso.

Grata memoria rimarrà poi, perennemente, in coloro che parteciparono al magnifico ricevimento offerto dal Comune di Firenze, al Giardino di Bobòli, nel pomeriggio del 22 settembre; alla gita del 20 settembre, da Firenze fino ai Soffioni boraciferi di Larderello, gita dalla quale si ritornò ammiratissimi della illuminata saggezza del Principe Ginori-Conti e della Sua regale ospitalità; ed infine alla gita, altamente suggestiva, effettuata il 25 settembre. da Firenze fino alla Verna, sotto la direzione personale del Comm. Luigi Lodi Focardi, che ben predispose, per una breve sosta a Volterra, all'andata, e per una più lunga fermata, al ritorno, a Poppi e al suo storico Castello.

Dagli Atti del Congresso, meglio che da un resoconto sommario, apparirà l'importanza grandissima dei resultati scientifici portati al Congresso, anche colle Comunicazioni alle varie Sezioni, presentatevi da Maestri già illustri e da loro allievi, ben promettenti: noi seguimmo specialmente i lavori della Sez. I della Classe A, i quali ebbero un inizio assai simpatico con le comunicazioni del prof. Giuseppe Vitali « *Sulla equazione secolare* » e dei suoi allievi dell'Ateneo padovano, Sig.na dott. Rita Liceni « *Sull'uso della rappresentazione funzionale nello studio della Geometria* » e dott. Giuseppe Aliprandi « *Sulle normali principali della varietà* ».

La ripetizione dell'esperienza del Foucault fu fatta con una massa pendolare di 100 Kg. sostenuta da un filo d'acciaio di 106 metri infisso

Digitized by Google

nel centro della Cupola di S. Maria del Fiore, col periodo (semplice) di 10",39 e riuscì perfettamente dando uno spostamento lineare (circonferenza di 5 metri di diametro) di *mm.* 0,126 per ogni minuto secondo, e quindi di *mm.* 7,56 al minuto, spostamento che riuscì ben sensibile nello spazio di mezz'ora pel quale l'esperienza si protrasse; e tutti i presenti si compiacquero vivamente coll'illustre Padre Alfani per il godimento che Egli aveva loro procurato.

Interessante, e molto commovente, fu la Conferenza tenuta nella Sala delle Conferenze dell'Esposizione di Storia delle Scienze, dal Capitano di Vascello G. Romagna « *Sui risultati scientifici ottenuti alle Spitzbergen nel 1928, dalla R. N. Città di Milano.*

Alberto Conti

* * *

La questione dei Professori di matematica e fisica e il Congresso della Mathesis

Nel N. 4 del corr. anno del *Periodico di Matematiche*, sotto la rubrica *Atti della Società Italiana di Scienze fisiche e matematiche « Mathesis »* fu detto che, in seguito ad invito della Sezione di Firenze e ad accordi intervenuti colla Società Italiana per il Progresso delle Scienze, il Congresso della Mathesis avrebbe avuto luogo a Firenze, insieme a quello della predetta Società, nella settimana dal 18 al 24 di settembre.

Un Congresso di nuovo genere, indetto, senza indicare nemmeno uno dei Temi, che vi sarebbero stati discussi.... Strada facendo, da un Supplemento al Programma definitivo della XVIII Riunione della S. I. per il P. d. S., distribuito il giorno dell'inaugurazione di questa riunione, si venne a sapere dai Soci della Mathesis convenuti a Firenze, (tra cui un numero assai esiguo di Presidi e Professori di Scuole medie, per le ragioni da noi già accennate nel resoconto del Congresso) si venne a sapere, dunque, che divenivano materia del Congresso della Mathesis alcuni dei Discorsi, che già erano indicati come facenti parte del programma della XVIII Riunione della S. I. per il P. delle S. e precisamente, pel giorno 21 settembre alle ore 9 il discorso del Prof. O. M. Corbino su « *I compiti nuovi della fisica sperimentale* » e, per lo stesso giorno, alle ore 14,30, il discorso del prof. E. Persico su « *Il principio di causalità nella fisica moderna* »; e poi quello del prof. E. Fermi su « *I fondamenti sperimentali delle nuove teorie fisiche* ».

Pel giorno 23 era annunziato il discorso del prof. Federigo Enriques su « *La geometria non euclidea e i presupposti filosofici della teoria della relatività;* e per lo stesso giorno 23, alle ore 17, era fissata *l'assemblea sociale* coll'ordine del giorno:

1. discussione sui discorsi dei Prof.i Persico e Fermi;
2. l'insegnamento della matematica nelle scuole medie.

Digitized by Google

Nel fatto, le cose andarono diversamente, giacchè la sera stessa del 21, dopo i discorsi dei Prof.i Persico e Fermi, si ebbe un inizio della discussione su di essi. Durava ancora l'eco degli applausi che avevano salutato la fine del discorso del giovanissimo Accademico d'Italia, Enrico Fermi, quando corse nell'aria un grido isolato, *ritorniamo a Galileo*, grido che l'Assemblea lasciò cadere senz'altro, ma a cui l'indomani mattina l'on. Corbino, sempre arguto e brillantissimo, opponeva con giusto criterio. che assai probabilmente, quando Galileo annunziava le sue teorie e le sue scoperte si sarà gridato: *ritorniamo ad Aristotele !*

Sorse poi Alessandro Padoa colla sua ferrea logica, colla sua dialettica stringente e colla sua frase sempre elegante, con determinate domande alle quali Enrico Persico volle rispondere. Qualche altro pure intervenne nella discussione fino a che il prof. Federigo Enriques, che presiedeva, avvertì, e fece avvertire all'Assemblea, che, secondo l'ordine dei lavori, dovevano seguire altri tre discorsi di classe, mentre la discussione iniziata era fissata per lunedì. Comunicò pertanto, d'improvviso, che, anzichè lunedì tale discussione sarebbe continuata l'indomani mattina, Domenica, alle 10 e aggiunse — ma non tutti sentirono e nessun avviso fu messo all'ingresso, in modo che potessero prenderne conoscenza tutti i Congressisti e Soci della Mathesis — che terminata la detta discussione, si sarebbe esaurito l'ordine del giorno dell'Assemblea Sociale della Mathesis, trattando anche l'altro argomento dell'insegnamento della matematica nelle Scuole medie.

Domenica mattina 22 settembre, i Congressisti erano in massima parte impegnati nella visita dell'Esposizione di Storia delle Scienze e degli Istituti Scientifici della città, secondo speciale avviso stampato nel Supplemento al Programma, col quale essi erano stati pregati di mettersi in nota negli appositi elenchi alla Segreteria del Congresso, per queste visite già predisposte per questa domenica dalle 10 alle 12.

Fu pertanto assai esiguo il numero dei Congressisti presenti, alle 10, nell'Aula Magna della R. Università; ma certo non mancarono coloro che già si erano appassionati alla discussione iniziatasi la sera innanzi sui discorsi dei Prof. Persico e Fermi. E per più d'un'ora vi fu un'ampia discussione a cui parteciparono i Prof.i Enriques, Corbino, Persico, Padoa, Mochi, e qualche altro di cui ci è sfuggito il nome, discussione elevatissima, e che contribuì a chiarificare abbastanza le idee.

Erano quasi le $11^h 30^m$ quando, assottigliatosi ancora di più il numero dei presenti, si passò all'altro argomento « L'insegnamento della matematica nelle Scuole medie », sempre fungendo da Presidente il Prof. Enriques Federigo e da Segretario il prof. Cassina: notammo, tra gli altri presenti, i prof.i universitari Peano, Scorza, Vitali, Nicoletti, Laura, Sansone, Bortolotti e delle Scuole medie il Preside Candido, i prof.i Maroni, Di Noi, Padoa, Timpanaro, Speranza, Civinini e qualche altro di cui ci sfugge la memoria o di cui non raccogliemmo il nome. Era pre-

Digitized by Google

sente anche il Comm. Prof. Alfredo Perna che, come osservatore, seguì diligentemente tutti i lavori del Congresso, meritando veramente per questa sua assiduità l'elogio che nel discorso di chiusura, gli tributò l'on. Blanc Presidente della S. I. pel progresso delle Scienze.

Superata la pregiudiziale opposta dal prof. Padoa circa la irregolarità di anticipare la discussione d'un argomento, che, secondo l'ordine del giorno, avrebbe dovuto esser trattato nel pomeriggio dell'indomani, si iniziò un'amichevole discussione coll'intesa che ogni decisione sarebbe stata rimessa al giorno dopo.

Noi, che avevamo preso la parola per pregare il Collega Padoa di non insistere nella sua pregiudiziale, poichè non ci lusingavamo di aver presenti molti Soci di più il giorno dopo, aprimmo senz'altro la discussione esprimendo l'augurio che questa Riunione avesse la caratteristica di non proporre, e di non votare, alcun ordine del giorno sulla vexata quaestio, ormai più che matura, e sulla quale non c'è che da raccogliere i resultati di ben sei anni di esperienza per trarne le necessarie conseguenze.

Affermammo che l'abbinamento della matematica colla fisica assai seducente teoricamente parlando, è resultato ben difficilmente attuabile, non soltanto per parte degli insegnanti anziani ma anche per parte dei giovani assunti nell'insegnamento dal 1923 in poi.

Affermammo che indiscutibile è poi l'aggravio enorme piombato sui professori di matematica e fisica delle Scuole medie, e ne citammo i noti casi più tipici; rilevammo le sperequazioni esistenti fra l'orario dei prof.i di matematica e fisica e quello dei professori di altre discipline, citando, anche questa volta, i casi più tipici.

Rilevammo i molti vuoti verificatisi durante questi ultimi sei anni, nei ruoli dei prof.i di matematica, per dimissione, per passaggio ad altro ufficio, per collocamento in pensione, per morte.... dicendo della diminuita resistenza fisica dei Colleghi assoggettati a tanto aggravio, e a tante ansie, e rivolgendo un pensiero pieno di commozione verso la Memoria dei Colleghi caduti....

Dicemmo delle buone disposizioni già dimostrate dall'ex Ministro Belluzzo e di quelle manifestate dall'attuale Direttore Generale dell'Istruzione Media Comm. Trabalza, ed affermammo che ci pareva opportunissima l'elaborazione di un Rapporto da parte del Presidente della Mathesis e la presentazione di esso, sotto gli auspici dell'on. Blanc Presidente della Società Italiana per il P. delle S., non solo al nuovo Ministro della P. I. ma anche a S. E. Benito Mussolini il vincitore d'ogni battaglia da Lui capeggiata. Dicemmo che questo Rapporto, oltre che prospettare la situazione in cui si trovano gli insegnamenti di matematica e fisica, potrebbe accennare a qualche rimedio tra cui, sopratutto, un *congruo aumento del numero delle cattedre di ruolo di matematica e fisica o di una sola delle due materie,* lasciando al prudente arbitrio dell'Amministrazione di disporre di queste nuove cattedre, a seconda delle esigenze delle varie Sedi, delle attitudini dei vari insegnanti e delle

Digitized by Google

energie che ancora posseggano. Subordinatamente accennammo all'istituzione di *incarichi* per una parte delle ore d'insegnamento che attualmente gravano tutte su uno stesso insegnante. Aggiungemmo che con l'istituzione di questi incarichi si potrebbe provvedere anche, almeno per le Scuole con più d'un corso ordinario, allo sdoppiamento delle due materie. Ed ispirandoci ad un senso realistico, e perciò tenendo conto della poca convenienza di istituire un incarico per quegli istituti con un solo corso e di piccole sedi, per cui addivenendosi allo sgravio su accennato restassero soltanto 5 o 6 ore da assegnare ad altra persona, accennammo anche all'opportunità di dare, in questo caso, una remunerazione all'insegnante per quel numero d'ore di cui sarebbero stati sgravati gli insegnanti di altre sedi.

Accennammo pure a qualche altro rimedio, ed osservammo che il Presidente della Mathesis, nello stendere tale Rapporto, aveva pure una buona occasione per chiarire meglio le ragioni delle proposte da Lui sostenute, nel 1923, riguardo agli orari per lo studio della matematica nei vari ordini e gradi di Scuole medie.

Concludemmo dichiarando la nostra fiducia che per il progresso degli studi scientifici il che è quanto dire per l'avvenire della nostra Patria non tardino di più dei provvedimenti che leniscano, almeno in parte, il disagio lamentato.

Per la verità, dobbiamo registrare che le nostre parole furono accolte molto favorevolmente da tutti i presenti, che, alla fine del nostro modesto discorso, ci onorarono di un caloroso applauso.

Parlarono, dopo di noi, il prof. Bortolotti, il Preside Candido, il prof. Maroni, il prof. Sansone, il prof. Scorza, il Presidente prof. Enriques e altri, passando ad occuparsi anche di altre questioni, donde si delineò il consenso:

a) sull'urgenza di sistemare la questione dell'aggravio degli insegnanti di matematica e fisica e di quelli di matematica computisteria e scienze naturali;

b) sulla convenienza che gli insegnanti tengano presenti, non solo le esigenze dell'esame finale di Stato a cui devono esser sottoposti gli allievi; ma anche, e sopratutto, le supreme esigenze del sapere e della vita moderna.

c) sulla necessità che i membri delle Commissioni d'esame e così gli insegnanti tengono presenti le *avvertenze* allegate al programma ufficiale governativo per l'esame di matematica e fisica, avvertenze che, bene intese, possono condurre ad una seria valutazione della preparazione scientifica dei candidati senza eccessiva oppressione di questi; ma pur senza abbassare il tono dell'insegnamento scientifico da quel ragionevole livello a cui esso deve essere mantenuto in una Scuola media di secondo grado.

d) sull'opportunità che pei futuri concorsi per cattedre di mate-

Digitized by Google

matica e di fisica abbinate si esiga anche una prova pratica che attesti l'attitudine dei concorrenti e la loro preparazione alla parte sperimentata.

e) sulla convenienza che, anche per l'ammissione agli esami di maturità, gli alunni debbano avere almeno $^{8}/_{10}$ di condotta nello scrutinio finale.

Il 23 alle 16 è proseguita l'Assemblea sociale con la partecipazione di altri Soci della Mathesis, Oltre ai presenti della mattina del 22 abbiamo notato i prof.i universitari Giorgi e Cisotti il dott. Aliprandi, le sig.ne Liceni, Arneri, Butti, il Preside Ceretti.

Il prof. Padoa ha fatto omaggio alla Presidenza della Mathesis della 1ª Parte del 1° volume dell'*Enciclopedia delle Matematiche Elementari*, opera ideata dal compianto Bonola e dal prof. Berzolari e che incomincia a vedere la luce per merito dei prof.i Berzolari, Vivanti e Padoa e dell'Editore Hoepli. L'Assemblea plaude ai promotori di questa pubblicazione.

Ripresa la discussione sull'insegnamento della matematica nelle Scuole medie, il prof. Enriques riassume la discussione avvenuta la mattina precedente e annunzia che del disagio degli insegnanti di matematica e fisica si è parlato anche in seno al Comitato delle ricerche, che ha affidato al prof. Scorza l'incarico di redigere un rapporto sulla questione.

In merito all'abbinamento il prof. Enriques tiene ad informare che in Francia tale abbinamento non esiste e che in America non ha dato buoni frutti.

Il Preside Candido si manifesta contrario ad una distinzione tra città e città e chiede come provvedimento uniforme per tutti gli istituti, lo sbinamento.

Il prof. Bortolotti vorrebbe invece che si facesse una distinzione tra gli istituti a seconda della loro popolazione scolastica.

Il prof. Padoa, per la difficoltà economica da taluno accennata, nota che fu realizzata un'economia riducendo 3 cattebre a 1, onde non gli pare che sarebbe uno spreco il ripristinare lo stato di prima. Fa poi notare quanto sia stato illogico che nel dare un nuovo insegnamento all'insegnante di matematica. si sia ancora accresciuto il suo orario complessivo. Insiste nel rilevare le sperequazioni d'orario esistenti, anche negli stessi ruoli degli insegnanti di matematica e facendo propria una proposta del prof. Di Noi propone che si chieda l'assegnazione delle 115 cattedre di ruolo di matematica dei ginnasi isolati ad altrettanti ginnasi-licei, affidando per semplice incarico l'insegnamento della matematica nei detti Ginnasi.

Accenna allo scandalo dell'*ora* di matematica nella 1ª Ginnasiale e alla sproporzione esistente tra 1 ora sola per la matematica e più di quindici ore tra grammatica italiana e latina. Conclude dichiarando che l'esame di Stato toglie ogni personalità dall'insegnamento e che l'insieme delle condizioni fatte dalla riforma Gentile ha portato ad un decadimento dell'attività scientifica degli insegnanti e degli alunni.

Digitized by Google

Il prof. Bortolotti raccomanda che sia posta innanzi solo in via subordinatissima, la proposta di pagare con una remunerazione speciale una parte delle 22 ore affidate all'insegnante di matematica e fisica.

Altre osservazioni aggiunge il prof. Cassina, circa alla preparazione degli insegnanti, dopo di che il Presidente dichiara che terrà debito conto della discussione avvenuta nella stesura del Rapporto che si propone di inoltrare a S E. il Ministro della P. I. e a S. E. il Capo del Governo. Hanno così termine i lavori del Congresso della Mathesis.

A. Conti

***

Postilla

Per la questione, urgente, dell'eliminazione dell'aggravio degli insegnanti di matematica e fisica e di quelli di materie scientifiche delle Scuole di 1° grado importa che si fermi bene l'attenzione dei Colleghi sulla necessità di cooperarvi, tutti, con uno studio accurato dei vari modi che possono contribuire alla risoluzione della questione senza aggravio pel Bilancio dello Stato,

Il Collega prof. Di Noi ha dato il buon esempio additando nei ginnasi isolati una fonte di un buon centinaio di cattedre di ruolo. Ma questi sono, a quanto pare, 115, mentre i ginnasi-licei sono 165. Poi c'è da pensare alle altre Scuole. Bisogna quindi trovare altri mezzi nei Capitoli del Bilancio. Nelle conversazioni seguite alle discussioni del Congresso, si è già accennato a qualche altro mezzo: una tassa di gabinetto per gli alunni, almeno per quelli degli istituti di 2° grado;

poi un po' d'insegnamento (sulle 9 o 10 ore) ai Presidi dei Licei o degli Istituti tecnici o Magistrali con un solo corso ordinario;

e così qualche incarico per quegli insegnanti che hanno sulle 9 o 10 ore d'orario per modo che per tutti gli insegnanti, l'orario si aggiri dalle 15 alle 18 ore settimanali.

Questi e altri mezzi devono essere studiati attentamente da qualche giovane Collega di buona volontà... come una trentina d'anni fa vi furono giovani insegnanti che, coi loro studi accurati, compulsando statistiche, annuari, bilanci ecc. — ricordiamo per tutti il prof. Tommaso Cifarelli — vennero a serie conclusioni, che meritarono d'esser prese in considerazione dai pubblici poteri ai quali non dispiacque questa collaborazione.

Giovani Colleghi al lavoro, nel vostro interesse, e pel bene supremo della Scuola e della Nazione!

A. C.

Digitized by Google

RASSEGNA DELLE RIVISTE

Nell'ultimo fascicolo del *Periodico di Matematiche* [Serie IV - Vol. IX - N. 5 (1 novembre 1929)] è contenuto un articolo di H GEPPERT (dell'Università di Giessen) « *Sulle costruzioni geometriche che si eseguiscono colla riga ed un compasso ad apertura fissa* ». In proposito ci piace rammentare i due articoli di CARLO PAGLIANO (allora Prof. nel R. Istituto Tecnico di Vercelli). pubblicati sulla I Annata di questo Bollettino, il primo, dal titolo « *La disfida Matematica fra N. Tartaglia e L. Ferrari e la risoluzione dei problemi della Geometria elementare mediante la riga e il compasso di apertura fissa* » [da pag. 94 a pag. 104 del n. 3 dell'Anno I (1902) del *Bollettino di Matematica*] e l'altro dal titolo « *Sull'uso del compasso di apertura fissa nella risoluzione dei problemi della Geometria elementare e sulla sostituzione di un disco al predetto compasso* » [da pag. 201 a pag. 209 del n. 6 dello stesso Anno I (1902) del *Bollettino di Matematica*].

***

Il *Periodico di Matematica*, nello stesso fascicolo di sopra citato, contiene un'articolo di A. M. BEDARIDA « *Alcune considerazioni di Aritmetica razionale* »: sono considerazioni che si riferiscono ad una formula che dà il m. c. m. di più numeri e ad un conseguente teorema. Dice il BEDARIDA che « *I trattati in uso nelle nostre Scuole Secondarie non considerano l'estensione, al caso di più di 2 numeri interi*, della nota formola $m = \frac{a_1 a_2}{\delta}$ dove m, δ indicano rispettivamente il m. c. m. e il m. c. d. dei due numeri interi rappresentati da a_1, a_2. Dice ancora il Bedarida che: *Soltanto trattati più estesi e meno elementari se ne occupano.* e cita a tale riguardo la *Théorie des nombres* di E. LUCAS (1891) e l'*Essai sur la Théorie des Nombres* di T. J. STIELTJES (1895). Ora è doveroso rammentare che l'estensione che il Bedarida fa poi seguire, riportandola dalle citate opere del Lucas e dello Stieltjes, fu, da oltre quindici anni fa, inserita negli *Elementi di Aritmetica (razionale)* di GAETANO FAZZARI, allora Prof. nel R. Liceo Umberto I di Palermo (Palermo Libreria editrice Ant. Trimarchi - *la 3ª edizione è in data del 1916*), e da una delle noticine storiche che il Fazzari inserì nella sua Aritmetica (*a pag. 81 della 3ª edizione*) si apprende che la generalizzazione del teorema del m. c. m. è dovuta a V. A. Lebesgue (1791-1876). Aggiungiamo anche che, sotto questa forma generale, la regola pel calcolo del m. c. m. di 3 o più numeri fu inserita pure nell'*Aritmetica pratica ad uso delle Scuole medie inferiori* di ALBERTO CONTI, Aritmetica la cui prima edizione risale al 1918, e dove la detta regola generale può vedersi enunciata e seguita da esempi a pag. 104 della I, II e III edizione e a pag. 74 della IV e della V edizione (la V è l'edizione tirata quest'anno).

ALBERTO CONTI

Digitized by Google

NOTE BIBLIOGRAFICHE

Pubblicazione recentissima

ALBERTO CONTI - *Prime nozioni di Geometria* ed uso specialmente della Scuola secondaria di Avviamento al lavoro (1° biennio). Casa Editrice R. Bemporad - L. 6.

Questo Volumetto comprende, in 120 pagine, lo svolgimento di tutto il programma di geometria del primo biennio della Scuola di Avviamento al lavoro, programma che non differisce, sostanzialmente, da quello del ginnasio inferiore, cosicchè per quanto sia stato redatto appositamente per il primo biennio della nuova Scuola secondaria di Avviamento al Lavoro, esso può essere utilmente adoprato anche per tutte e tre le classi del ginnasio inferiore. E non soltanto per queste classi del ginnasio inferiore ma anche per il primo biennio dell'istituto magistrale inferiore o dell'istituto tecnico inferiore in quel corso di natura propedeutica che si ritiene opportuno di far precedere all'esposizione razionale del programma di geometria fissato per l'esame d'ammissione alla 1ª classe del Corso Magistrale Superiore o dell'Istituto tecnico Superiore.

Questo Volumetto è stato redatto con quei criteri fondamentali, a cui l'Autore già si attenne nel Corso di Aritmetica e Geometria per le classi integrative, criteri che, a suo tempo, ebbero la piena approvazione della Commissione Centrale per l'esame dei libri di testo di cui faceva parte, per la matematica, l'illustre prof. Cipolla della R. Università di Catania.

Il libro è corredato di circa 200 figure molte delle quali furono disegnate, con amore di discepolo, dal dott. prof. RENATO MANCINELLI (ora ordinario di matematica e fisica nel R. Liceo di Spoleto).

Chiude il volumetto una raccolta di 200 esercizi e problemi di carattere prevalentemente tecnico.

La CASA EDITRICE R. BEMPORAD, per tutta la parte editoriale, e lo STABILIMENTO GRAFICO RUFFILLI a cui fu affidato il lavoro tipografico, nulla trascurarono per la migliore possibile riuscita del Volumetto, il quale si presenta in una veste simpaticissima, per la coperta, la carta e i corpi scelti. Il prezzo di vendita fu limitato a L. 6.

Durante l'anno, l'Autore preparerà una breve Appendice sulle formule letterali esprimenti le regole per la misura, e sull'uso di esse nei problemi: quantunque si tratti d'un punto del programma ufficiale di *Aritmetica* per l'esame d'ammissione alla 4ª Ginnasiale l'Autore pensa che tale Appendice debba riuscire gradita a quei Professori del Ginnasio che, senz'altro, hanno adottato questo libriccino per le prime tre classi.

Da diversi anni l'Autore veniva sollecitato dai Colleghi, che l'onorano della loro stima, in ogni parte d'Italia, a comporre un libro di geometria, almeno per la Scuola media inferiore. Egli ha cercato di corrispondere al loro desiderio con questo volumetto che Egli ha composto, quest'estate, a S. Terenzio, dinanzi all'incantevole Golfo di Spezia, ed Egli confida in una benevola accoglienza, attendendo, fin d'ora, serenamente, il giudizio che saranno per dare i Colleghi, dopo avere esaminato e dopo avere esperimentato questo suo lavoretto.

(A. C.)

☛ *Per riceverne copia in omaggio, rivolgersi alla Casa Editrice R. Bemporad - Firenze - Via Cavour 20.*

Digitized by Google

Pubblicazioni pervenute in omaggio alla Biblioteca del Bollettino

Leonida Tonelli - Serie trigonometriche - Bologna (N. Zanichelli).

Mineo Chini - Lezioni sulla teoria generale delle Geodetiche - Firenze (Ist. Geografico Militare).

Giovanni Sansone - Il teorema di oscillazione per le equazioni differenziali ordinarie del terzo ordine, lineari, omogenee, a coefficienti costanti (R. Istituto Lombardo 1929).

Giovanni Sansone - La risoluzione apiristica delle congruenze cubiche (Annali di Matematica 1929).

Giovanni Sansone - Nuove formule risolutive delle congruenze cubiche (Accad. Reale Scienze di Napoli - 1929)

Giovanni Sansone - Sul problema della risoluzione apiristica delle congruenze di grado qualunque rispetto ad un modulo primo, e la risoluzione apiristica delle congruenze di 4° grado (R. Acc. dei Lincei 1929).

Archimede Bellatalla - Sulle varietà razionali normali composte di ∞^1 spazi lineari (Acc. Scienze di Torino 1901).

Archimede Bellatalla - Dimostrazione planimetrica del teorema dei tringoli omologici (Periodico di Mat. 1908).

Archimede Bellatalla - Sul modo di dedurre da una data formula le relative formole inverse (Il Pitagora 1908).

Giuseppe Aliprandi - Sopra le normali principali (secondo il Vitali) di una superficie generica dello spazio hilbertiano (R. Acc. dei Lincei 1928).

Giuseppe Aliprandi - Determinazione della terna principale (del Vitali) di una superficie generica, considerata come terna autopolare del cono geodetico (R. Acc. dei Lincei 1929).

Giuseppe Aliprandi - Normali di particolari superficie con il σ_2 a quattro dimensioni (Boll. Unione Matematica It. 1929).

Giuseppe Aliprandi - Sulle evolute delle curve (Boll. Unione Matem. Italiana 1929).

Il Cav. Uff. Prof. *Giuseppe Aliprandi* svolge pure un'intensa attività quale Direttore del *Bollettino della Accademia di Stenografia*, organo del Segretariato Internazionale per gli studi stenografici [Direzione: Via Roma 45 - Padova (103)].

Ettore Bortolotti - I primordi della teoria generale dei gruppi di operazioni e la dimostrazione data da Paolo Ruffini della impossibilità di risolvere con funzioni trascendenti esatte le equazioni algebriche generali di grado superiore al 4° (R. Acc. di Scienze ecc. di Modena 1913).

Ettore Bortolotti - Costruzione geometrica di formule algebriche presso gli algebristi della antica scuola Italiana (Period. di Matematica 1929).

Digitized by Google

Sezione storico-bibliografica

PUBBLICATA PER CURA

DI

GINO LORIA

SOMMARIO del Fasc. 1°: A. M. Bedarida. L'opera aritmetica di Luigi Bianchi. **Recensioni.** V. Volterra. Teoria de los funcionales y de las ecuationes integrales o integrodiferenciales (*G. Vivanti*). — K. Fladt. Elementarmathematik, Quellenhefte zur Elementarmathematik, (*G. L.*). — Gustav Bauer. Vorlesungen über Algebra. Unter Benutzung des dritten Auflage des gleichnamigen Werkes (*G. L.*). — Francesco Grassi. Leggi del Volta e leggi del Gay-Lussac e del Dalton (*A. Natucci*). — Serafino Leggio. Elementi di Algebra ad uso dei Licei classici e degli Istituti tecnici superiori (*A. Natucci*). — Paolo Cattaneo. Appunti sui numeri reali (*A. Natucci*). — R. Haussner, Analytische Geometrie der Ebene. - F. Junker e A. Wittino Repertorium und Aufgabensammlung zur Differential - Rechnung. - A. Willers. Matematische Instrumente. - L. Bieberbash. Einfürung in die konforme Abbildung. - R. Baldus. Nichteuklidische Geometrie. Hyperbolische Geometrie der Ebene. - E. Kamke. Mengenlehre. - G. Hoheisel. Partielle Differentialgleichungen (*G. L.*). — G. Vivanti. Algebra ad uso degli Istituti Tecnici Superiori. - G. Vivanti. Aritmetica razionale e algebra per il Corso Magistrale Superiore (*Giuseppe Burnengo*). — **Notizie.** — **Necrologio.** H. von Mangoldt. Angelo Forti.

A. M. BEDARIDA

L' opera aritmetica di Luigi Bianchi

Il presente mio scritto sopra l'Opera aritmetica di Luigi Bianchi, sotto forma diversa e con aggiunte, (1) si trova inserito nella relazione generale che il Prof. Fubini ha compilato sopra tutta la vasta Opera del venerato Maestro e che è stata pubblicata negli Annali di Matematica.

Non mi sembra cosa inutile pubblicare, anche in questo Bollettino, questo mio lavoro in una forma, dirò — più elementare — e limitato all'Aritmetica, perchè riguarda quella parte della Sua produzione che è meno conosciuta.

I lavori del Bianchi in questo campo si possono dividere in due gruppi, aventi caratteri ben distinti: in un primo gruppo si possono assegnare tutti quelli che hanno un carattere aritmetico-geometrico e riguardano i legami tra la Teoria dei Numeri e la Teoria dei Gruppi; in un secondo, quelli aventi un carattere puramente aritmetico e riguardano le forme di Dirichlet e la Teoria degli ideali.

---

1) Le aggiunte si riferiscono ai lavori algebrici ed algebrico-geometrici.

Digitized by Google

Nella descrizione dell' Opera aritmetica del compianto Maestro terremo l'ordine cronologico, occupandoci prima delle Note e Memorie e poi dei Trattati.

Osserviamo che appartengono al primo gruppo i lavori dal II) al XIV); al secondo I) e dal XV) al XIX).

a) Note e Memorie.

I) *Sulle forme quadratiche a coefficienti ed a indeterminate complesse.* Nota: Rend. Acc. Lincei, 1890, 1° semestre.

In questa Nota vengono stabilite, per le forme di Dirichlet nel corpo $K(\sqrt{-1})$, le relazioni tra il numero delle classi delle forme primitive di 2ª, di 3ª specie ed il numero delle classi delle forme primitive di 1ª specie.

Il metodo adoperato è dovuto a Gauss, cioè fondato sopra la Teoria di composizione delle forme.

II) *Sui gruppi di sostituzioni lineari a coefficienti interi complessi.* Nota: Rend. Acc. Lincei, 1890, 1° semestre.

Sostanzialmente questa è la Nota preventiva della Memoria del Vol. 38 dei Math. Ann.; cioè sono qui determinati i poliedri fondamentali del gruppo:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \qquad (1),$$

quando i coefficienti α, β, γ e δ percorrono gli interi dei corpi $K(\sqrt{-1})$ e $K(\sqrt{-3})$, con la condizione $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$. Per le forme definite di Hermite viene introdotto l'indice (immagine geometrica nello spazio non-euclideo) e dimostrato che una tale forma è ridotta, secondo Hermite, quando il suo indice appartiene al poliedro fondamentale.

Sono inoltre studiati sottogruppi congruenziali.

III) *Sopra una classe di gruppi Fuchsiani riducibili a gruppi modulari.* Nota: Rend. Acc. Lincei, 1890, 1° semestre.

Questa Nota si ricollega ad una Memoria del Picard sopra le forme di Hermite e viene dimostrato come per tali forme, a determinante scindibile nella somma di due quadrati, il sistema completo di forme sia finito, senza valersi del metodo di riduzione continua. Ne è studiato il gruppo fuchsiano corrispondente, riducibile al gruppo modulare. Segue inoltre un modo semplice per

Digitized by Google

risolvere l'equazione di Pell generalizzata, in un caso speciale e nel corpo $K(\sqrt{-1})$.

IV) *Sui gruppi di sostituzioni lineari e sulle forme quadratiche di Dirichlet e di Hermite.* Nota: Red. Acc. Lincei, 1891, 2° semestre.

È la Nota preventiva della Memoria del Vol. 40 dei Math. Ann. Il Bianchi qui rende la priorità del Picard per quanto riguarda la determinazione del poliedro fondamentale del gruppo (1), nel corpo $K(\sqrt{-1})$,

V) *Geometrische Dostellung der Gruppen linearer Substitutionen mit ganzen complexen Coefficieitten nebst Anwendungen auf die Zahlentheorie.* Memoria: Math, Ann., 1891, 38 Bd.

È la trattazione completa della ricerca dei campi fondamentali dei gruppi (1) nei corpi $K(\sqrt{-1})$ e $K(\sqrt{-3})$.

Come applicazione viene svolta la teoria aritmetica delle forme di Dirichlet e di Hermite in tali corpi, introducendo: il circolo indicatore per le forme di Dirichlet e la sfera indicatrice per le forme indefinite di Hermite, (immagini geometriche nello spazio non-euclideo).

VI) *Sui gruppi di sostituzioni lineari con coeffieienti appartenenti a corpi quadratici immaginari.* Memoria: Math. Ann 1892, 40 Bd.

In questo lavoro vengono estese ai corpi quadratici immaginari a numero fondamentale più elevato, le ricerche della Memoria precedente. È tra i più importanti del primo gruppo di lavori. Si noti che quì, per la prima volta, apparve la corrispondenza tra l'equivalenza dei numeri frazionari di un corpo quaratico immaginario $K(\sqrt{-d})$ e l'equivalenza dei suoi ideali. Corrispondenza che più tardi Hurwitz dimostrò esistere in ogni corpo algebrico finito. In questo fatto si ha uno dei punti interessanti dell'alta Teoria dei Numeri. Notevolissima è poi la circostanza, notata dal Bianchi, che per i corpi $K(\sqrt{-d})$ per i quali ha determinato il campo fondamentale dei gruppi in questione, dopo l'ampliamento per riflessione, il numero dei vertici singolari uguaglia il numero delle classi degli ideali del corpo.

Questo fatto non è stato fino ad ora dimostrato in generale: la questione sembra molto riposta.

Digitized by Google

VII) *Sui gruppi di sostituzioni lineari.* Memoria: Math. Ann. 1893, 42 Bol.

VIII) *Sopra alcune classi di gruppi di sostituzioni a coefficienti complessi.* Memoria: Math. Ann. 1893, 43 Bd.

Queste due Memorie trattano, essenzialmente, dei legami tra forme aritmetiche quadratiche quaternarie ed i gruppi:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

a coefficienti interi complessi. Precisamente, si ha una notevole estensione del principio di Poincaré; cioè della traduzione del gruppo automorfo di una forma, in un gruppo fuchsiano e la ricerca del relativo campo fondamentale. Queste ricerche vengono riprese e molto ampliate nei lavori seguenti: IX), XI) e XII).

IX) *Ricerche sulle forme quadratiche quaternarie e sui poliedri.* Memoria: Annali di Matematica, 1893.

X) *Divisioni regolari nello spazio non euclideo.* Nota: Rend. Acc. Lincei, 1893, 2° semestre.

In questo lavoro ed in un lavoro successivo: XIII), il Bianchi invece di dare la natura del gruppo, come è stato fatto in lavori precedenti assegna il campo fondamentale, imponendo di essere un poliedro regolare non euclideo. Trova semplici caratteri aritmetici dei gruppi corrispondenti. Queste ricerche sono state poi riprese dal Sansone.

XI) *Sulle forme quadratiche quaternarie e sui gruppi poliedrici.* Nota: Rend. Acc. Lincei, 1894, 1° semestre.

XII) *Complemento alle ricerche sulle forme quadratiche quaternarie e sui gruppi poliedrici.* Memoria: Annali di Matematica, 1895.

XIII) *Sul gruppo di sostituzioni lineari corrispondenti alle divisioni regolari dello spazio non euclideo in tetraedri ed in ottaedri regolari.* Nota: Rend. Acc. Lincei, 1909, 1° semestre.

XIV) *Sul gruppo automorfo delle forme ternarie quadratiche suscettibili di rappresentare lo zero.* Nota: Rend. Acc. Lincei, 1912, 1° semestre.

In questo lavoro viene ossevata una forma semplice del gruppo modulare in cui è tradotto, col principio di Poincarè, il gruppo automorfo aritmetico delle forme ternarie quadratiche suscettibili

Digitized by Google

di rappresentare lo zero, col determinante dispari e privo di fattori quadrati. Ne discende una notevole formula per l'area (non-euclidea) del poligono fondamentale. E, il Bianchi, osserva che tale area può sostituire, per le forme indefinite, il concetto di densità che Eisenstein aveva introdotto per le forme definite. Humbert, con l'Aritmetica analitica, ne eseguì l'estensione alle forme ternarie quadratiche aritmetiche indefinite qualunque.

Tale estensione è stata indicata dal Bianchi stesso.

XV) *Osservazioni circa il carattere quadratico dei numeri in un corpo quadratico.* Nota: Rend. Acc. Lincei, 1920, 2° semestre.

Dirichlet ha ridotto il calcolo del simbolo $\left[\frac{\omega}{P}\right]$ (simbolo di Dirichlet) all'ordinario simbolo di Legendre $\left(\frac{a}{p}\right)$ nel caso del corpo $K(\sqrt{-1})$. La questione generale, cioè della riduzione nel caso di un corpo quadratico qualunque $K(\sqrt{-d})$ è stata eseguita dal Bianchi in questa Nota, che è riprodotta nel Trattato 3), pag. 335.

XVI) *Sugli ideali primari assoluti in un corpo algebrico.* Memoria: Journal de Malhématiques (Lionville), 1922.

Il Bianchi qui considera gli ideali di un corpo algebrico in cui il minimo intero razionale sia la norma e chiama tali ideali: ideali primari assoluti. Il problema trattato è quello della ricerca di questi ideali la cui norma sia un intero razionale positivo fissato. Dalla sua risoluzione, vengono dedotte delle loro proprietà. Inoltre, come applicazione, ben notevole, risulta una dimostrazione puramente aritmetica del teorema: In ogni corpo algebrico esistono infiniti ideali primi di primo grado. Tale dimostrazione viene completata in un lavoro successivo, il XVII). Un'altra applicazione si ha nella formula di riduzione del simbolo di Dirichlet al simbolo di Legendre, nel caso degli ideali primi di primo grado, di ogni corpo algebrico.

XVII) *Dimostrazione elementare della infinità di ideali primi di primo grado in ogni corpo algebrico.* Nota: Rend. Acc. Lincei 1922, 2° sentrestre.

XVIII) *Sulle radici primitive per moduli* (ideali) *composti nei corpi algebrici.* Nota: Rend. Acc. Lincei, 1923, 1° semestre.

Digitized by Google

In questa Nota, riprodotta nel Trattato 3), pag. 623, viene risoluta, per i corpi algebrici, la questione delle radici primitive corrispondenti ad un modulo che sia un ideale composto.

Il procedimento è la naturale estensione di quello noto dell'Aritmetica razionale.

XIX) *Sulla composizione degli ideali primari assoluti in un corpo algebrico.* Nota: Rend. Acc. Lincei, 1913, 1° semestre.

Qui viene ripreso lo studio delle proprietà degli ideali primari assoluti ne sorgono delle nuove; una caratteristica, ben notevole.

b) **Trattati.**

1) *Lezioni sulla Teoria aritmetica delle forme quadratiche binarie e ternarie* (Litografie).

È il corso di Matematiche Superiori tenuta all' Università di Pisa nel 1911-1912.

2) *Lezioni sulla Teoria dei Numeri algebrici e principi di Aritmetica analitica* (Litografie).

E' il corso di Analisi Superiore tenuto all' Università di Pisa nel 1920-1921.

3) *Lezioni sulla Teoria dei Numeri algebrici* (Ed. Zanichelli, Bologna, 1923) (1).

Questo è il contributo che il nostro compianto Maestro ha portato alla Teoria dei Numeri, contributo vasto, vario ed importante: nelle Sue Note e Memorie si trovano ancora molti argomenti per nuove ricerche, nei Suoi Trattati, i mezzi per intraprenderli!

---

(1) Per questo Trattato, v. le recensioni di: A. M. Bedarida: in questo Bollettino, 1925; e di: G. Sansone: Bollettino dell' Unione Matematica Italiana, 1924.

Digitized by Google

RECENSIONI

V. Volterra - *Teoria de los funcionales y de las ecuaciones integrales e integro-diferenciales.* Conferencias explicadas en la Facultad de Ciencias de la Universidad central cu el mes de abril de 1925, redactadas por L. Fantappiè. Madrid, Impren a clásica española, 1927: 8° p. VIII-208.

I sei capitoli di cui si compone questo volume riproducono altrettante conferenze tenute da V. Volterra nella Università di Madrid.

Nel C. 1 si stabilisce anzitutto il concetto di *funzionale* (o funzione di funzione), che può considerarsi come limite di una funzione di n variabili quando n cresce indefinitamente. Premesse poi alcune nozioni sugli aggregati astratti, si applicano ai funzionali i concetti di limite e di continuità, i quali però prendono aspetto diverso a seconda della definizione che si assume per la *distanza* di due elementi del campo di funzioni che corrisponde al campo di variabilità dell'argomento delle funzioni ordinarie. Si definiscono poscia i funzionali lineari, quelli omogenei d'ordine superiore e quelli analitici, e si estendono ai funzionali le operazioni fondamentali del Calcolo infinitesimale.

Un risultato importante, e che fa del Calcolo delle variazioni un capitolo del Calcolo funzionale, è questo, che il differenziale primo di un funzionale si annulla per quelle funzioni che rendono il funzionale massimo o minimo.

Se si ha (C. 2) un sistema di n equazioni con n incognite:

$$f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) = z_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

e si fa tendere n all'infinito, la funzione al primo membro diventa un funzionale di una funzione $y(t)$ dipendente anche da un parametro x, e il sistema si riduce all'unica equazione funzionale:

$$F_i[y(t); x] = z(x),$$

che può scriversi più semplicemente:

$$G_i[y(t); x] = 0.$$

Sono particolari equazioni funzionali le equazioni integrali ed integro-differenziali lineari. In questo capitolo viene esposta la

Digitized by Google

risoluzione delle equazioni di Volterra e di Fredholm di 2ª specie, e si accenna in particolare alle proprietà delle equazioni a nucleo simmetrico o simmetrizzabile; si passa poi alle equazioni di 1ª specie, a quelle a nucleo singolare, ed ai sistemi di equazioni integrali. Si dimostra infine come, sotto certe condizioni restrittive, la risoluzione di un'equazione funzionale qualunque si riduca a quella di una successione infinita di equazioni integrali di Fredholm di 2ª specie.

Nel C. 3 si considerano particolarmente le *funzioni di linee* $F(L)$, che sono speciali funzionali dipendenti da 3 funzioni $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$, essendo:

$$x = x(s) \ , \ y = y(s) \ , \ z = z(s)$$

le equazioni della linea L. Un tale funzionale deve restare invariato quando il punto s si muove lungo la linea L; questa condizione conduce all'espressione seguente di $F(L)$:

$$F(L) = \int_\sigma (A \cos nx + B \cos ny + C \cos nz)\, d\sigma \ ,$$

dove σ è una superficie avente per contorno L, e A, B, C sono funzioni che non risultano completamente determinate. Se si aggiunge la condizione, che A, B, C non abbiano a dipendere dalla linea L ma solo dalle coordinate x, y, z, risulta che esse devono essere legate dalla relazione:

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0 \ ;$$

le A, B, C possono dirsi le *derivate di F rispetto ai tre piani coordinati yz, zx, xy*, e si ha:

$$F(L) - F(L_0) = \int_\sigma (A\, dy\, dz + B\, dz\, dx + C\, dx\, dy),$$

essendo σ una superficie avente per contorno completo le linee L e L_0. Ciò conduce naturalmente a parlare della connessione degli spazi in rapporto alla polidromia delle funzioni di linee. Volendo estendere a queste funzioni il concetto di funzione monogena di variabile complessa, due punti di partenza si presentano: o l'armonicità delle due parti della funzione, o l'indipendenza della derivata dalla direzione dell'incremento. Le due condizioni si equivalgono per le funzioni di variabile complessa; invece per le funzioni di linee conducono a due generalizzazioni diverse.

La teoria della composizione e delle funzioni permutabili

Digitized by Google

forma l'oggetto del C. 4; essa è troppo nota perchè sia il caso di farne qui anche una breve esposizione.

La prima parte del C. 5 è dedicata alle equazioni integro-differenziali. Accennato ad alcune equazioni di questa specie che si riducono ad equazioni integrali, e alle difficoltà che presenta il problema della classificazione delle equazioni integro-differenziali, si tratta partitamente di vari tipi di equazioni integro-differenziali, e specialmente di quelle che si presentano in certe questioni di Fisica matematica. La seconda parte del capitolo contiene i fondamenti dello studio delle equazioni a derivate funzionali; si stabilisce la condizione necessaria e sufficiente perchè un funzionale dipendente da una funzione e da un punto sia la derivata funzionale in questo punto di un altro funzionale; troviamo qui l'analogo del sistema canonico di Hamilton e delle equazioni lineari a derivate parziali del 2° ordine a coefficienti costanti.

Infine il C. 6 passa in rapida rivista le applicazioni che finora ha avuto il Calcolo funzionale: problema di Dirichlet, studio delle « seiches », o moto ondoso dei laghi, vibrazioni delle membrane, fenomeni ereditari, elettrodinamica, e accenna ai vari indirizzi in cui il Calcolo stesso si va estendendo per opera di Hadamard, Evans, Pérès, Fréchet ed altri.

I vari capitoli sono accompagnati da estese liste bibliografiche, che comprendono in tutto oltre 400 titoli di memorie ed opere concernenti il Calcolo funzionale e le sue applicazioni.

G. Vivanti

Elementarmathematik, herausgegeben von K. Fladt. Band I. *Elementargeometrie.* 2. Teil: *Der Stoff bis zur Untersekunda* (Planimetrie und Stereometrie) von Kuno Fladt. 8°. p. VIII + 181 (Leipzig, B. G. Teubner, 1928). Mk. 8.

Quellenhefte zuv Elementarmathematik, herausgegeben von K. Fladt, I. Heft: *De Stoff bis zur Untersekunda.* Mit 62 Figuren im Text und 2 Tafeln 8° p. 73. Leipzig, B. G. Teubner, 1928). Prezzo Mk. 2.

I due volumi che con le presenti linee raccomandiamo all'attenzione degli studiosi italiani fanno parte di un'opera di lunga lena che il prof. Fladt intende offrire ai suoi connazionali

Digitized by Google

destinati a insegnare matematica in una scuola secondaria; le dimostrazioni complete sono in gran parte omesse, ma sono chiaramente indicati i legami che collegano le varie parti della matematica che trovarono accesso negli istituti medi, con particolare riguardo alle ricerche sull'Assiomatica, a cui l'Hilbert ha dedicata in questi ultimi tempi la maggior parte della sua attività.

L'intera opera consisterà di una parte teorica e di una storico-bibliografica, ognuna delle quali divisa in tre volumi; questi, nella sezione teorica, comprenderanno ciascuno quattro fascicoli. Dette tre parti tratteranno risp. di Geometria elementare, Analisi elementare e Matematica elementare applicata. Ora i fascicoli annunciati nel titolo del presente articolo sono il secondo del I volume della sezione teorica, e il primo del I volume della sezione storico-bibliografica. Per valutare l'altezza intellettuale degli scolari di cui questi due fascicoli si occupano è necessario tener presente che il corso classico in Germania consta di nove classi numerate a partire dalla sesta sino alla prima e che gli ultimi sei anni sono designati ordinatamente così: III inferiore, III superiore; II inferiore, II superiore; 1 inferiore, I superiore. Avuto riguardo a ciò, la materia trattata nei primi cinque Capitoli del primo dei volumi annunziati, risulta dai seguenti titoli: Cap. I. Concetti e proposizioni fondamentali della geometria. Cap. II. Materia geometrica planimetrica della III inferiore; Cap. III. Materia planimetrica della III superiore; Cap. IV. Materia planimetrica della II inferiore. Cap. V. Materia stereometrica della II inferiore. Il VI Cap. è dedicato alla letteratura relativa alla geometria elementare e precisamente alla letteratura scientifica, alla letteratura didattica, agli antichi libri testi di geometria, alle collezioni di esercizi e finalmente alle opere didattiche apparse in Germania in seguito alla riforma provocata e diretta da F. Klein. Le opere considerate appartengono in massima parte alla letteratura tedesca; ma non vi mancano alcune francesi ed inglesi e quelle italiane che furono tradotte in tedesco; questa condizione spiega perchè nell'opera in esame si cerchi indarno una menzione degli *Elementi di geometria* del de Paolis, opera che avrebbe meritato un successo ben maggiore di quello che la sorte le ha concesso.

La presente occasione non ci consente di entrare in una minuta esposizione di quanto si legge in questo volumetto. Due sole osservazioni ci siano concesse.

Il Fladt espone schematicamente buon numero di dimostrazioni del teorema di Pitagora; ora è da lamentare che egli abbia omesse

Digitized by Google

quelle di Huygens (*Oeuvres complètes*, T. XIV, 1920) e di Gauss (*Werke*, Bd. X, I Absch, 1917, p. 524) sulle quali io ho richiamata l'attenzione dei soci della *Mathesis* (v. *Periodico di matematica*, IV Ser., Vol. II, 1922, p. 214).

Esprimiamo poi il desiderio che in una ventura edizione venga accordato un posto all'elegante costruzione dei lati del pentagono e del decagono regolari che leggesi nel carteggio di Gauss (*Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und C. L Gerling*, Berlin, 1927, p. 46).

L'altro dei volumetti che annunciamo concerne le *Fonti* della geometria; ivi domina, sovrano incontrastato, Euclide, chè si può dire siasi in presenza di un commento degli *Elementi*, fatto con vedute moderne; dopo una introduzione storica esso comprende un Capitolo sulla Planimetria e uno sulla Stereometria, fatto questo che mostra come l'esposizione sia tutta informata alla classica divisione che i fusionisti non riuscirono ad abbattere.

Le pubblicazioni annunciate (e ci duole che lo spazio non ci consenta di addentrarci in una minuta analisi) mostrano nell'autore un conoscitore profondo della letteratura geometrica e un insegnante provetto; onde è da augurarsi che si giunga ben presto in possesso dell'intera opera progettata.

Una parola di lode va anche tributata all'editore, al quale devesi se l'aspetto degli annunciati fascicoli risultò pari alla bontà e all'importanza del contenuto.

G. L.

Vorlesungen über Algebra. Unter Benutzung des dritten Auflage des gleichnamigen Werkes von Dr. Gustav Bauer *in vierten vermehrten Auflage dargegestellt von* L. Bieberbach. Mit 16 Figuren im Text und auf I Tafel. Leipzig un Berlin B. G. Teubner, 1928, 8°. p. X-334. (Prezzo del vol. R. M. 20).

Nell'analisi della prima edizione dell'algebra del Bauer (*Boll. di bibl. e storia delle scienze matem.*, T. VII, 1904, p. 84) il prof. U. Amaldi ebbe con ragione a rilevare il fatto strano che ivi la teoria dei determinanti trovavasi in fine dell'opera; questo fatto si verificò pure nelle edizioni seguenti (v. *Bollettino*, T. XIV, 1912, p. 46). Ora il prof. Bieberbach, a cui la Casa editrice affidò il

Digitized by Google

compito di preparare una nuova edizione, giudicò fondato tale rilievo e in generale consigliabile il dare alla materia un ordinamento diverso e senza dubbio più razionale, quale appare dal seguente indice:

Parte I. Proprietà fondamentali delle equazioni algebriche, Cap. 1. Introduzione. 2. Numeri complessi. 3. Funzioni razionali intere. 4. Teorema fondamentale dell'algebra. 5. Questioni di divisibilità.

Parte II. Teoria e applicazione dei determinanti. Cap. 1. Proprietà fondamentali dei determinanti. 2. Sistemi di equazioni lineari. 3. Altre proprietà dei determinanti. 4. Forme quadratiche e bilineari.

Parte III. Proprietà principali delle equazioni algebriche. Cap. 1. Funzioni simmetriche. 2. Trasformazione delle equazioni.

Parte IV. Risoluzione delle equazioni numeriche. Cap. 1. Approssimazione delle radici reali. 2. Numero delle radici reali che cadono in un dato intervallo. 3. Numero delle radici che trovansi in un determinato campo. 4. Metodo di Graefe. 5. Teoremi sulla situazione delle radici delle equazioni.

Parte V. Risoluzione algebrica delle equazioni. Cap. 1. Risoluzione algebrica delle equazioni di terzo e quarto grado. 2. Equazioni reciproche, equazioni binomie. 3. Delle radici dell'unità. 4, Nozioni di teoria dei numeri. 5. Equazioni abeliane. 6. Risoluzione algebrica dell'equazione per la divisione del circolo. 7. Gruppi di sostituzioni. 8. Applicazione della teoria dei gruppi alla teoria delle eqnazioni algebriche.

Appendice. Frazioni continue.

Sotto la nuova forma l'opera continuerà senza dubbio a godere del favore del pubblico; ma lo storico si domanda e si domanderà: deve essere dessa inscritta nell'elenco dei lavori del Bauer o nell'analogo del Bieberbach? Spinosa questione che si presenta, *mutatis mutandis*, riguardo a tante pubblicazioni tedesche recenti.

G. L.

Prof. Francesco Grassi - *Leggi del Volta e leggi del Gay-Lussac e del Dalton*, con le due Note complementari: *I lavori del Volta e del Gay-Lussac su la dilatazione*

Digitized by Google

degli aeriformi per l'azione del calore; i lavori del Volta e del Dalton su le tensioni dei vapori.

Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e lettere, Vol. LX, fasc. XI-XV, 1927.

Fra i molti scritti dedicati ad *Alessandro Volta* nell'anno centenario della sua morte (5 marzo 1827) meritano particolare rilievo il Discorso e le Note sopra indicate del prof. *Francesco Grassi*; discorso letto nella solenne adunanza del 23 giugno 1927, del Reale Istituto lombardo di Scienze e lettere; note presentate nell'adunanza del 7 luglio successivo.

Questi scritti, infatti, rivendicano pienamente psr il nostro glorioso Scienziato un merito fin qui generalmente misconosciuto, il merito di aver preceduto il *Gay Lussac* e il *Dalton* nei loro studî giustamente famosi sulla dilatazione dei gas e sulla tensione dei vapori.

1°) Precisamente risulta comprovato con documenti originalî che il *Volta* fin dal 1791 aveva stabilito la legge che *l'aria si dilata uniformemente per ogni grado di temperatura, cominciando sotto la temperatura del ghiaccio fin sopra quella della ebollizione dell'acqua.* I risultati delle sue ricerche sull'argomento furono poi esposti nel 1793, nel t. IV degli *Annali di Chimica del Brugnatelli*, con una magistrale memoria, rimasta, purtroppo, poco conosciuta.

Il *Gay-Lussac*, invece, soltanto nel 1802 pubblicò la celebre memoria: *Recherches sur la dilatation des gaz et des vapeurs* (Annales de Chimie, t. XLIII, 31 messidore, A. X), nella quale stabilì un risultato ben diverso, cioè la legge *della uniforme dilatazione totale tra 0° e 100° di tutti i gas e di tutti i vapori.*

Sarebbe pertanto doveroso che in tutti i trattati, anche elementari di Fisica, prima della legge di *Gay-Lussac*, venisse enunciata quella di *Volta*. Notiamo a titolo d'onore che soltanto negli *Elementi di Fisica per i Licei scientifici di Alessandro Amerio* (3ª edizione, I vol. pag. 232) è citata la legge del *Volta* prima di quella di *Gay-Lussac* ed è notata la data della scoperta delle due leggi.

2°) Da alcune lettere del *Volta* al *Landriani* (16 nov. 1795) e al *Vassalli* (Annali di Chimica del Brugnatelli, t. XI, a. 1796) risulta che il grande scienziato si stava occupando da tempo delle tensioni dei vapori ed aveva intenzione di pubblicare in proposito

Digitized by Google

alcune Memorie, che poi non ha scritto, pressato da altri studî più importanti.

Dallo studio accurato del prof. Grassi su documenti autografi, risulta che il *Volta* prima del 1795, era pervenuto a tre leggi intorno alla tensione dei vapori, leggi che si possono così formulare:

1ª - *La forza del vapore cresce in una progressione geometrica, crescendo il calore* (temperatura) *in progressione aritmetica;*

2ª - *La forza del vapore di tutti i liquidi è la stessa a uguale distanza sopra o sotto le varie temperature alle quali essi bollono;*

3ª - *Tale forza è la stessa che nel vuoto, sotto qualsivoglia pressione di altro fluido elastico.*

La 2ª e la 3ª riunite costituiscono la nota legge del *Dalton*, che il celebre scienziato scozzese pubblicò nella memoria « *Experimental Essays on the Constitution of mixed gases; on the Force of steam or Vapour from Water* ecc. » (Memoirs of the Literary and Phylosophical Society of Manchester, vol. V, parte II, 1802).

Quanto alla 1ª legge, il *Dalton* parla di « qualche cosa di simile ad una progressione geometrica nella forza del vapore ».

In realtà la legge con la quale varia la tensione di un vapore col variare della temperatura, non è nè quale la indicò *Volta*, nè quale la indicò *Dalton*, ma molto più complessa.

Ad ogni modo, senza menomare il grande merito di *Dalton* per i suoi studî indipendenti da quelli di *Volta*, giustizia vuole che la legge che porta il suo nome venga d'ora in poi detta: *Legge del Volta e del Dalton*, avendo il primo preceduto di sei anni il secondo nella determinazione dei risultati più notevoli.

A. Natucci

Dottor Serafino Léggio - *Elementi di Algebra ad uso dei Licei classici e degli Istituti tecnici superiori.* Napoli, P. Federico e G. Ardia, librai-editori, 1926.

Il libro ha doti di semplicità e chiarezza che lo raccomandano molto sotto l'aspetto didattico. Qui vogliamo rilevare soltanto alcune inesattezze, nelle quali l'A. è caduto a proposito dei numeri reali.

Digitized by Google

Lo spunto per introdurre questi numeri è — a nostro parere — il migliore dal punto di vista didattico, come quello che si presenta più intuitivo di altri possibili metodi, ricollegandosi direttamente alla misura delle grandezze (1). L'A. parte appunto dalla misura di un segmento OX rispetto ad una unità di misura OA, e distingue i due casi della commensurabilità:

$$OX = mOA \quad \text{oppure} \quad OX = \frac{m}{n} OA,$$

(misura espressa da un numero razionale), e della incommensurabilità: (misura non esprimibile con un numero razionale).

Dimostra l'esistenza di grandezze incommensurabili col noto esempio della diagonale e del lato del quadrato; ricerca delle misure approssimate della diagonale col noto metodo della misurazione decimale. Arriva così a costruire le successioni di numeri:

(1) 1 ; 1,4 ; 1,41 ; 1,414 ; 1,4142 ; .....

(2) 2 ; 1,5 ; 1,42 ; 1,415 ; 1,4143 ; .....

che chiama misure approssimate di d ad l per difetto e per eccesso, a meno di 1, di $\frac{1}{10}$, di $\frac{1}{100}$, ecc.

Fin qui tutto bene; solo non era male dire come si trovano in pratica i numeri delle (1) (2), cioè coll'algoritmo della $\sqrt{2}$.

A pag. 60 poi si conclude: « Osservando le due successioni (1) e (2) risulta che esiste *un numero, in cui le cifre decimali sono illimitate, il quale è maggiore di tutti i numeri della* (1) *ed è minore di tutti i numeri della* (2),

Questo numero: $\alpha = 1{,}4142\ldots$. esprime *la misura esatta della diagonale* d *rispetto al lato* l *ossia è il rapporto delle due grandezze incommensurabili* d *ed* l ».

Ora a noi pare che sarebbe stato meglio concludere così: Dalla osservazione delle successioni (1) e (2) risulta che la misura esatta di d rispetto ad l dovrebbe risultare espressa da un numero maggiore di tutti quelli della (1) e minore di tutti quelli della (2). Un tal numero non esiste, come si è visto, nel campo razio-

---

(1) Si veda il nostro art. « *Origine e sviluppo del concetto di numero irrazionale* » in *Scientia*, Novembre 1925; e il libro « *Il concetto di numero e le sue estensioni* » Fratelli Bocca, editori, Torino (parti 3ª e 5ª)

Digitized by Google

nale. Se noi *creiamo un simbolo numerico* che esprima tale rapporto o misura di d rispetto ad l, un tale simbolo (numero irrazionale) dovrà ritenersi compreso fra i numeri delle due successioni.

Riguardo poi alla *corrispondenza tra segmenti e numeri reali* (pag. 61 e 62) l'A. fa molta confusione, dalla quale apparisce che le sue idee non sono molto chiare su questo punto. Per non allungare di troppo questa recensione non riporteremo le sue pagine, alle quali ci permettiamo sostituire le seguenti considerazioni:

1°) *ad ogni segmento rettilineo corrisponde un numero reale.*

Infatti la misura del segmento OX rispetto ad OA, é espressa da un numero razionale o irrazionale che si determina in modo analogo a quello visto sopra per la diagonale del quadrato misurata col lato. Se il rapporto è irrazionale se ne possono trovare dei valori approssimati per difetto e per eccesso col procedimento della misurazione decimale, o con altro algoritmo equivalente.

2°) *ad ogni numero reale corrisponde un segmento.*

Infatti se il numero è razionale m, o $\frac{m}{n}$ basta costruire il il segmento

$$OX = mOA \quad \text{oppure} \quad OX = \frac{m}{n}\, OA,$$

essendo OA l'unità di misura. (Rientrano in questo caso i decimali periodici).

Se poi il numero è irrazionale (α) si considerino le successioni di valori approssimati per difetto e per eccesso:

$$(3) \qquad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad \ldots.$$

$$(4) \qquad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad \ldots.,$$

si costruiscano i segmenti che hanno per misura rispetto ad $\overline{OA}$ tali valori, e si riportino su una semiretta r a partire dall'origine O.

Gli estremi di questi segmenti costituiscono classi di punti soddisfacenti al noto *postulato della continuità della retta*, onde si conclude che esiste *almeno* un punto P di separazione. Che poi il punto sia unico, risulta assai facilmente dalla proprietà delle successioni (3) (4), che dato ε piccolo ad arbitrio, si possono trovare due elementi delle successioni (3) (4) tali che:

$$b_n - a_n < \varepsilon,$$

Digitized by Google

Il segmento unico e ben determinato OP, sarà da ritenersi il corrispondente del numero irrazionale α (1).

A. Natucci

Paolo Cattaneo - *Appunti sui numeri reali* - p. 64 litografia. Padova. R. Zannoni 1928 (L. 6 presso l'A. Padova Via Solferino 15).

Vogliamo richiamare brevemente l'attenzione dei lettori su questo libretto del prof. Cattaneo, perchè esso contiene un'esposizione veramente soddisfacente dei numeri reali.

L'A. si pone dal punto di vista, che può dirsi *sintetico*, in contrapposto al criterio puramente *analitico*, di considerare cioè i numeri in relazione con le grandezze.

E' il metodo che risulta preferibile non solo dal lato didattico, ma anche dal punto di visto più elevato che riguarda la matematica come strumento d'indagine nel campo della filosofia naturale: (vedasi la 5ª parte del mio libro « Sul concetto di numero »).

Dopo aver ricordato come i numeri naturali possano considerarsi come simboli corrispondenti ad aggregati di grandezze, e i razionali come operatori su grandezze, il Cattaneo introduce anche i numeri reali come operatori per grandezze, dando per la

---

(1) Un'altra osservazione è da farsi anche a riguardo delle considerazioni svolte dall'A. a pag. 102. Da esse parrebbe che un numero a reale?) elevato a potenza con esponente irrazionale m potesse in certi casi dar luogo a un numero razionale. A me sembra che questo caso non possa mai presentarsi. Perchè forse $a^m = r$ con r razionale, bisognerebbe che r fosse una potenza ad esponente intero di a, ossia che m fosse un numero intero.

L'A. dice così: « *Supponiamo* che, calcolato a^m, con m irrazionale, dopo una serie di approssimazioni si sia giunti a trovare:

$$3{,}45999... < a^m < 3{,}46000....$$

Siccome:

$$3{,}45999... = \frac{3459 - 345}{900} = 3{,}46\ ,$$

come valore di a^m possiamo assumere il numero 3,46 e scrive.

$$a^m = 3{,}46 \text{ » !}$$

Giudichi il lettore.

Digitized by Google

prima volta una trattazione piana, chiara e alla portata di tutti (anche di chi non ha dimestichezza coi simboli della logica matematica) della teoria di Burali-Forti che riguarda appunto i numeri reali come operatori su grandezze. Ma l'esposizione del Cattaneo è del tutto originale in quanto trae partito dalla rappresentazione dei numeri coi punti di una retta, e si vale del punto imagine per definire le relazioni di eguaglianza e diseguaglianza, e ricorre alla misurazione decimale del segmento OP per ottenere una espressione decimale del numero che ha per imagine P (limitata o periodica se questo numero è razionale, illimitata ma non periodica se è irrazionale).

E poichè tutto è rigorosamente dimostrato, senza inutili lungaggini, si ha qui una trattazione veramente buona dal lato didattico della interessante teoria. E' un peccato che cogli orarî attuali, eccettuati i licei scientifici, non si possa svolgere nelle nostre scuole una tale teoria, ma solo accennare ai punti principali in modo sommario. Non vi ha dubbio però che i futuri docenti di matematica debbano conoscerla a fondo; per essi raccomandiamo vivamente lo scritto del Cattaneo

A. Natucci

R. Haussner - *Analytische Geometrie der Ebene.* Mit 60 Figuren im Text (Sammlung Göschen N. 65), Berlin und Leipzig, W. de Guyter & Co. 1928, 8°, p. 164.

F. Junker und A. Witting - *Repertorium und Aufgabensammlung zur Differential-Rechnung.* Mit 47 Figuren im Text (Id. N. 146). Id. id. p. 130.

A. Willers - *Matematische Instrumente.* Mit 68 Figuren. (Sammlung Göschen N. 4922) Id. id. p. 144.

L. Bieberbach - *Einführung in die konforme Abbildung.* Mit. 38 Figuren. (Id. N. 759). Id. id. II neubearbeitete Auflage, 1927, p. 131.

R. Baldus - *Nichteuklidische Geometrie. Hyperbolische Geometrie der Ebene.* Mit 71 Figuren im Text. (Id. N. 970). Id. id. 1927, p. 152.

Digitized by Google

E. Kamke - *Mengenlehre* (Id. N. 999). Id. 1928, p. 160.

G. Hoheisel - *Partielle Differentialgleichungen* (Id. N. 1003), Id. 1928, p. 159.

Riuniamo in un articolo i resoconti di questi nuovi elementi di una nota e reputatissima Collezione.

1. Detta collezione aveva nel suo seno sino dal 1897 un volume dedicato alla geometria analitica piana, dovuto a M. Simon. Ne prende il posto quello che annunciamo, il quale però lascia il precedente nella posizione che occupava. Il volume del Simon svolge infatti un programma adatto per una scuola media, perchè basta a dare un chiaro concetto di che cosa sia la geometria analitica e come permetta lo studio delle linee piane anche di ordine elevato. Il volume dell' Haussner svolge invece il programma odierno di un corso universitario, dal momento che, dopo avere esposto con notevole larghezza le formole relative alla retta e al punto, sviluppa in tutti i particolari la teoria analitica delle coniche. Maggiore originalità presenta l' ultimo Capitolo dedicato alla teoria dei sistemi di cerchi, spinta sino al punto da condurre alla soluzione del problema di Apollonio. Come in genere tutti gli altri elementi della medesima raccolta, questo volume raccoglie molte cose in piccolo spazio.

2. La raccolta di esercizi del Junker arriva ora alla sua IV edizione per cura del Witting. Sono in essa enunciati o risolti problemi relativi ai vari problemi relativi ai vari capitoli di ogni corso di calcolo differenziale: Derivate di primo ordine o di ordine superiore, Serie, Forme indeterminate, Massimi e minimi, applicazioni geometriche. Le questioni sono semplici e bene scelte, onde il volume che annunciamo va raccomandato agli studenti che intendono impratichirsi nel maneggio dell'algoritmo differenziale.

3. « Gli strumenti matematici » scrive l'autore del terzo degli annunziati volumi « occupano nella totatalità delle macchine una posizione speciale. Mentre la macchina in generale soccorre o sostituisce il lavoro manuale, gli strumenti matematici sono macchine che prendono il posto di una parte del lavoro mentale.

L' importanza di tali ausiliari è pertanto evidente e fuori discussione, onde è necessario che coloro che possono giovarsene ne conoscano la teoria. Ora appunto il farla conoscere è lo scopo del citato volume. Il quale consta di otto Capitoli, aventi i seguenti soggetti. Apparati continui, quali il regolo calcolatore; II. Macchine calcolatrici, cioè addizionatrici e moltiplicatrici; III·

Digitized by Google

Apparati per il tracciamento di curve per punti e per eseguire misure sopra curve; IV. Planimetri; V. Analizzatori armonici; VI. Integrafi; VII. Risoluzione meccanica di problemi al contorno; VIII. Apparati geometrici, cioè affinografi, pantografi, prospettografi. Come emerge da questo cenno la rassegna eseguita dall'autore è completa.

4. L'esposizione del prof. Bieberbach si connette alla teoria delle funzioni oggetto di altri due volumi di Knopp facenti parte della stessa raccolta, trattando essa delle proprietà riflettenti la rappresentazione delle funzioni analitiche di una variabile complessa. Il I. Cap. concerne le funzioni di primo grado, il II quelle di secondo. Nel III sono stabilite alcune proposizioni generali relative alla rappresentazione conforme; esse permettono, nel Cap. successivo, l'indagine della rappresentazione con funzioni assegnate. Nel Cap. V finalmente i risultati ottenuti sono applicati alla rappresentazione di assegnati contorni su un'area circolare; è questa la parte più estesa ed importante di tutta l'operetta, giacchè da essa il lettore trae notizia degli ultimi risultati ottenuti nell'importante argomento.

5. La geometria non euclidea avendo ormai conseguito un posto definitivo nella scibile matematico, non poteva mancare una trattazione, sia pure stringata, nella Sammlung Göschen. Quella del Baldus comincia con un'esposizione storica dell'argomento che conduce da Euclide sino a Gauss, Lobacefsky e Bolyai. Segue un Capitolo relativo all'assiomatica della geometria assoluta. Nel Cap. seg. viene caratterizzata la geometria euclidea, mentre dal IV si apprende l'assiomatica della geometria iperbolica riguardata come disciplina autonoma. Alcune notizie sulla geometria ellittica e alcune osservazioni intorno alla geometria del mondo reale formano l'epilogo del lavoro.
Emerge da questo cenno che il volume del prof. Baldus va raccomandato a coloro che vogliono prendere rapidamente notizia di un ramo della geometria notevole in sè e per il suo intervento in parecchi rami della nostra scienza,

6. L'importanza della teoria degli insiemi (una delle ultime nate) per tutta la teoria matematica è nota a tutti. Essa è penetrata in tutti i rami arrecando frutti del massimo valore, tanto che si può dire non ne esista alcuna che non ne sia avvantaggiata. L'esposizione che se ne legge nel volumetto del Kampe, ne contiene le parti essenziali, cioè: I. Principii della teoria degli insiemi. II. Gli insiemi qualunque e i loro numeri cardinali. III. Sugli insiemi ordinati e i loro tipi ordinali. IV Sugli insiemi ben ordinati e i loro numeri ordinali.

Digitized by Google

7. Un tema che in questi ultimi tempi fu largamente approfondito è la teoria delle equazioni a derivate parziali, sia grazie al suo intrinseco valore che per le applicazioni che ricevette e riceve nella fisica matematica. L'esposizione fattane dall' Hoheisel è divisa in sei capitoli, recanti i seguenti titoli: I. Equazioni a derivate parziali di primo ordine con due variabili indipendenti. II. L'integrale generale. III. La teoria dei gruppi di trasformazioni e il problema dell' integrazione. IV. Equazioni differenziali di primo ordine con n variabili. V. Sistemi con una o più funzioni. VI. Equazioni a derivate parziali di secondo ordine con due variabili indipendenti.

G. L.

G. Vivanti - *Algebra ad uso degli Istituti Tecnici Superiori.* Pag. 142. Editore Lattes, 1928, Torino.

Non sempre i testi di matematica scritti per le Scuole Medie hanno il pregio di riunire insieme precisione e chiarezza, tradizione e modernità, ma nel caso del presente lavoro come in tutti quelli dell' illustre Autore le virtù sopradette si sono date convegno per offrire all' inesperto giovane studente un buon aiuto e una ottima guida allo studio della matematica.

L'opera, esposta senza troppe o soverchie sottigliezze e divagazioni, spesso nocive in un primo insegnamento elementare, ma con rigore di metodo e chiarezza di linguaggio si compone di sei capitoli, un' appendice ed una tavola di logaritmi con quattro decimali.

Il Cap. I tratta brevemente e con semplicità dei numeri irrazionali per passare poi al calcolo dei radicali e delle potenze con esponente frazionario.

Nel Cap. II è svolta la teoria delle equazioni di 2° grado, di quelle biquadratiche, di quelle reciproche di 4° grado, e vi sono pure trattati i sistemi di 2° grado e alcuni tipi di sistemi di grado superiore.

Il Cap. III molto opportunamente svolge il concetto di funzione e ne insegna la rappresentazione grafica in un sistema di coordinate cartesiane.

Il Cap. IV tratta dell'equazione esponenziale e dei logaritmi.

Nel Cap. V sono studiate le progressioni aritmetiche e geometriche ed applicate poi alle principali questioni di interesse.

Digitized by Google

Il Cap. VI si occupa dei numeri approssimati e del « grado di precisione » del risultato di un calcolo numerico.

Segue infine un'appendice nella quale trovano posto alcune importanti applicazioni dell'algebra alla geometria.

Ogni capitolo è corredato da un discreto numero di esercizi ben scelti, che conferiscono maggior valore al lavoro e lo rendono meritevole di essere segnalato agli insegnanti e agli studenti per la sua efficacia scientifica e didattica. GIUSEPPE BURNENGO

G. VIVANTI - *Aritmetica razionale e algebra per il Corso Magistrale Superiore* - pag. 131 - Editore S. Lattes, Torino.

L'Autore con questo volumetto diviso in sette capitoli conduce razionalmente il lettore a saper risolvere problemi di 1° grado.

Nel Cap. I si danno i preliminari dell'Aritmetica razionale, esponendo i concetti fondamentali di « contare nella serie naturale dei numeri », di « maggiore », di « minore », nonchè i concetti di assioma e teorema.

Il Cap. II tratta brevemente delle operazioni sui numeri interi, dimostrandone le principali proprietà e spiegandone poi l'algoritmo pratico; notevole il modo uniforme di dare le definizioni delle operazioni in corrispondenza al loro vero significato materiale e pratico.

Il Cap. III si occupa della divisibilità in generale, delle prove per 9 delle operazioni, del M. C. D. e del m. c. m.

Nel Cap. IV si pone il concetto di frazione e si svolgono in forma sintetica e chiara le trasformazioni relative e le operazioni.

Il Cap. V tratta dei numeri decimali, delle operazioni inerenti e dei numeri decimali periodici.

Nel Cap. VI si danno alcuni cenni sui calcoli con numeri approssimati.

Il Cap. VII in fine insegna ad impostare e risolvere i problemi di 1° grado; notevoli i diversi esempi di problemi di geometria, di fisica.

L'opera, svolta in forma chiara e precisa, rivela nell'Autore una mano maestra ed acuisce nel lettore il desiderio di poter leggere quanto prima l'Algebra completa pei i Ginnasi e Licei, che certamente in modo degno completerà la collana di lavori così bene intrapresa. GIUSEPPE BURNENGO

Digitized by Google

NOTIZIE

Leonardo e Galileo sono i titoli imposti dall'autore, Seb. Timpanaro, a due bei volumi (Milano, Mondadori) nei quali sono raccolte scelte pagine di grandi scienziati. Nel primo se ne trovano di L. B. Alberti, L. da Vinci, F. Redi, L. Spallanzani, A. Secchi, G. Govi, F. Delpino, A. Stoppani, M. Lessona, F. Denza, G. V. Schiapparelli, A. Mosso, L. Luciani, G. Celoria, O. Beccari, A. Favaro, G. B. de' Toni, A. Andres e G. de Lorenzo. Nel secondo invece si leggono pagine di G. Galilei, E. Torricelli, C. Dati, L. Magalotti, L. Galvani, A. Volta, G. Zamboni, A. Avogadro, M. Melloni, C. Matteucci, G. Ferraris, S. Cannizzaro, A. Pacinotti, P. Blaserna, I. Guareschi, A. Righi e G. Ciamician. Sobrie, ma opportune note stampate in fine del volume servono a rischiarare alcuni punti del testo; i ritratti degli autori suindicati accrescono l'attrattiva dei volumi Notevoli le prefazioni, una dedicata a considerazioni generali sul significato e l'ufficio della storia della scienza, l'altra contenente una bellissima biografia del Righi.

Annunciamo questi volumi, benchè non vi si legga alcun brano di matematica, perchè, grazie agli ordinamenti scolastici vigenti ora in Italia, gli insegnanti di questa materia non possono più isolarsi, ma devono interessarsi anche alle altre scienze positive. Aggiungiamo l'augurio di dover presto annunciare altri volumi analoghi recanti i titoli *Euclide* e *Diofanto*.

Biblioteca mathematica. Questa importante rivista — che sospese le sue pubblicazioni allo scoppiare della recente grande guerra e che fu colpita a morte per la scomparsa di G. Eneström suo fondatore e direttore — sta per risorgere in America sotto gli auspici della « Mathematical Association ». Del Comitato di redazione fanno parte R. C. Archibald, F. Cajeri e D. E. Smith, valenti cultori della storia della matematica; una circolare, diramata per far conoscere la buona novella, contiene un numeroso elenco di persone dei due mondi che diedero la loro adesione all'impresa (di Italiani E. Bortolotti, F. Enriques, G. Loria), perciò tutto fa credere che questa sarà coronata dal pieno successo che noi le auguriamo.

NECROLOGIO

H. VON MANGOLDT naque a Weimar il giorno 18 Maggio 1854. Frequentò successivamente le scuole secondarie di Gottinga, Friburgo e Dresda. Dopo l'anno di volontariato (Dresda, 1872-73) s'inscrisse nella Facoltà matematica dell'Università di Gottinga e vi rimase durante cinque semestri; passò poi a Berlino ove ottenne nel 1878 la laurea dottorale grazie a un lavoro compiuto

Digitized by Google

sotto la direzione di Weierstrass « Ueber die Darstellung der Wurzeln einer dreigliedrigen algebraische Gleichung durch unendliche Reihen ». Nello stesso anno ottenne a Gottinga il certificato « pro facultate docendi » nelle scuole medie; subito gli fu conferita una cattedra nel Ginnasio protestante di Strassburgo. Nel 1880 ottenne la libera docenza presso l'Università di Friburgo. Il 1° Aprile 1884 fu chiamato come ordinario al Politecnico di Hannover, ove rimase due anni, essendo poi passato a quello di Aachon; nell'estate 1904 fu scelto dal governo Prussiano come primo rettore e professore di matematica nel Politecnico allora istituito a Danzig-Langfuhr. Un colpo apoplettico lo spense il 27 Ottobre 1925. I suoi principali lavori si riferiscono alla geometria differenziale e alla teoria delle funzioni; ma alcune pubblicazioni minori mostrano il suo interesse per questioni di fisica. Maestro coscienziosissimo e oltremodo efficace, ha al proprio attivo una « Einfürung in die höhere Mathematik für Studierende und zum Selbstudium » che in breve volgere d'anni ebbe non meno di quattro edizioni. Le sue doti personali e amministrative sono descritte in una affettuosa necrologia scrittane da K. Knopp e inserita nel vol. 36 del *Jahresber. des Deutsch. Math. Ver.*, al termine della quale si trova l'elenco completo delle sue pubblicazioni.

ANGELO FORTI. Il vol. XII degli « Annali delle Università toscane » (Nuova Serie) contiene un'estesa e diligente biografia di questo scienziato, scritta da Augusto Forti. Si apprende da essa che egli nacque nel 1818 a Pesaro morì a Roma addì 23 Dicembre 1900. Studiò a Pisa, ove non tardò ad acquistare la stima dei suoi maestri Mossotti e Matteucci, di cui non tardò a divenire prezioso collaboratore. Dal 1859 ebbe la carica di professore di algebra e meccanica nel Liceo di Pisa, che conservò finchè fu collocato a riposo, malgrado l'offerta ricevuta di cattedre universitarie, per non allontanarsi dalla madre. L'articolo che annunciamo contiene il completo elenco delle pubblicazioni da lui fatte e precise informazioni intorno all'accoglienza favorevolissima che esse ricevettero in Italia e all'estero. Primeggiano fra esse le tavole da lui calcolate dei valori delle funzioni iperboliche, l'ultima edizione delle quali, benchè risalga al 1892, se non c'inganniamo, rappresenta ancora l'unico lavoro del genere che esista presso di noi.

Finito di stampare il 30 Marzo 1929 (VII)

ALBERTO CONTI, Direttore responsabile

Tip. P. Cuppini - Castiglione 6[29] - Bologna

Digitized by Google

Sezione storico-bibliografica

PUBBLICATA PER CURA

DI

GINO LORIA

SOMMARIO del Fasc. 2°: MATILDE I. CIAPPELLO. Sui numeri naturali che sono somma di due cubi in due modi diversi.
Recensioni. EDOARDO CIANI. Il metodo delle coordinate proiettive omogenee nello studio degli enti algebrici (*Carlo Rosati*). — Cinquantenaire scientifique de M. EMILE PICARD. Allocutions, lectures et télégrammes. - 1877-1927. Selecta. Cinquantenaire scientifique de M. EMILE PICARD. — FRANZ NEUMANN'S. Gesammelte Werke. Herausgegen von seinen Schülern. (*G. L.*) — Mathematisch-naturwissenschaftlich-technische Bücherei herausgegeben von E. WASSERLOOS - H. WIELEITNER. Mathematische Quellenbücher. I. Rechnen un Algebra. II. Geometrie und Trigonometrie. III. Analytisthe und synthetische Geometrie. IV. Infinitesimalrechnung. (*G. L.*) —A. GORDON WEBSTER. Partial Diferential Equations of matematical Physic. (*G. L.*) — H. WIELEITNER. Die Geburt der modernen Mathematik. (*G. L.*) — G. JULIA. Elements de géometrie infinitésimale. (*G. L.*) — C. JULIA. Cours de cinèmatique redigè par J. DIEUDONNÉ. (*G. L.*) — E. BOREL. Leçons sur les sèries divèrgentes. (*G. L.*) — H. VON SADEN. Mathematisches Praktikum, Teil I, mit 17 Figuren im Text, sowie 20 Zalentafeln als Anhang. (*G. L.*) — GOFFRIED WILHELM LEIBNIZ. Sämtliche Schriften und Briefe. Herausgegeben von der Preussichen Akademie der Wissenschaften. — **Notizie.** — **Necrologio.** Emanuele Czuber. Giuseppe Bagnera. Edmondo Hoppe.

MATILDE I. CHIAPPELLO

Sui numeri naturali che sono somma di due cubi in due modi diversi

Nel necrologio del matematico indiano SRINIVASA RAMANUJAN, pubblicato nel fasc. III dell'Annata decorsa di questo Bollettino (p. LXXI), è detto che questi abbia affermato essere il numero 1729 l'*unico* numero che sia esprimibile come somma di due cubi in due modi differenti (*). Quest'affermazione non è esatta, essendo noto, fin dai tempi di EULERO, che esistono infiniti numeri (naturali) che siano somma di due cubi in due modi diversi.

Dalle ricerche bibliografiche che ho fatto su tale questione, risulta invece che il numero 1729 é *il più piccolo* numero che sia somma di due cubi in due modi diversi.

(*) In seguito a rinnovate ricerche, si è potuto verificare che effettivamente il compianto matematico indiano aveva parlato non di *unico*, ma di *minimo* numero soddisfacente all'enunciata condizione. L'importanza dell'osservazione da lui fatta viene così diminuita, ma non perde alcun pregio l'articolo presente (*G. Loria*).

Digitized by Google

Ritengo quindi assai probabile che il matematico indiano, che aveva profonda conoscenza della teoria classica dei numeri, abbia voluto esprimere questa proprietà del numero 1729.

Credo poi che debbano riuscire assai interessanti pei lettori di questo periodico i risultati delle ricerche sulla questione in parola, e perciò ne do breve notizia.

***

1. Premetto che, dato un numero intero n, si può, con facile procedimento, riconoscere se esso sia somma di due cubi e in quanti modi, cioè se esistano soluzioni in numeri interi positivi x, y, e quali siano, dell'equazione:

$$n = x^3 + y^3. \tag{1}$$

Difatti, poichè il secondo membro si scompone nel prodotto di $x + y$ per $x^2 - xy + y^2$, l'equazione è possibile allora e solo quando esistono due divisori d, d' complementari di n, tali che il sistema:

$$x + y = d \quad , \quad x^2 - xy + y^2 = d' \tag{2}$$

sia risolubile in numeri interi postivi.

Ora, eliminando y tra queste due equazioni, si ottiene:

$$x^2 - dx + \frac{d^2 - d'}{3} = 0 \tag{3}$$

Poichè la somma delle radici di quest'equazione è uguale a d, ne risulta che queste radici costituiscono la soluzione del sistema (2), quindi perchè questa sia formata da due numeri interi positivi è *necessario* in primo luogo che il numero

$$\delta = \frac{d^2 - d'}{3} \tag{4}$$

(prodotto *delle due* radici) sia intero positivo. In particolare dev'essere:

$$d^2 > d',$$

ossia

$$d^2 > \frac{n}{d}. \tag{5}$$

Digitized by Google

Risolvendo la (3) si ha:

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2 - 4\delta}{4}} = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 4\delta}}{2}. \qquad (6)$$

Perchè, dunque, le due radici della (3) siano intere positive, è *necessario e sufficiente* che sia $\delta > 0$, cioè sia verificata la (5), e inoltre il numero $d^2 - 4\delta$ sia il quadrato di un numero intero (non negativo) λ, che sarà certamente della stessa parità di d):

$$d^2 - 4\delta = \lambda^2. \qquad (\lambda \geq 0) \qquad (7)$$

Allora le (2) dànno la soluzione:

$$x = \frac{d + \lambda}{2} \quad , \quad y = \frac{d - \lambda}{2}, \qquad (8)$$

che può dirsi la soluzione della (1) in numeri interi positivi, corrispondenti al divisore d di n.

Pertanto ad un divisore d di n non può corrispondere, al più, che una soluzione (in numeri interi positivi) della (1).

Si osservi che la condizione (7) trae con sè l'altra

$$d^2 - 4\delta \geq 0$$

ossia, in virtù di (4):

$$d^2 - 4\frac{d^2 - d'}{3} \geq 0,$$

$$4d' > d^2,$$

$$4\frac{n}{d} > d^2,$$

e però

$$d^3 \leq 4n. \qquad (9)$$

Dunque:

Perchè a un divisore d *di* n *possa corrispondere una soluzione della* (1) *è necessario (ma, in generale, non sufficiente) che sia:*

$$\sqrt[3]{n} < d \leq \sqrt[3]{4n}, \qquad (10)$$

cioè il divisore d *superi la radice cubica di* n *e non superi la radice cubica di* 4n.

Ne risulta così un procedimento per ottenere tutte le soluzioni della (1):

Digitized by Google

Si determineranno i divisori d *di* n *che soddisfano alla* (10), *e di questi divisori si considereranno solo quelli per cui abbia luogo la* (7), *cioè il numero*

$$\frac{1}{3}\left(4\frac{n}{d} - d^2\right)$$

sia quadrato perfetto. Le radici della (3) *daranno la soluzione della* (1) *corrispondente a ciascun divisore* d *così ottenuto.*

APPLICAZIONI. — Per $n = 1729 = 13 \cdot 19$ la condizione (10) dà

$$12 < d \leq 19,$$

perció a d possono assegnarsi soltanto i valori 13 e 19.

Corrispondentemente si hanno le seguenti soluzioni:

$$x = 12 \quad , \quad y = 1;$$
$$x = 10 \quad , \quad y = 9;$$

quindi:

$$1729 = 12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3.$$

Per $n = 4104 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 19$ si trova:

$$16 < d \leq 25,$$

quindi a d non possono attribuirsi che i valori 18, 19, 24; al valore 19 non corrisponde alcuna soluzione, mentre

per $d = 18$ si ha: $x = 16, y = 2,$
e per $d = 24$ » » $x = 15, y = 9;$

dunque:

$$4104 = 16^3 + 2^3 = 15^3 + 9^3.$$

Quest'esempio mostra che il numero 1729 ***non è il solo*** che sia esprimibile come somma di 2 cubi,

2. EULERO si occupò in varie pubblicazioni [1] della determinazione dei numeri che sono rappresentabili come somma di due cubi in due modi diversi dando anche delle formule di risoluzione (in numeri interi positivi) dell'equazione

$$x^3 + y^3 = z^3 + w^3. \qquad (11)$$

---

[1] Novi Comm. Acad. Petrop., t. 6°, 1756-7, p. 155; Comm. Arith., I, p. 193; Opera omnia, s. 1°, t. 2°, p. 428.

Digitized by Google

Queste formule furono semplificate da BINET (1).

Ma la soluzione generale della (11) fu data da SCHWERING (2), ed è la seguente:

$$\left.\begin{array}{l} x = m\alpha - n^2\,,\quad y = -m\beta + n^2\,,\quad z = n\alpha - m^2 \\ \qquad\qquad n = -n\beta + m^2 \end{array}\right\} \qquad (12)$$

essendo

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 3mn.$$

In questa assumendo:

$$m = 1\,,\ n = a^2 + 3b^2\,;\quad \alpha\beta = a \mp 3b$$

si ottiene la soluzione di EULERO sotto la forma data da BINET.

Il MOREAU (3) ha determinato tutti i numeri minori di 100000 che sono somme di due cubi in due modi diversi; essi sono i dieci seguenti:

$$\begin{aligned}
1729 &= 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3 \\
4104 &= 2^3 + 16^3 = 9^3 + 15^3 \\
13832 &= 2^3 + 24^3 = 18^3 + 20^3 \\
20683 &= 10^3 + 27^3 = 19^3 + 24^3 \\
32832 &= 4^3 + 32^3 = 18^3 + 30^3 \\
39312 &= 2^3 + 34^3 = 15^3 + 33^3 \\
40033 &= 9^3 + 34^3 = 16^3 + 33^3 \\
46683 &= 3^3 + 36^3 = 27^3 + 30^3 \\
64232 &= 17^3 + 39^3 = 26^3 + 36^3 \\
65728 &= 12^3 + 40^3 = 31^3 + 33^3
\end{aligned}$$

28 Novembre 1928 - VII

---

(1) Comptes rendus Paris, t. 12°, 1841, p. 248.

(2) Archiv Math. Phys., s. 3°, t. 2°, 1902, p. 280.

(3) L'intermédiaire des Mathématiciens, t. 5°, 1898, p. 66.

Digitized by Google

RECENSIONI

EDGARDO CIANI - *Il metodo delle coordinate proiettive omogenee nello studio degli enti algebrici.* (Seguito alle " Lezioni di Geometria proiettiva ed analitica „) Seconda edizione riveduta e aumentata. (Società Tipografica editrice nazionale, Torino, 1928).

La prima edizione dell'opera, che vogliamo oggi segnalare all'attenzione degli studiosi, comparve già nel 1915 (Spoerri, Pisa), come complemento e integrazione delle « Lezioni di Geometria proiettiva e analitica » dello stesso autore, dedicate ai suoi allievi dell'Università di Genova.

Il prof. Ciani si indusse a tale pubblicazione, guidato dal pensiero che la nozione e l'uso delle coordinate omogenee nello studio degli enti algebrici, mentre è poco opportuno in un primo anno di studio e per i giovani che si danno agli studi pratici dell'Ingegneria, si palesa invece utile e necessario in un successivo anno di studio e per coloro che si avviano alla Matematica teorica e quindi all'insegnamento. Ed è noto come tale volume, che portava un contributo non trascurabile alla formazione della cultura geometrica dei giovani studenti, fu accolto con generale favore.

La detta opera ricompare ora, in una nuova e nitida veste, riveduta ed aumentata; sicchè con le attuali aggiunte meglio si presta ad una vera e propria introduzione agli argomenti che attualmente si svolgono nei corsi di Geometria superiore.

Il volume consta di quattro parti; le prime tre sono rispettivamente dedicate alle forme fondamentali di 1ª, di 2ª, di 3ª specie; la quarta tratta dello spazio rigato.

Nella 1ª Parte, divisa in quattro capitoli, si dà anzitutto la nozione di coordinata proiettiva e di coordinate proiettive omogenee sulla punteggiata e si svolge la teoria analitica della proiettività su tale forma ed i risultati vengono poi subito estesi alle altre forme di 1ª specie. Indi vengono studiate le forme binarie quadratiche e cubiche, gli invarianti e i covarianti connessi con le medesime (quali il discriminante, l'armonizzante di due binarie

Digitized by Google

quadratiche, lo jacobiano di due binarie quadratiche, il covariante hessiano e il covariante Q di una binaria cubica) e il loro significato geometrico. E' dato infine un rapido cenno sulla rappresentazione simbolica.

La 2ª Parte è divisa in 3 capitoli.

Premessa la teoria analitica della proiettività ternaria, viene studiata la forma ternaria quadratica e svolta la teoria proiettiva delle coniche. Con la considerazione dei principali invarianti, covarianti e contravarianti connessi ad una coppia di tali forme, vengono trovate le proprietà dei fasci e delle schiere di coniche. Le principali proprietà metriche (fuochi, coniche omofocali, ecc.) vengono ritrovate come proprietà proiettive in relazione all'assoluto del piano. Si procede quindi a uno studio accurato delle forme ternarie cubiche e delle forme invariantive associate alle medesime. Si espongono le proprietà del fascio sizigetico definito da una cubica piana, la configurazione dei suoi flessi, il gruppo di proiettività rispetto a cui una tal cubica è invariante e si accenna alla rappresentazione parametrica della cubica piana generale mediante funzioni ellittiche.

Nella Parte 3ª, divisa in 3 capitoli, è contenuta la teoria analitica delle proiettività spaziali, lo studio proiettivo delle quadriche in relazione alle forme quaternarie quadratiche, le proprietà dei fasci e delle schiere, la nozione del cerchio immaginario all'infinito e, in relazione a questo, la determinazione delle sezioni circolari di una quadrica, e la teoria delle quadriche omofocali. Infine viene studiata la cubica gobba, le varie generazioni della medesima, il sistema nullo ad essa relativo e la configurazione cui dà luogo la rappresentazione spaziale della totalità delle binarie cubiche.

La Parte 4ª consta di due capitoli, nel 1° dei quali, premessa la nozione di coordinate plückeriane di retta, viene studiato il complesso lineare e i sistemi lineari ∞^1, ∞^2, ∞^3, ∞^4 di tali complessi; nel 2° i due più semplici complessi quadratici e cioè il complesso tetraedrale di Reye (col caso particolare metrico del complesso degli assi di una quadrica) e quello costituito dalle tangenti ad una quadrica.

Ciascuna parte è corredata da una serie di esercizi bene scelti e bene ordinati, non pochi del quali presentano un reale interesse e costituiscono un utile complemento alle teorie cui si riferiscono.

In un trattato come l'attuale, in cui sono esposte teorie

Digitized by Google

classiche che hanno ormai avuto il loro assetto definitivo, non è da richiedersi originalità di vedute e novità di risultati. I pregi possono solo consistere nella scelta degli argomenti, nel modo come questi vengono fra loro collegati, nella sobrietà e nell'armonia delle singole parti, nel rigore e nella chiarezza dell'esposizione. Ora tali pregi sono largamente posseduti dal presente trattato, ed appaiono più evidenti nelle parti più significative per la loro intrinseca eleganza (quali la teoria delle curve piane del 3° ordine, quella delle quadriche omofocali, ecc.); pertanto esso è da raccomandarsi vivamente ai nostri studenti di Matematica, giacchè può contribuire efficacemente all'educazione del loro gusto geometrico, e come preparazione a studi più elevati di Geometria.

CARLO ROSATI

Cinquantenaire scientifique de M. EMILE PICARD. *Allocutions, lectures et télégrammes.* Paris, Gauthier-Villars, 1928, 8°, p. 123.

1877-1927. Selecta. Cinquantenaire scientifique de M. EMILE PICARD. Paris, Gauthier-Villars, 1928, 4°, p. 304.

Come dice il titolo, queste due pubblicazioni furono fatte in occasione del giubileo scientifico di Emilio Picard, che fu solennizzato alla Sorbona il giorno 6 Maggio 1928. Entrambi ornati di riuscitissimi ritratti dell'illustre matematico, il primo contiene i discorsi pronunciati in quella occasione e le adesioni ricevute dal Comitato promotore. Maggiore importanza possiede l'altro volume, ove sono riprodotti i principali lavori del Picard, molti dei quali erano di difficile consultazione; crediamo far cosa gradita ai nostri lettori riproducendone qui i titoli:

Mémoire sur les fonctions entières (1880).

Démonstration d'un théorème général sur les fonctions uniformes liées par une rélation algébrique (1887).

Sur les couples de fonctions uniformes d'uue variable, correspondant aux points d'une courbe algébrique de genre supérieur à l'unité (1912).

Sur une classe de groups discontinus de substitutions linéaires

Digitized by Google

et sur les fonctions de deux variables indépendantes restant invariables par ces substitutions (1882).

Sur les fonctions hypérfuchsiennes provenant des séries hypergéométriques de deux variables (1885).

Sur les formes quadratiques binaires à indéterminées conjuguées (1883).

Sur la réduction continuelle de certaines formes quadratiques (1883).

Sur les formes quadratiques quaternaires et les groupes hyperabeliens correspondants (1884).

Sur un groupe de transformations des points de l'espace situés du même côté d'un plan (1883-84).

Sur la détermination des intégrales de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre par leurs valeurs le long d'un conteur fermé (1890).

Sur les équations linéaires aux dérivées partielles et la généralization du problème de Dirichlet (1901).

De l'intégration de l'équation $\Delta u = e$ sur une surface de Riemann fermée (1905).

Sur les groupes de transformations des équations différentielles linéaires (1894).

Sur l'extension des idées de Galois à la théorie des équations différentielles linéaires (1895).

Sur les intégrales de différentielles totales de troisième espèce dans la théorie des surfaces algébriques (1911)

Sur la formule générale donnant le nombre des intégrales doubles distintes de seconde espèce dans la théorie des surfaces algébriques (1904).

Sur quelques quéstions se rattachant à la connéxion linéaire dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes (1905).

Sur la nature algébrico-logarithmique des intégrales de différentielles totales relatives aux surfaces algébriques régulières (1916).

Sur un théorème général relatif aux équations intégrales de première espéce et sur quelques problèmes de la Physique mathématique (1910).

Sur la distribution de l'eléctricité avec la loi de Neumann, et sur la théorie analytique de la chaleur dans le cas d'un saut brusque de température (1914).

Sur la rotation d'un système déformable (1894).

L'Oeuvre de Henry Poincaré (1913).

Discours de réception à l'Académie française (1926).

G. L.

Digitized by Google

FRANZ NEUMANN'S - *Gesammelte Werke. Herausgegen von seinen Schülern.* I Band. Mit. 136 Figuren im Text. 4°, p. IX-428. Leipzig, Teubner 1928 (Prezzo RM. 50).

Quantunque il titolo di questo volume pnò far credere che esso inizi una nuova collezione scientifica, pure in realtà esso ne forma il degno coronamento.

I volumi II e III uscirono negli anni 1906 e 1912; il ritardo nella pubblicazione del presente è dovuta ad avvenimenti politici ben noti. Nel frattempo la schiera dei discepoli del grande scienziato tedesco si è estremamente assottigliata; ma i superstiti credettero fosse per essi un sacro dovere il portare a compimento la nobile impresa; onore ad essi che vi sono riusciti! Mentre i volumi antecedentemente pubblicati contengono lavori di fisica (epperò non vennero analizzati in queste colonne), quello che di cui oggi parliamo può e deve interessare i nostri lettori in quanto contiene, oltre a lavori di cristallografia geometrica, alcuni scritti giovanili relativi alla geometria dei cerchi e delle sfere: essendo essi anteriori a ben noti lavori di Steiner, fanno apparire il Neumann come precursore del celebre autore della « Systematische Entwickelung ». A titolo di curiosità notiamo che le ricerche in questione — che il Weierstrass teneva in grande pregio — furono giudicate dal Dirksen (allora professore all'Università di Berlino) come troppo elementari per condurre al conferimento di una laurea dottorale.

Tutti i lavori inseriti nel volume di cui ci occupiamo (alcuni dei quali inediti) furono sottoposti a un accurata revisione da parte di persone competenti e corredati di utilissime note. Il volume stesso si apre con la riproduzione di una dotta e affettuosa commemorazione del Neumann scritta da W. Voigt, che dell'illustre scienziato fu successivamente collaboratore e successore, dopo esserne stato discepolo G. L.

Mathematisch-naturwissenschaftlich-technische Bücherei herausgegeben von E. WASSERLOOS und G. WOLF. Berlin, Verlag Otio Saale, 8°.

H. WIELEITNER - *Mathematische Quellenbücher.* I. *Rechnen und Algebra.* Mit. 5 Abbilduugen, 1927, p. VII-75

Digitized by Google

(Prezzo Mk. 1.40). II. *Geometrie und Trigonometrie.* Mit. 22 Abbildungen, 1927, p. VII-68 (Prezzo Mk. 1.40). III. *Analytische und synthetische Geometrie.* Mit. 22 Abbildungen, 1928, p. VII-89 (Prezzo Mk. 2). IV. *Infinitesimalrechnung*, 1928, p. VIII-160 (Prezzo Mk. 4.50).

F. KLIEM - *Apollonius.* Mit. 39 Abbildungen, 1927, p. 75 (Prezzo Mk. 2.40).

Caratteristica della produzione matematica tedesca dell'attuale dopo guerra è la creazione di raccolte di cui ogni elemento é posto in vendita a prezzo conveniente. Alle molte già esistenti e ben note si aggiunge quella che oggi segnaliamo ai lettori del *Bollettino*, la quale consta di piccoli volumi stampati in buona carta e elegantemente rilegati.

L'autore dei primi quattro, fra quelli di cui riferimmo i titoli, è ben noto a tutti coloro che si occupano di storia della matematica per la sua dottrina e la sua instancabile attività. I volumi che ora egli presenta al pubblico formano una antologia matematica destinata a studenti di scuole medie; dato l'esiguo spazio di cui egli disponeva il problema della scelta si presentava irto di difficoltà e non esitiamo a dire che l'autore lo ha risolto in modo soddisfacente, tutti i brani da lui presentati al lettore essendo d'indiscutibile valore; e poichè la lettura dei libri antichi presenta al lettore moderno spesso gravi difficoltà, l'autore non ha mancato di aggiungere ai testi (tutti tradotti in tedesco) opportuni commenti.

A riprova di quanto sopra asserimmo diamo qui l'indicazione dei brani riprodotti nei volumi del prof. Wieleitner:

Bd. I. I. Poesia di J. Köbel. II. Le cifre romane nel Medio Evo. III. La Regola del tre (Böschenstein). IV. Logistica egiziana. V. Somma di una progressione geometrica (Euclide). VI. La proporzione aritmetica (Nicomaco). VII. Decomposizione di un quadrato nella somma di due altri (Diofanto). VIII. Soluzione di un problema indeterminato lineare (Id.). IX. Dimostrazione geometrica della risoluzione d'un equazione quadratica (Muhammed ibn Musa). X. Problemi di eredità presso gli Arabi (Id.). XI. I segni cossici (Riese). XII. Risoluzione d'un'equazione quadratica (Id). XIV. Inizi della notazione esponenziale (Grammaticus) XV. Il concetto di logaritmo nell'inversione della potenza (Stifel). XVI. Trattazione uniforme delle varie forme di un'equazione quadratica (Id.). XVII. Prima comparsa dei numeri immaginari (Cardano).

Digitized by Google

XVIII. Prima deduzione algebrica della regola di risoluzione di un'equazione quadratica (Bombelli). XIX. Un problema di secondo grado con due incognite (Vieta). XX. Trattazione uniforme delle varie equazioni quadratiche (Stevin). XXI. Equazioni lineari a tre incognite (Id.). XXII. Teorema fondamentale dell'algebra (Descartes). XXIII. Risoluzione approssimata delle equazioni (Eulero).

Bd. II. I. Le lunole d'Ippocrate. II. Dimostrazione geometrica di una identità (Euclide). III. « Elementi », Lib 3, Prop. 35 (Id.). IV. Intersezione di due circoli massimi (Teodosio). V. Teorema di Pappo. VI. Teorema di Tolomeo. VII. Teorema d'addizione per il coseno (Tolomeo). VIII. Calcolo del volume di un tronco di piramide (Erone). IX. Lunghezza della circonferenza e area del cerchio in agrimensori tedeschi del 1400. X. Il teorema del coseno pei triangoli sferici nella sua prima formulazione (Regiomontano). XI. Costruzione approssimata del pentagono regolare. XII. Area di uu triangolo in funzione dei lati (Erone). XIII. Teorema di Pitagora (Rudolff). XIV Teorema fondamentale della similitudine (Dürer). XV. Determinazione pratica di altezze. XVI. Teorema dei seni sulla sfera (Copernico). XVII. Calcolo degli angoli d'un poligono (Benedetti). XVIII. Teorema sulle tangenti (Fink). XIX. Risoluzione dei quattro casi nella trigonometria sferica (Vieta). XX. Il teorema d'addizione pei seni (Mayer). XXI. Teorema di Moivre (Eulero).

Bd. III. I. Definizione del cono circolare (Apollonio). II. Sezioni del cono circolare (Id.). III. L'ellisse come sezione di un cono obliquo. IV. Le coordinate in Fermat (Fermat). V. Prima forma dell'equazione d'un'ellisse (Id.). VI. Introduzione delle coordinate (Descartes). VII. Normale a un'ellisse (Id.). VIII. L'iperbole riferita agli asintoti (Debeaune), IX. Le prime formule per la trasformazione delle coordinate (Schooten). X. Prima equazione di una superficie (la Hire). XI. Equazione dell'iperbole (de l'Hopital). XII. I fuochi d'un'ellisse (Eulero). XIII. La parabola come limite di un'ellisse. XIV. L'involuzione (Desargues). XV. La forma primitiva del teorema di Pascal (Pascal). XVI. Introeuzione del ooncetto di proprielà proiettiva (Poncelet). XVII. Projettività del birapporto di quattro punti (Möbius). XVIII. Generazione delle coniche mediante fasci projettivi di raggi (Steiner).

Bd. IV. I. L'assioma della misura (cosidetto assioma d'Archimede). II. Rapporto di circoli. III. Quadratura della parabola mediante una progressione geometrica infinita. IV. Confutazione della teoria delle linee atomiche. V. Somma dei quadrati dei numeri naturali. VI. Volume dello sferoide. VII. Volume della

Digitized by Google

sfera in Archimede. VIII, Volume della sfera nel Secolo XVII. IX. I solidi rotondi in Keplero. X. Somme dei quadrati degli indivisibili di un triangolo. XI. Il solido iperbolico indefinito di Torricelli XII. Quadratura delle iperboli di grado superiore. XIII. Il metodo dei massimi e minimi di Fermat. XIV. Il triangolo caratteristico di Pascal. XV. Integrali trigonometrici. XVI. Differenziazioni che furono pubblicate. XVII. Le serie infinite per le funzioni arco seno, seno e coseno. XVIII. La « quadratura aritmetica » del cerchio. XIX. La tangente alla spirale di Archimede. XX. Introduzione delle flussioni di Newton. XXI. La derivata del seno.

Ogni volume si chiude con un elenco alfabetico dei nomi e delle personalità citate, accompagnati da un brevissimo cenno biografico.

L' ultimo dei volumi della collezione in esame ha per autore una persona già favorevolmente nota per avere volta in tedesco un'opera ben nota dell' Heath relativa ad Apollonio. Nell'attuale scritto, dopo una breve bibliografia del geometra di Perga, sono esposte varie soluzioni del problema dei contatti (a cui, come è noto, Apollonio consacrò un'opera oggi perduta) e finalmente è presentato un lucido riassunto della sua grande opera sulle *Coniche*, il quale, senza esonerare dallo studio dell' originale, servirà a far comprendere come e perchè Apollonio abbia meritato nell' Antichità l' epiteto di « grande geometra ». G. L.

A. Gordon Webster - *Partial Diferential Equations of matematical Physic.* Edited by S. J. Plimpton, 8°, p. 440. Leipzig, B. G. Teubner. (Prezzo R. M. 23).

Questo volume fa parte della nota collezione teubneriana di manuali relativi alle scienze esatte, che fiancheggia la grande Enciclopedia delle quattro Accademie, e nella quale l'autore pubblicò un altro volume che in pochi anni ottenne non meno di tre edizioni. A lui fu negato di pubblicare questa sua nuova fatica, ma il compito di darla alla stampe fu volontariamente assunto da un amico, il quale, nella prefazione, riferisce le seguenti frasi con cui il compianto autore ebbe a caratterizzare il suo volume: « Sembra essere generale l' impressione fra gli studenti che la fisica matematica consista nel dedurre un grande numero di

Digitized by Google

equazioni a derivate parziali e nel risolverle separatamente col mezzo di un'assortimento di artifici particolari non aventi fra loro alcuna relazione. Non fu ancora messo in chiaro che vi è in realtà una certa unità di metodo e si è spesso interamente all'oscuro su ciò che ha suggerito un artificio particolare alla mente del suo inventore. Io mi sono sforzato di mostrare che vi è soltanto un piccolo numero di equazioni a derivate parziali fondamentali ordinariamente richieste nella fisica, le quali io esporrò, e che i metodi che indicherò per risolverle abbracciano tutti i procedimenti particolari noti ».

Lo scopo che si propose l'autore ha un'importanza che non ha bisogno di esser dimostrata, essendo di per sè evidente. Per conseguire il proprio scopo egli richiama anzitutto le nozioni di calcolo vettoriale relativo al gradiente, alla divergenza e ai vortici, nonchè le proprietà essenziali delle deformazioni lineari; passa poi a stabilire le equazioni relative ai problemi fondamentali della fisica matematica, mostrando che tutte rientrano come casi particolari di una unica. L'ulteriore sviluppo del concetto dianzi dichiarato risulta chiaramente dall'indice dei Capitoli che quì riferiamo: I. Deduzione delle equazioni differenziali. II. Equazioni di I ordine. III. Equazione dell'onda; vibrazioni e funzioni normali. IV. Serie e integrale di Fourier. V. Metodi di Green; potenziale, problemi al contorno, VI. Metodo di Riemann-Volterra; caratteristiche. VII. Funzioni sferiche, cilindriche e elissoidali. VIII. Applicazioni delle funzioni sferiche, cilîndriche e ellissoidiche. IX. Teoria delle equazioni integrali.

In un'Appendice sono esposte alcune nozioni fondamentali di analisi utili per l'intelligenza del testo. G. L.

H. Wieleitner - *Die Geburt der modernen Mathematik.* I. *Analytische Geometrie* (p. 60). II. *Die Infinitesimalrechnung* (p. 71) [NN. 12 e 13 della collezione dal titolo *Wiessen und Wirken*]. Karlsuhe, G. Braun 1924 e 1925. (Prezzo di ogni vol. 1 Mk).

La spinta a scrivere il presente lavoro venne all'autore dall'avere osservato come in storie universali giustamente famose, alle scienze, in particolare alla matematica, non venga accordato

Digitized by Google

il debito posto; è un'osservazione che può ripetersi leggendo molte opere analoghe (ma non riguarda te, vecchio e coscienzioso Tiraboschi!) e che fa nascere il desiderio ed il progetto di colmare la corrispondente lacuna, col far conoscere alle persone di media coltura ciò che fu e ciò che è oggi la matematica.

Tale è il programma svolto dall'autore nei due volumetti che egli dedicò a esporre come nacque la matematica moderna; si tratta di uno scritto, parte storico e parte dottrinale, e ciò con piena ragione, perchè, dato il pubblico a cui il Wieleitner si dirige, oltre al presentare i genitori delle nuove creature, era necessario far noto la genealogia ed i caratteri della famiglia.

Essendo la geometria analitica, nelle sue origini, il prodotto dell'influenza dell'algebra sull'antica geometria, l'autore cominciò il proprio scritto esponendo a grandi linee, prima l'essenza di quella disciplina, poi che cosa fosse la matematica dei Greci e come si costituì l'algebra sino a Vieta. In due altri capitoli è descritto quanto fecero per dar vita alla nuova branca delle matematiche Fermat e Descartes; ed in quello di chiusa vengono indicate alcune direzioni in cui procedettero gli epigoni di questi sommi scienziati.

Sopra un piano consimile è redatto il secondo dei volumetti in esame. Con opportuni esempi l'autore fa anzitutto conoscere come i concetti d'infinito, d'infinitesimo e di limite siansi presentati sino degli elementi della matematica, dando luogo a quello d'integrale e producendo poi il calcolo di tale nome. Il calcolo differenziale, invece, trae origine dal problema della costruzione delle tangenti di una conica, il quale, nella sua forma generale, è coevo alla invenzione delle coordinate: in che cosa consista siffatto problema e come sia stato risoluto per alcune curve speciali notevoli è diffusamente esposto dall'autore. Il quale poi, senza arrestarsi ai precursori, dedica un capitolo a Leibniz e Newton, paragonandone l'opera scientifica, senza però addentrarsi nella penosa controversia sull'invenzione del calcolo infinitesimale: fanno eccezione alcuni lievi spunti polemici contro il Child, che di recente fece una esposizione critica dei primi lavori del Leibniz.

L'operetta è scritta in modo piano e semplice, onde riesce intelligibile anche a chi conosca soltanto gli elementi della matematica, piacevole, istruttiva anche per chi disponga di più ampia coltura scientifica. Data l'indole sua di divulgazione ed i limiti in cui venne per forza mantenuta, non è il caso che noi ci addentriamo in un'analisi microscopica di quanto essa contiene.

G. L.

Digitized by Google

G. Julia - *Elements de géometrie infinitésimale.* 8° gr. p. VI-242. Paris, Gauthier-Villare, 1927. (Prezzo 43 fr.).

Questo bel trattato proviene dalle lezioni fatte dall'autore alla Facoltà di scienze di Parigi sulle applicazioni geometriche dell'analisi e può utilmente servire di introduzione alla grande trattazione della materia dovuta a Darboux. L'autore si serve promiscuamente del metodo cartesiano e del calcolo vettoriale, il quale presta servigi analogi al triedro mobile, così largamente sfruttato da quel celebre geometra; tale circostanza renderà certamente ben accetto il volume in esame in Italia, ove il calcolo vettoriale conta larga simpatia e valenti cultori. La geometria infinitesimale ha ormai un programma definitivo; non potendo scendere quì in minuti particolari sul modo di trattazione di ogni singolo argomento, per dare un'idea del volume stesso riferiamo qui l'indice delle materie svolte:

Introduzione. Generalità sulla rappresentazione analitica delle curve, delle superficie e dei loro elementi infinitesimali.

Capitolo I. *Teoria del contatto. Inviluppi. Studio particolare delle famiglie di rette.* (1) Teoria del contatto. (2) Teoria degli inviluppi. (3) Studio delle famiglie di rette a uno o due parametri.

Capitolo II. *Studio delle curve gobbe o piane.* (1) Elementi esculatori delle curve gobbe o piane. (2) Proprietà intrinseche di una curva gobba. (3) Applicazioni delle formule di Serret-Frenet. (4) Studio di alcune curve speciali. (5) Studio della congruenza delle normali a una curva gobba.

Capitolo III. *Superficie.* (1) Proprietà generali delle superficie e delle linee tracciate su di esse. (2) Linee particolari tracciate su una superficie. (3) Applicazioni dei precedenti risultati alle congruenze di rette.

Capitolo IV. *Rappresentazione scambievole delle superficie.* (1) Generalità. Superficie applicabili. (2) Rappresentazioni conforme. Carte geografiche.

Note. (1) Nota relativa agli elementi immaginari. (2) Nota sopra le formole di calcolo vettoriale applicate precedentemente.

G. L.

G. Julia - *Cours de cioématique redigé par* J. Dieudonné 8° picc., p. 149. Paris, Gauthier-Villars, 1928. (Prezzo 35 fr).

Questo volume fu redatto in base alle lezioni fatte dall'autore alla Facoltà di scienze di Parigi come introduzione al corso di

Digitized by Google

Meccanica razionale, L'esposizione è fatta con un sapiente uso promiscuo delle coordinate cartesiane e del calcolo vettoriale; esso contiene i principali risultati dell'applicazione della cinematica alle curve gobbe, onde si collega e in un certo senso serve di complemento al volume sulla geometria infinitesimale, analizzato più sopra. Per i lettori desiderosi di conoscere gli argomenti trattati serve il seguente Indice:

Capitolo I. Cinematica del punto.

Capitolo II. Cinematica del corpo solido. Generalità, Studio delle velocità e delle accelerazioni.

Capitolo III. Composizione dei movimenti. Applicazioni.

Capitolo IV. Continuazione. Metodo del triedro mobile.

Capitolo V-VII. Studio approfondito del movimento di un corpo solido. (1) Movimento di una figura piana. (2) Movimento di un solido avente un punto fisso. (3) Movimento generale di un corpo solido. G. L.

E. Borel - *Leçons sur les séries divérgentes.* II édition, revue et entièrement remaniée, avec le concours de G. Bouligand. 8°. p. 260. Paris, Gautier-Villars, 1928. (Prezzo 40 fr.).

La I edizione di quest'opera risale al 1901; allora l'autore era semplicemente « maître de conférences à l'Ecole normale supérieur »; oggi è « membre de l'Institut, Professeur à la Sorbonne, Diréctour honoraire de l'Ecole normale superieure ». La materia ivi trattata è una di quelle a cui l'autore diede contributi che tutti riconoscono della massima importanza, tanto che, malgrado notevoli lavori precedenti, il nome del Borel è destinato a rimanere per sempre legato alla sommabilità delle serie divergenti. Il piano generale dell'opera che annunciamo è rimasto inalterato. Dopo un'Introduzione di carattere storico si trovano cinque Capitoli i cui temi sono: I. Le serie asintotiche; II. Le frazioni continue e la teoria di Stieltjes; III. Teoria delle serie sommabili. IV. Le serie sommabili e il prolungamento analitico. V. Sviluppi in serie di polinomi. Ma il sig, Bouligand ne aggiunse un VI sopra « Lo sviluppo moderno della teoria delle serie divergenti » ed inoltre due note, una sopra l'efficacia comparata dei

Digitized by Google

metodi di sommazione per medie dal punto di vista del prolungamento analitico, l'altra contenente esercizi e risultati varii. Inoltre, per merito suo, quei Capitoli furono completamente rifatti, tenendo conto dello sviluppo che in quest'ultimo quarto di secolo conseguì la teoria delle serie divergenti, per merito sia del Borel, sia di coloro che ne seguirono le traccie in Francia e altrove. I lavori utilizzati sono accuratamente citati, cosicchè l'opera in discorso, oltre che essere ricercata come opera organica originale, sarà utilizzata da tutti coloro che vogliono approfondire una teoria la cui importanza è generalmente riconosciuta.

G. L.

H. Von Sanden - *Mathematisches Praktikum, Teil I, mit 17 Figuren im Text, sowie 20 Zalentafeln als Anhang.* 8° p. V-122. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1927. (Prezzo del vol. leg. R. M. 6.80)

Questo volume, al pari dell'altro intitolato « Praktische Analysis » dello stesso autore, fa parte di una collezione dal titolo: « Teubner Technische Laitfaden » che comprende già 27 volumi. Scopo di esso è di rendere famigliari col maneggio dei procedimenti analitici coloro che si avviano alla carriera d'ingegnere. E' uno scopo analogo a quello che si proposero due note opere italiane, dovute una al prof. Vivanti, l'altra alla collaborazione di questo col prof. Fubini. Il livello raggiunto dal volume che annunziamo oggi è molto inferiore a quello toccato dai volumi or citati perchè tutto quanto concerne le equazioni differenziali fu riserbato a un altro volume attualmente in preparazione. Inoltre il volume del Sanden dà grande importanza al calcolo numerico; e chi conosce in quale imbarazzo si trovino la maggior parte degli studenti quando devono applicare numericamente le formole insegnate nei corsi di analisi, troverà pienamente giustificato questo orientamento dato dal nuovo volume. Si può dunque dire che questo non è in alcun modo un duplicato di quelli di cui è ricca la letteratura matematica, ma li completi.

A meglio caratterizzare il notevole volume del prof. Sanden serve la seguente indicazione dei Capitoli in cui è ripartito: I. Introduzione (numeri irrazionali, approssimazione, macchine calcolatrici, generalità sul calcolo numerico). II. Il regolo calcolatore. III. Teorema di Taylor. IV. Risoluzione delle equazioni. V. Calcolo degli errori VI. Integrazione, differenziazione, interpolazione. VII. Analisi armonica.

G. L.

Digitized by Google

GOFFRIED WILHELM LEIBNIZ - *Sämtliche Schriftem und Briefe. Herausgegeben von der Preussischen Akademie der Wissenschaften.* 4° Darmstadt, O. Reichl Verlag, 1923 e seguenti.

Allorquando, in principio del corrente secolo, venne fondata l'Associazione nazionale delle Accademie, una delle prime imprese collettive deliberate fu la pubblicazione delle opere complete di Leibniz, non escluso il carteggio. L'iniziativa partì dall'Accademia francese, ma fu subito caldamente appoggiata da quella di Berlino e queste due grandi corporazioni scientifiche furono incaricate del lavoro preparatorio. Questo consistette nella ricerca, nelle varie biblioteche d'Europa, di tutti i manoscritti del grande filosofo e poi nell'esame, foglio per foglio, di tutti i manoscritti così scoperti. Il risultato fu un Catalogo critico di quelli fra i detti manoscritti riconosciuti di valore scientifico; questo risultò di tale ampiezza che, stampato avrebbe occupato dieci grossi volumi; uno soltanto venne nel 1908 litografato in 100 esemplari e dato in omaggio alle principali biblioteche.

Nell'Estate 1914, il I Volume della progettata edizione, composto da parte dei tedeschi, era pronto per la stampa. La guerra, come è naturale, interruppe questa come tutte le imprese di carattere internazionale. Ma l'Accademia di Berlino (che più d'ogni altra era interessata a un omaggio doveroso verso il suo fondatore), deliberò di eseguire da sola l'opera colossale e ciò malgrado gli ostacoli prodotti dalle conseguenze della conflagrazione mondiale recente. Per tale deliberazione essa merita il plauso e la riconoscenza di tutti gli studiosi, diciamo tutti, perchè si può dire non esista ramo dello scibile a cui Leibniz non abbia volta la propria mente e apportato qualche contributo.

Secondo il piano ora fissato, l'edizione in parola comprenderà 40 volumi in-4° divisi nelle seguenti sezioni: 1. Carteggio generale, politico o storico. 2. Carteggio filosofico. 3. Carteggio relativo alle matematiche, le scienze naturali e la tecnica. 4. Scritti politici. 5. Scritti storici. 6. Scritti filosofici. 7. Scritti relativi alle matematiche, le scienze naturali e la tecnica.

L'edizione è veramente degna per sostanza e per forma dell'uomo di cui si celebra la gloria, e della grande Accademia che ne assunse la direzione; essa è destinata a divenire ben presto una rarità bibliografica, chè comprende soli 333 esemplari, di cui tre rilegati in tutta pelle, trenta in tutta pergamena e gli altri in tutta tela.

Digitized by Google

Vincendo il senso di tristezza, a cui non si può resistere riflettendo che ben pochi di coloro che assistono all'inizio della grandiosa impresa potranno vederne il compimento, noi ce ne rallegriamo in anticipo, dal punto di vista della storia della matematica, pensando che tutto fa credere si verrà finalmente in possesso di tutti i documenti capaci di illuminare, almeno dal lato tedesco, la grande controversia originata dall'invenzione dell'analisi infinitesimale. Possa questa pubblicazione spingere l'Inghilterra a offrire agli studiosi una edizione, altrettanto completa, delle opere dell'inventore della gravitazione uuiversale!

I tre volumi sinora pubblicati, non riferendosi all'attività scientifica di Leibniz, non consentono da parte nostra una minuta analisi. G. L.

NOTIZIE

Come si può parlare della matematica in due minuti. La « Fox Film Corporation » da qualche tempo invita vari specialisti a fare un discorso della durata di due minuti per la « Fox Movietone News ». Il prof. Slaught dell'Università di Chicago rispose a tale invito con le seguenti parole:

« Mi si domanda di parlare per due minuti sul significato umano della matematica. Sento che molti pensano della matematica, prescindendo dall'aritmetica commerciale, come un semplice passatempo di alcuni specialisti, qualcosa di privo di qualsiasi interesse umano generale. Al contrario è facile mostrare che la matematica sta a base della nostra odierna civiltà in modo altrettanto fondamentale che la luce solare è la fonte di qualsiasi vita e attività sulla terra. Non è a noi necessario di conoscere la costituzione del sole per goderne la luce e il calore. Similmente non è necessario essere un matematico per godere dei benefici che ci provengono dalla scienza matematica. Fu la matematica che svelò i misteri del cielo e distrusse l'ignoranza e la superstizione che regnavano allorchè gli uomini credevano che la terra fosse piatta e che il sole e le stelle ruotassero attorno ad essa. Grazie alla conoscenza del cielo raggiunta mediante la matematica, noi regoliamo i nostri cronometri e guidiamo le nostre navi in alto mare, E' la matematica che ci permette di rappresentare la superficie

Digitized by Google

della terra. Senza tale sussidio non sarebbe possibile tracciare alcuna pianta o carta delle coste o di una regione montagnosa. La nostra è l'era dell'elettricità, ma non è difficile mostrare che l'attuale meraviglioso sviluppo di quella forza misteriosa detta elettricità riposa sopra la matematica. La nostra è pure l'ora dell'apparato a gasolina, ma noi troviamo che l'automobile, i trattori, l'aeroplano, lo zeppelin e una quantità di altre invenzioni del secolo XX rese possibili dall'apparato a gasolina, dovettero tutti attendere e l'ingegnere e il disegnatore, i cui laboratori si fondano sulla matematica. Se noi consideriamo la totalità delle scienze fisiche quali la meccanica, l'ingegneria, la balistica, la fisica e buona parte della chimica e della geologia; e così certe parti delle scienze biologiche, le quali abbracciano ricerche importanti di fisiologia e biometrica; similmente tutte le questioni relative alla statistica di qualunque specie, come assicurazioni, annualità, ecc.; in una parola ogni forma d'investigazione quantitativa vedremo che tutte riposano in fondo sulla matematica. Persino certi aspetti della bellezza hanno una base matematica. Per esempio la simmetria che è la bellezza di forma, l'armonia che è la bellezza del suono, il ritmo che è la bellezza del moto, sono tutti vocaboli con contenuto matematico. Dunque noi vediamo che la matematica ha una relazione assai intima con la nostra vita quotidiana, epperò possiede vastissimo significato umano ».

Onoranze a Luigi Bianchi. *La Facoltà di Scienze della R. Università di Pisa ha diramato la seguente circolare:*

Il 6 giugno del 1928 mancava ai vivi LUIGI BIANCHI, Senatore del Regno, Professore in questa Università, onore e gloria delle scienze matematiche.

Questa Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali, che per 42 anni si è onorata di averlo nel suo seno, ha deliberato di rendere degnamente onore alla memoria di LUI, conservandone per sempre il ricordo con una fondazione intitolata al SUO nome e destinata al perfezionamento degli studi matematici, il cui capitale venga raccolto dalle sottoscrizioni di quanti furono, in Italia e all'estero, dello scienziato e del maestro, colleghi, discepoli, amici, o ammiratori e studiosi delle opere sue.

Nuovi periodici. Sotto la direzione del noto metematico spagnolo J. Rey Pastor è stato fondato il *Boletin del Seminario Mathemàtico Argentino*, il cui primo fascicolo fu pubblicato a Buenos Ayres nel Settembre 1928.

Digitized by Google

La Società matematica svizzera ha istituita una nuova rivista matematica intitolata *Commentari Mathematici Helvetici*. Direttore il prof. A. Speiser; editore Orell-Füssli di Zurigo.

Discendenti di Gauss. Guglielmo Teodoro Gauss è morto il 14 Novembre 1928 nella sua casa di Colorado Springs, all'età di 77 anni; egli era nipote del grande matematico tedesco e, da parte di madre, lo era anche di un altro celebre scienziato, F. G. Bessel. Durante molti anni egli spese tempo e denaro per raccogliere importanti ricordi del suo grande Avo; essi saranno utilizzati da G. Waldo Dunnington, professore all'Università di Wasinton, per una nuova biografia di Gauss. Con la morte che annunciamo il numero dei pronipoti di Gauss resta ridotto a quattro: uno di essi abita in California, gli altri nel Missouri. Il fratello dell'estinto è il Rev. Dott, Giuseppe Gauss, sopraintendente del « Brook Bible Institute » di St. Louis.

Bibliografia della teoria delle funzioni analitiche. L'ultimo fascicolo del Vol. LII degli « Acta mathematica » contiene un'accurato indice dei lavori relativi alla rappresentazione analitica delle funzioni uniformi, redatto da E Hille dietro suggerimento del compianto Mittag-Leffler. Si apre con una enumerazione degli argomenti principali costituenti detta teoria, ognuno contrassegnato da un numero d'ordine; segue l'indice alfabetico dei lavori in discorso, ognuno accompagnato da un numero di richiamo agli elementi dell'anzidetta enumerazione. Certamente se, invece dell'ordinamento per autori, fosse stato prescelto l'ordine cronologico, sarebbe stato più agevole il formarsi un concetto dello sviluppo storico di quella importante teoria.

Intorno alla biografia di Copernico. Nella « Storia della Polonia e delle sue relazioni con l'Italia » (Milano 1916) di F. Giannini si legge (p. 160): « Niccolò Koperniko (1473-1543) laureatosi in medicina all'Università di Cracovia, si dedicò tutto allo studio delle matematiche e dell'astronomia. Trasferitosi poi in Italia, studiò a Bologna sotto Domenico Maria di Novara, e a Roma sotto Regiomontano. I due astronomi, meravigliati dell'ingegno straordinario e della profondità delle sue idee, gli furono larghi di aiuti e di sincera affettuosa amicizia. Per la protezione del Regiomontano fu fatto professore di matematiche, e dopo essersi arricchito di scienza e di osservazioni fatte nel limpido cielo d'Italia, ritornò in patria ». Ora queste relazioni fra i due sommi scienziati sono inammissibili, perchè il Regiomontano morì

Digitized by Google

a Roma il 6 Luglio 1476, cioè quando Copernico (che nacque il 19 Febbraio 1473) non contava che poco più di tre anni. D'altronde è noto che il rinnovatore dell'astronomia ritornò in patria, non per occupare un posto d'insegnante, ma per assumere un'alta carica nella gerarchia ecclesiastica. Non sembra lontana dal vero l'ipotesi che lo storico italiano della Polonia siasi fondato sopra quanto scrisse il Bertrand nella sua nota opera « Les fondateurs de l'astronomie », ove (pp. 8-9) si parla appunto di amichevoli relazioni fra Copernico e Regiomontano, dopo di avere accennato ai consigli da quello ricevuti da un certo « Dominique Maria de Ferrara » che probabilmente non è che D. M. Novara. Tutto ciò rileviamo memori dell'osservazione di P. Tannery sulla inestinguibile vitalità degli errori storici.

NECROLOGIO

EMANUELE CZUBER. Nacque a Praga il 19 di Gennaio del 1851; studiò nel patrio Politecnico, ove nel 1878 ottenne la libera docenza, ma sino da quando era studente manifestò con pregiate pubblicazioni la propria attitudine alla ricerca scientifica. Nel 1886 divenne professore ordinario al Politecnico di Brünn-donde nel 1891 passò in quello di Vienna; ragioni di salute lo costrinsero nel 1919 a lasciare la cattedra da lui illustrata e ritirarsi a Gnigl (vicino a Salisburgo); due anni dopo veniva collocato a riposo; a Gnigl morì il 22 Agosto 1925. Ottimo insegnante, lasciò dei trattati più volte stampati e di cui il *Bollettino* rese conto al loro apparire. La sua fama scientifica riposa, meno sopra le sue numerose pubblicazioni prettamente teoriche, che sopra i suoi lavori sul calcolo delle probabilità e le sue applicazioni (gli ultimi dei quali datano dal 1923), argomento nel quale era in tutto il mondo riconosciuto come un'indiscussa autorità. In qualità di membro della Commissione di statistica demografica e di quella per costruire delle Tavole di mortalità, egli prestò al proprio paese preziosi servigi; fautore del monopolio delle assicurazioni da parte dello stato, con gioia trovò appoggio inatteso alle proprie convinzioni nella legislazione italiana.

Della sua straordinaria operosità fa fede l'elenco delle sue pubblicazioni il quale riempì non meno di cinque fitte pagine nella ottima necrologia pubblicatane da E. Dolezal nel Vol. 37 (1928) del « Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinignng »

Digitized by Google

GIUSEPPE BAGNERA. Nacque in Bagheria (Palermo) il 14 Novembre 1865, morì a Roma il 12 Maggio 1927. Compì gli studi tecnici a Palermo e, in quella Scuola d' Ingegneria, ottenne nel 1890 la Laurea di ingegnere civile. Compiuto il servizio militare fu assistente alla cattedra di geometria analitica proiettiva nell' Università di Palermo e ivi nel 1895 conseguì anche la laurea in matematica. Nel 1877 ebbe per concorso il posto di professore nel R. Educandato Maria Adelaide di Palermo e due anni dopo divenne libero docente. Nel 1901 fu, pure per concorso, nominato professore straordinario di algebra e geometria analitica nell' Università di Messina; nel 1905 fu promosso ordinario. Miracolosamente salvatosi dal terremoto che distrusse quella città, passò all' università di Palermo nel 1909 in qualità di professore di analisi infinitesimale e superiore, uffici che conservò nell' Università di Roma, ove fu chiamato nel 1921 (però non entrò in carica che a partire dall' anno 1922-23).

Un' analisi completa dei suoi lavori, accompagnata dall' Elenco delle sue pubblicazioni, leggesi nella bellissima Commemorazione fatta dal Prof. F. Severi il 6 Maggio 1928 all' Accademia dei Lincei e pubblicata nei *Rendiconti* della stessa.

EDMONDO HOPPE. Nacque nel 1854 a Burgdorf (Hannover); studiò nel periodo 1867-73 nel Ginnasio di Celle e poi nelle Università di Lipsia e Gottinga; in questa ultima Università ottenne la dignità dottorale nel 1876. Dal 1877 al 1896 fu Oberlehrer nella « Gelehrtenschule » del Johanneum di Amburgo e dal 1896 al 1919 occupò un' egual carica in quel Liceo. Collocato allora a riposo, fu chiamato all' Università di Gottinga per tenervi un corso di storia delle matematiche; e a Gottinga morì il 12 Agosto 1928. Uomo di profonda cultura classica e di grande energia nel lavoro, ha lasciato non meno di tredici volumi, circa 35 opuscoli e oltre 100 memorie, buona parte delle quali pubblicazioni sono relative alla storia della fisica e della matematica. Egli rimase sulla breccia sino al suo ultimo respiro, come è provato dalla memoria da lui annunciata al Congresso internazionale dei matematici di Bologna e che è da augurarsi veda la luce negli atti di tale riunione.

Finito di stampare il 29 Giugno 1929 (VII)

ALBERTO CONTI, Direttore responsabile

Tip. P. Cuppini - Castiglione G^le - Bologna

Digitized by Google

Sezione storico-bibliografica

PUBBLICATA PER CURA

DI

GINO LORIA

SOMMARIO del Fasc. 3°: Gino Loria. Una curva speciale ideata da Vincenzo Viviani. **Recensioni.** Leonida Tonelli. Serie Trigonometriche. (*A. Mambriani*) — Gino Loria. Histoire des mathématiques dans l'Antiquité hellénique — D. A. Smith. History of Mathematics. (*G. L.*) — Marcel Grossmann. Darstellende Geometrie für Maschineningenieure. (*Eugenio G. Togliatti*) — Francesco Severi. Elementi di geometria. (*Giacinto Guareschi*): **Notizie.** (*Addenda et corrigenda*) — **Necrologie.** J. L. Heiberg. G. Boussinesq. Giorgio Greehnill.

Una curva speciale ideata da Vincenzo Viviani

Nota di GINO LORIA

Del noto volume di V. Viviani *Quinto Libro d' Euclide ovvero Scienza universale delle proporzioni spiegata colla dottrina del Galileo* (Firenze, MDCLXXIV) alcune copie sono di 162 pagine, mentre altre ne contengono 284 (1), essendovi aggiunte altre speculazioni geometriche dell' ultimo discepolo di Galileo. Ora fra queste si trovano parecchi *Modi meccanici, lineari e solidi* per risolvere i problemi classici della divisione di un angolo in parti aventi fra loro dati rapporti e della ricerca di due medie proporzionali fra due rette date (sottinteso limitate).

Con le presenti linee ci proponiamo di richiamare l'attenzione dei lettori sulle pagine dedicate al primo dei detti problemi.

A questo il Viviani applica tre curve trascendenti. Due sono ben note: sono l'elica del cilindro circolare retto e l'ordinaria cicloide. Che la prima possa servire allo scopo è chiaro, ricordando che proprietà caratteristica di quella curva è (per usare le ordinarie locuzioni) che la quota di un suo punto qualunque rispetto alla base del relativo cilindro è proporzionale all' ascissa angolare della projezione di quel punto sul piano della base stessa; ciò evidentemente abilita a sostituire al problema sopraenunciato quello di dividere un segmento rettilineo in parti aventi fra loro appunto i rapporti dati. Che lo stesso accada riguardo alla cicloide si vede notando che il moto di ruzzolamento del cerchio generatore di questa curva fa corrispondere ad un arco qualunque

(1) Brunet: *Manuel du libraire et de l'amateur de livres*, T. IV (Paris, 1868) p. 1335.

Digitized by Google

di questo una determinata porzione della base, cosicchè abilita a una riduzione analoga alla precedente.

La terza delle settrici considerate dal Viviani è assai meno nota; probabilmente il Viviani la concepì da sè, ma ricerche storiche posteriori mostrarono (1) che Aristotile aveva volto ad essa il proprio sguardo. Si tratta della curva che nasce da una sezione piana arbitraria di un cilindro circolare retto, quando di questo si sviluppa la superficie sopra di un piano.

Per rendersi conto della natura di questa curva basta notare che se si applica la consueta procedura di sviluppo (2) al cilindro

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad \text{ossia} \qquad x = r\cos\varphi\,,\; y = r\,\text{sen}\,\varphi$$

si passa dal punto di coordinate x, y, z a quello di coordinate

$$\xi = r\varphi\,,\; y = z.$$

Perciò, se si considera la sezione prodotta in quel cilindro da un piano arbitrario

$$ax + by + cz + d = 0$$

cioè la curva di equazione

$$r(a\cos\varphi + b\,\text{sen}\,\varphi) + cz + d = 0$$

si giunge alla

$$r\left(a\cos\frac{\xi}{r} + b\,\text{sen}\,\frac{\eta}{r}\right) + c\eta + d = 0.$$

Si ponga ora, come è sempre lecito,

$$a = l\,\text{sen}\,\alpha\,,\; b = l\cos\alpha$$

e quest'equazione diverrà

$$\text{sen}\left(\alpha + \frac{\xi}{r}\right) + \frac{c}{lr}\left(\eta + \frac{d}{c}\right) = 0.$$

Si facciano ancora queste altre posizioni

$$\alpha + \frac{\xi}{r} = -X\,,\; \mu + \frac{d}{c} = -Y$$

---

(1) Burja: *Sur les connaissances mathématiques d'Aristote* (Mém. de l'Accad. de Berlin, 1791, p. 257).

(2) G. Loria: *Poliedri, curve e superficie secondo i metodi della geometria descrittiva* (Milano, 1912) p. 192.

Digitized by Google

e si scelgano le costanti determinatrici del piano in modo che si abbia $lr = c$; si giungerà così all'equazione

$$Y = \text{sen } X$$

donde emerge che *la settrice di Viviani non è che un'ordinaria sinusoide.*

Ora per vedere in qual modo questa possa funzionare quale curva settrice (quando essa sia completamente tracciata), si osservi che, dato che sia l'arco X, si conoscerà il suo seno epperò l'ordinata di un punto della sinusoide, per determinare il quale basta condurre la parallela a OX che si trova alla distanza sen X da questo asse. Sia P uno dei punti in cui essa taglia la sinusoide e P' la sua projezione sull'asse delle X. Si divida ora il segmento OP' (supposto che le parti siano due) nel dato rapporto m/n; sia Q' il punto ottenuto e Q quello che corrisponde ad esso nella sinusoide: sarà $Q'Q = \text{sen } \frac{mX}{n}$. Una facile discussione permette di determinare, in ogni caso, il numero delle soluzioni del problema.

RECENSIONI

Leonida Tonelli - *Serie trigonometriche.* Bologna, N. Zanichelli, 1928, pagg. VIII + 527.

È ormai ben nota la grande e crescente importanza delle *serie trigonometriche*, sia nelle matematiche pure, sia nelle applicazioni. Tali serie, intimamente legate all'evoluzione del concetto di funzione, sono uno strumento indispensabile nella rappresentazione analitica delle funzioni, e servono, in modo speciale, ovunque si debbano rappresentare analiticamente dei fenomeni periodici: per tal ragione, esse trovano frequente impiego nella fisica-matematica, nell'astronomia, nelle applicazioni matematiche alla fisiologia, ecc.

Il primo libro sulle serie trigonometriche, nell'indirizzo moderno (cioè, tenendo conto di tutto l'esame critico, sui fondamenti dell'Analisi, che si sviluppò nel secolo scorso, dal '60 in poi), è dovuto ad un italiano, Ulisse Dini, che, nel 1880, pubblicò il libro intitolato « *Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche*

Digitized by Google

delle funzioni di una variabile reale ». All'opera del Dini seguì, nel 1906, il ben noto libro del LEBESGUE, in cui l'autore sfrutta il suo nuovo concetto d'integrale definito. Dalla comparsa del libro del Lebesgue fino ai nostri giorni, ossia circa nell'ultimo venticinquennio, si ebbe un grande sviluppo della teoria delle serie trigonometriche, con un numero rilevantissimo di Note e Memorie, come risulta da un semplice sguardo alla bibliografia su tali serie pubblicata, alcuni anni fa, dal LECAT; ma, purtroppo, in Italia vi furono pochi cultori, nonostante che l'origine di tali studi moderni debba rintracciarsi nel libro del Dini.

Dopo il libro del Lebesgue, non uscì, però, alcun trattato moderno e completo sulle serie trigonometriche, e la maggiore esposizione di tale teoria appare nel trattato dell'HOBSON, « *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series* », in cui vengono dedicati due interi capitoli alle serie di FOURIER ed alla rappresentazione delle funzioni mediante integrali di Fourier. Dagli studiosi, perciò, era attesa un'opera moderna, interamente dedicata a tali studi, la quale raccogliesse e coordinasse il vasto materiale, che si era venuto formando, in un tutto organico con quello prima noto, e quest'opera è ora presentata dal prof. LEONIDA TONELLI con le sue « *Serie trigonometriche* ».

Tale Opera è, appunto, un'esposizione sistematica e completa di quanto d'essenziale è noto sulle serie trigonometriche. I risultati classici, nonchè gli studi più recenti su tali serie, vi si trovano presentati in forma organica, spesso semplificati e completati; ed a tutta la teoria viene dato un assetto definitivo. I contributi personali dell'Autore sono sparsi qua e là in tutto il libro, e noi cercheremo ora, facendo il resoconto sul contenuto dei diversi capitoli, di indicare i principali di tali contributi; si vedrà così che ad essi si deve quasi completamente l'ultimo capitolo, quello dedicato alle serie doppie di Fourier.

L'A. ha creduto utile di abbandonare l'ordinamento abitualmente seguito nei trattati che si occupano di serie trigonometriche: ha cominciato con lo studio delle serie trigonometriche generali, allo scopo di mettere subito in evidenza i fatti che sono comuni a tutte le serie di questo tipo; ed è poi passato a considerare le peculiari proprietà delle serie di Fourier. Alla trattazione così condotta giova il fatto che la teoria delle serie trigonometriche generali può conservare un carattere pressochè elementare, mentre quella delle serie di Fourier deve fare appello, per i suoi completi svolgimenti, a considerazioni di natura più elevata.

È stata particolarmente curata la parte elementare della

Digitized by Google

teoria; cosicchè, se, da un lato, il libro riuscirà molto utile a coloro che desiderano di approfondire i punti più delicati delle serie trigonometriche, per dedicarsi ad ulteriori ricerche, dall'altro, esso sarà di grande giovamento a quelli che desiderano soltanto di impadronirsi delle proposizioni fondamentali, per trarne profitto nelle applicazioni pratiche.

È stato poi adottato, in forma generale, il concetto di integrale di Lebesgue; però tale concetto interviene, nella sua essenza, solo in pochi e particolari punti del libro, per modo che anche chi non abbia alcuna conoscenza dell'integrale di Lebesgue può leggere e comprendere l'opera quasi totalmente.

L'esposizione ha ovunque, nel libro, i pregi ben noti di tutti gli scritti del Tonelli: è, anzitutto, strettamente scientifica e rigorosa, ed insieme, poi, sommamente piana ed elementare! Il Lettore — a cui non viene richiesto, per la comprensione, che quelle cognizioni che si apprendono negli ordinari corsi di Analisi infinitesimale — dopo lo studio attento di tutto il libro, proverà, indubbiamente, la piacevole sensazione di essere stato guidato ad un punto eminente da cui si vede ogni cosa studiata nella sua giusta posizione.

***

Il libro comincia con un *Cenno storico*, non lungo ma molto interessante. Richiamato, ivi, l'importanza delle serie trigonometriche nella teoria e nelle applicazioni, richiamato l'intimo legame esistente fra lo sviluppo della teoria di tali serie e l'evoluzione del concetto di funzione e quello di integrale definito, si illustra il primo problema da cui ebbe veramente origine la teoria di queste serie, che è il *problema delle corde vibranti*, passando attraverso l'opera di D'Alembert, di Daniele Bernoulli e di Eulero, e pervenendo infine a Fourier il quale può considerarsi come il fondatore della teoria delle serie che da lui prendono il nome. Viene poi, in rapida sintesi, richiamata l'opera sviluppatasi con Cauchy, Poisson, Dirichlet, Riemann, Du Bois-Reymond ed infine con Dini, Lebesgue, Fejér, ecc..

***

Nel Cap. I si studiano le *serie trigonometriche generali*. Si stabiliscono dapprima le condizioni necessarie per la convergenza semplice: viene data una dimostrazione molto elementare di un teorema, dovuto a Steinhaus, che ha, come casi particolari, i noti

Digitized by Google

teoremi di CANTOR e di Lebesgue sulla convergenza allo zero dei coefficienti di una serie trigonometrica convergente, rispettivamente, in un intervallo od in un insieme di punti di misura non nulla. Si studia poi la convergenza assoluta dimostrando, pure con ragionamenti molto semplici, i noti teoremi di FATOU e di DENJOY-LUSIN; sono date condizioni affinchè una serie non converga mai assolutamente od abbia soltanto dei punti di convergenza assoluta isolati, e viene studiato l'influenza dei punti di convergenza assoluta sul comportamento di una serie trigonometrica.

Si passa dopo alle condizioni sufficienti per la convergenza semplice, fondate essenzialmente sulla trasformazione nota comunemente sotto il nome di trasformazione di ABEL e che l'A. chiama invece *trasformazione di* BRUNACCI-ABEL, perchè trovasi nel « Corso di Matematica sublime » pubblicato dal Brunacci nel 1804. È poi studiata la convergenza uniforme delle serie trigonometriche e, esposto il teorema di CHAUNDY e JOLLIFFE, l'A. dà nuovi e più generali criteri affinchè una serie trigonometrica sia ovunque uniformemente convergente, ed affinchè una serie di seni, pur essendo ovunque convergente, non sia ovunque uniformemente convergente. È dimostrato il teorema di KOLMOGOROFF e SELIVERSTOFF sulla convergenza quasi dappertutto di una serie trigonometrica, e viene esposto il metodo di EULERO-LAGRANGE per sommare le serie trigonometriche.

Si dà ancora il teorema di Eulero-Fourier sulle serie trigonometriche uniformemente convergenti, e si giunge alla condizione necessaria e sufficiente, data da Riemann, per la convergenza di una serie trigonometrica: tale condizione è fondata su un lemma, pure dovuto a Riemann, e di cui l'A. riesce a dare una dimostrazione estremamente semplice.

***

Il Cap. II è dedicato alla *rappresentazione delle funzioni mediante serie trigonometriche.* Dati i teoremi di Du Bois-Reymond e di Riemann, relativi alle derivate seconde generalizzate in relazione colle serie trigonometriche, si studiano le condizioni necessarie e sufficienti per la sviluppabilità di una funzione in serie trigonometrica, stabilite per la prima volta dal Riemann.

Si tratta poi dell'unicità degli sviluppi in serie trigonometrica di una funzione, ed attraverso una opportuna estensione di un teorema di HÖLDER, si giunge al noto teorema di HEINE-CANTOR ed alle sue generalizzazioni. È studiata la relazione fra la somma

Digitized by Google

di una serie trigonometrica in un punto e la somma nei punti vicini, giungendo ad una proposizione generale che contiene, come caso particolare, una proposizione già data dall' Hobson.

Segue lo studio delle condizioni sufficienti affinchè una serie trigonometrica sia una serie di Fourier, e vengono dati i teoremi di Du Bois-Reymond-Lebesgue, di De La Vallée Poussin, ed un altro, più generale di tutti, che appare per la prima volta in questo libro. È dato l'esempio di una serie trigonometrica ovunque convergente che non è una serie di Fourier. Fa seguito una dimostrazione generale, diretta ed elementare, e che si deve all'A., del fatto che se i coefficienti di Eulero-Fourier, di una data funzione, sono tutti nulli, la funzione è nulla quasi dappertutto. In applicazione di questa proposizione, vengono dati, con metodo elementare, dei teoremi di convergenza per le serie di Fourier, teoremi che sono più che sufficienti per le applicazioni pratiche. Vengono, infine, molteplici esempi di sviluppi di funzioni in serie di Fourier.

***

Il Cap. III tratta della *rappresentazione approssimata con polinomi trigonometrici*. È studiato dapprima il problema dell' interpolazione trigonometrica, sia con polinomi trigonometrici di soli seni, sia con polinomi di soli coseni, sia, infine, con polinomi trigonometrici generali. Vengono stabilite le formule che dànno i coefficienti dei vari sviluppi e, con un metodo del tutto elementare, proprio del Tonelli, viene dimostrata la convergenza delle formule d' interpolazione. Si trovano indicate, ancora, le relazioni fra i coefficienti del polinomio d' interpolazione ed i coefficienti di Eulero-Fourier, relazioni espresse da formule dovute ad Eulero ed a Gauss.

Si passa poi alla considerazione del metodo dei minimi quadrati, mostrando come esso conduca alle serie di Fourier.

Segue lo studio dei polinomi trigonometrici di Fejér: per essi si dimostrano i noti teoremi di Fejér e di Lebesgue, e viene aggiunta una nuova generalizzazione del teorema di Fejér; si accenna brevemente ai risultati più recenti di Hardy e di Littlewood, ed alle generalizzazioni dei metodi di sommazione del Cesàro, di rango r, intero o no, maggiore di -1.

L' ultima parte del Capitolo è dedicata al metodo di approssimazione di Tchebychev, in cui vengono utilizzati gli studi del Tchebychev, del Fréchet, del Young, del Tonelli, del De la Vallée

Digitized by Google

Poussin e del Bernstein. Seguendo un metodo particolarmente semplice, che il Tonelli espose per la prima volta nella sua tesi di laurea, viene studiata la questione dell'esistenza, dell'unicità e della continuità del polinomio d'approssimazione. Per la prima volta poi viene qui esaminata la rappresentazione delle funzioni (continue) *non* periodiche, e si mostra che, mentre una funzione continua e periodica (con periodo 2π) ammette sempre un solo polinomio trigonometrico d'approssimazione di dato ordine, una funzione continua [nell'intervallo $(0,2\pi)$] e non periodica può ammettere più ed anche infiniti polinomi trigonometrici d'approssimazione dello stesso ordine. È studiata inoltre la determinazione analitica del polinomio trigonometrico d'approssimazione, ed è indicato, a tale scopo, un procedimento generale che vale in tutti i casi, e che è l'analogo di quello indicato dal PÒLYA per il calcolo dei polinomi trigonometrici, razionali interi, d'approssimazione.

***

Nel Cap. IV vengono studiate le *successioni di Fourier*. Si definisce come successione di Fourier, relativa ad una data funzione $f(x)$, integrabile in $(0,2\pi)$, la successione dei coefficienti dello sviluppo di $f(x)$ in serie di Fourier. È messo in evidenza la corrispondenza biunivoca fra una funzione e la sua successione di Fourier (quando si prescinda dalle funzioni nulle quasi dappertutto); è mostrato come il polinomio trigonometrico di Fejér permetta la determinazione effettiva della funzione, in base alla sola conoscenza della relativa successione di Fourier.

Si passano a studiare le condizioni necessarie affinchè una data successione sia una successione di Fourier; si dà, così, il teorema di Riemann-Lebesgue, e si esamina poi l'ordine di grandezza dei coefficienti di Eulero-Fourier per una funzione a variazione limitata, oppure continua, od anche non limitata. Si dimostra la disuguaglianza di BESSEL e, dopo di aver stabilito la condizione d'integrabilità del quadrato della funzione generatrice della successione di Fourier, si giunge alla formula di PARSEVAL; da questa, si sale alla generalizzazione rappresentata dai teoremi di YOUNG-HAUSDORFF e che l'A. riesce a dimostrare in forma semplice, seguendo un metodo dovuto ad F. RIESZ. Seguono le condizioni di convergenza semplice ed assoluta delle serie $\Sigma \frac{a_n}{n}$, $\Sigma \frac{b_n}{n}$, dove gli a_n e b_n sono i coefficienti di Eulero-Fourier della funzione considerata, e si mostra, in particolare, col Lebesgue, che la se-

Digitized by Google

conda di quelle due serie è sempre convergente. Si dànno anche le condizioni sufficienti per la convergenza delle serie Σa_n, Σb_n, ed indi i teoremi di BERNSTEIN e di SZÀSZ.

Si studiano da ultimo le condizioni sufficienti affinchè una successione sia di Fourier: è fatta una dimostrazione molto semplice del teorema di RIESZ-FISCHER, e si dànno delle condizioni dovute a Young ed a SZIDON, ed altre condizioni che qui appariscono per la prima volta.

***

Il Cap. V è dedicato allo studio della *convergenza delle serie di Fourier*. Si incomincia con l'esame della convergenza assoluta e si dà una condizione sufficiente dovuta al BERNSTEIN, ed un'altra condizione sufficiente dovuta all'A. stesso, ed anche un teorema, dovuto a Szidon, relativo alle serie di Fourier con lacune.

Lo studio della convergenza semplice viene fatto mediante l'uso dell'integrale di Dirichlet, e, stabilito il teorema di Riemann sulla dipendenza esclusiva della convergenza di una serie di di Fourier in un punto dai valori che la funzione assume nell'intorno di questo punto, si espongono i criteri di convergenza del Dini (che contiene quello di LIPSCHITZ), di Dirichlet-Jordan, di De la Vallée Poussin, di Lebesgue, ed infine il criterio, che si deve al Tonelli, relativo a funzioni che presentano singolarità isolate.

Si studia, ancora, la convergenza uniforme e la convergenza parziale, per l'ultima delle quali si dànno i teoremi di KOLMOGOROFF.

Un altro paragrafo è dedicato alle serie trigonometriche coniugate: vi si studia la convergenza della serie coniugata di una data serie di Fourier, esponendo i criteri di convergenza di PRINGSHEIM e di Young.

Un ultimo pararafo si riferisce al grado d'approssimazione della somma parziale di Fourier, del polinomio trigonometrico di Fejér e dei polinomi trigonometrici d'approssimazione, utilizzando sopratutto i risultati di Lebesgue, De la Vallée Poussin, Jackson e Bernstein.

***

Nel Cap. VI vengono considerate le *operazioni sulle serie di Fourier*. Dapprima si studiano le operazioni di addizione e di moltiplicazione; ed è dato il teorema di Parseval con alcune sue generalizzazioni. Nello studio della convergenza della serie del

Digitized by Google

prodotto di due funzioni, si stabilisce un risultato che ha, come casi particolari, altri risultati dovuti al Lebesgue ed allo Steinhaus.

Segue lo studio del problema dell'integrazione termine a termine di una serie di Fourier, e si perviene al noto teorema di Lebesgue. Si dànno risultati relativi all'integrazione di una serie di Fourier moltiplicata per una data funzione, viene dimostrato il teorema di Lusin sull'integrabilità termine a termine di una qualunque serie trigonometrica convergente; e di questo teorema si trova poi data una notevole generalizzazione. Da tali risultati si deduce la piena giustificazione dell'integrabilità termine a termine eseguita dal Fourier per determinare i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier di una funzione $f(x)$, ammesso che tale sviluppo esista e che la $f(x)$ sia finita ed integrabile; cosicchè una delle due obiezioni fondamentali, mosse al ragionamento di Fourier, viene ad essere completamente rimossa.

Da ultimo, si trova presa in considerazione la derivabilità termine a termine di una serie di Fourier: è studiata prima la derivazione della serie di Fourier di una funzione assolutamente continua e poi quella della serie di Fourier di una funzione integrabile qualsiasi, infine, la derivazione di una serie trigonometrica qualunque.

***

Nel Cap. VII si esaminano le *singolarità delle serie di Fourier*. Seguendo un metodo dovuto a Fejér ed a De la Vallée Poussin, si studiano la singolarità di Du Bois-Reymond e quella di Lebesgue, e si accenna alle singolarità di Steinhaus e di Kolmogoroff. Viene dato, alla fine, completo svolgimento del fenomeno di GIBBS, in una forma particolarmente semplice.

***

Il Cap. VIII tratta di *due integrali classici*. Dapprima si studia l'integrale di Poisson, sia mediante l'uso di un noto teorema di FROBENIUS che permette di dedurre la convergenza dell'integrale di Poisson, al tendere del punto fondamentale alla circonferenza, dai risultati relativi ai polinomi trigonometrici di Fejér; sia mediante un metodo, dovuto al Fatou, che permette di esaminare la questione nella sua forma più generale possibile, ed inoltre di dedurre che se una serie di Fourier converge in un determinato punto, ove la funzione generatrice è la derivata del suo integrale definito, la somma della serie è, in quel punto, precisamente il

Digitized by Google

valore considerato della funzione. Si passa poi ad un procedimento più generale, che si mostra particolarmente utile nelle applicazioni, in cui la convergenza viene stabilita facendo uso di una generalizzazione, dovuta al BROMWICH, del teorema di Frobenius più sopra ricordato. Dallo studio dell'integrale di Poisson viene dedotta la risoluzione del problema di Dirichlet, per il caso del cerchio ed anche per quello della corona circolare.

La seconda parte del Cap. è dedicata all'integrale di Fourier, nelle sue due forme in cui è generalmente conosciuto, e si espongono tutti i risultati più moderni ad esso relativi, dovuti sopratutto all'Hobson, al Pringsheim, al Young ed all'Hahn. Segue lo studio dell'integrale di SOMMERFELD, pel quale i risultati già noti vengono opportunamente completati.

***

Il Cap. IX, ed ultimo, è dedicato alle *serie doppie di Fourier*, ed è quasi interamente dovuto alle ricerche personali dell'Autore.

Premesse alcune proposizioni ausiliarie ed utilizzando il concetto di funzioni di due variabili a variazione limitata — introdotto dal Tonelli in alcune sue ricerche sulla quadratura delle superficie —, l'A. giunge a dei teoremi di convergenza che sono notevoli e per la loro generalità e per i criteri particolari che se ne deducono, i quali criteri assumono la forma semplice che hanno i corrispondenti criteri dati per le serie di Fourier delle funzioni di una variabile. Citiamo, in particolare, il criterio di convergenza per le funzioni monotone (ossia, per le funzioni che, per ogni x, sono monotone in un determinato verso rispetto alla y, e, per ogni y, sono monotone in un determinato verso, non necessariamente concorde col precedente, rispetto alla x), di cui un caso molto particolare era già stato considerato dall'Hobson; il criterio detto del rapporto incrementale, da cui, in particolare, scende che « se la funzione $f(x,y)$ soddisfa, nel quadrato fondamentale $[0 \leq x \leq 2\pi,\ 0 \leq y \leq 2\pi]$, alla condizione di Lipschitz, la sua serie di Fourier converge ovunque », risultato già enunciato da G. CERNI nel 1901 e la cui prima ed unica dimostrazione rigorosa fu data dal Tonelli nel 1927. Citiamo ancora il criterio di convergenza per le funzioni limitatamente oscillanti (cioè, tali da compiere, su ogni parallela all'asse delle x ed all'asse delle y, un numero di oscillazioni non maggiore di un numero fisso); il criterio dell'assoluta continuità; il criterio della variazione doppia finita (vale a dire, a variazione limitata nel senso, non del Tonelli,

Digitized by Google

ma del Vitali, Lebesgue, ecc.), già dato con qualche maggiore limitazione dall' Hardy.

Con questi teoremi e criteri di convergenza, lo studio della convergenza delle serie doppie di Fourier risulta sistemato in forma definitiva.

L' A. passa a studiare la sommabilità, delle serie doppie di Fourier, per linee e per colonne, e dimostra, fra altre notevoli proposizioni, che, nelle condizioni di uno qualunque dei criteri già più sopra indicati, la serie di Fourier è sommabile anche per linee e per colonne, fornendo sempre la stessa somma del metodo di sommazione ordinaria.

Si viene poi allo studio dei polinomi trigonometrici di Fejér, e si estendono a due variabili i teoremi dati da Fejér e Lebesgue per le funzioni di una sola variabile. Per l'estensione del teorema di Lebesgue, l' A. ha dovuto porre una restrizione la cui necessità non era stata avvertita dagli autori precedenti che si erano occupati della stessa questione. Tale estensione ha condotto l' A. anche ad una ricerca interessante relativa alla limitazione del rapporto dei due indici del polinomio di Fejér, al tendere di entrambi gli indici all'infinito.

Un ultimo paragrafo è dedicato allo studio del polinomio trigonometrico di De la Vallée Poussin, già fatto, sotto condizioni molto restrittive, dal SIBIRANI, e poi in tutta la sua generalità dal Tonelli stesso. Di tale polinomio l'A. si serve per mostrare come, dalla conoscenza dei coefficienti di una serie doppia di Fourier, si possa sempre risalire alla determinazione della funzione generatrice. Viene poi data la condizione d' integrabilità del quadrato della funzione generatrice, e successivamente vengono stabilite la disuguaglianza di Bessel e la formula di Parseval per le funzioni di due variabili. Infine, viene data l'estensione, a due variabili, del teorema di Riesz-Fischer e di quello dell'integrabilità termine a termine delle serie di Fourier.

***

Il libro termina con l'indice degli autori citati e l'indice per materia. Il testo è corredato da ricche e precise note bibliografiche, per modo che il libro mette immediatamente al corrente di tutti i lavori di qualche importanza pubblicati sulle serie trigonometriche.

La veste tipografica è ottima.

Agli studiosi, ora, il piacere di servirsi di tanto materiale così bene ordinato ed elaborato, e di trarre profitto dei ricchi fermenti contenuti in tale opera!

A. MAMBRIANI

Digitized by Google

GINO LORIA - *Histoire des mathématiques dans l'Antiquité hellénique* (Vol. XIII de la Collection " *Science et civilisation* "). Paris, Gathier Villars, 1929. p. 214, avec plusieurs figures et la reproduction d'un fresque recemment decouvert à Pumpei qui donne l'explication de l'enigme relatif au foncionnement de la vis d'Archimède). (Prix 30 fr.).

Table des matières. Chap. I. Les berceaux de la pensée mathématique. Chap. II. Origine et première phase de developpement des mathématiques chez les Grecs. Chap. III. L'âge d'or de la géométrie grecque. Chap. IV. Contemporains et épigones des grands géomètres de la Grèce. Chap. V. L'arithmétique des Grecs. Chap. VI. La terre et les astres dans la pensée des anciens Grecs. Chap. YII. L'esprit grec dans les mathématiques modernes. Bibliographie.

D. E. SMITH - *History of Mathematics.* 8°. Vol. I. *General Survey of the History of Elementary Mathematics.* p. XXII + 596 - Vol. II. *Special Topics of Elementary Matematics.* p. XII + 725. Boston. Ginnaut Co. 1925.

Questa nuova storia delle matematiche si differenzia da quelle di cui è ormai ricca la letteratura scientifica per varie caratteristiche che giova far presenti al lettore.

E' anzitutto evidente che essa è frutto di reiterato insegnamento orale. Ciò risulta dagli aiuti offerti al lettore i quali si giudicherebbero superflui ove si trattasse di persone già mature e provette; tali aiuti consistono (a tacere dell'elenco bibliografico che riuscirà di somma utilità a chiunque voglia proseguire negli studi sull'evoluzione storica delle scienze esatte) nelle dichiarazioni relative al modo di scrivere e di pronunciare i nomi propri di personaggi appartenenti a differenti stirpi, nella carta geografica indicatrice delle località in cui nacquero i più eminenti matematici dell'antichità, o ove ebbero sede le più celebri scuole filosofiche (ed allora filosofia era sinonimo di scienza), finalmente negli elenchi di argomenti per studi individuali, che trovasi alla fine di ogni Capitolo, nei quali si rispecchia la costante abitudine anglosassone di chiudere ogni sezione di un manuale scolastico con una serie di esercizi.

L'altra particolarità dell'opera in esame consiste nelle numerose e bellissime illustrazioni; ora se i ritratti ed i fac-similes di scritti moderni saranno da qualcuno equiparati ad oggetti di pura curiosità, la riproduzione di antichi manoscritti o di pagine d'incunaboli e libri rari e più ancora d'iscrizioni e di antichi strumenti insegnano a chi non ebbe fra mano siffatti documenti quanto la semplice parola, per quanto abilmente adoperata, non è in grado

Digitized by Google

di apprendere. Il prof. Smith ha la fortuna di avere sotto mano una collezione di siffatti cimeli di cui New York, quale forse nessuna città europea è in grado di offrire, e di potere giovarsi di biblioteche quali poche città possiedono: ma di questa fortuna egli si è mostrato degnissimo, facendone partecipare chi legge la sua opera.

Una terza caratteristica dell'opera in esame trae la propria origine nella enorme difficoltà del problema di ordinare una storia universale delle matematiche, la quale diventa sempre più tormentosa quanto più ci si approssima all'epoca moderna, durante la quale sul vecchio tronco sorsero nuovi e nuovi rami, mentre gli antichi si sviluppavano in modo superiore ad ogni aspettazione; ora siccome il tener dietro oggi a tutte le teorie matematiche avrebbe necessitato un lavoro a cui non sono sufficienti le forze d'un solo uomo, così l'autore scelse un procedimento che offre indiscutibili vantaggi, quello cioè di esporre prima in termini generali l'evoluzione storica della matematica, per poi narrare quanto concerne certi speciali soggetti; siffatta netta separazione di queste due parti esige che noi esaminiamo separatamente i due volumi che ci stanno sott'occhio.

Dei dieci Capitoli che costituiscono il I ognuno tratta un determinato periodo; infatti il I concerne la preistoria della matematica, il II gli anni precedenti il 1000 a. C., il III gli anni 1000-300 a. C., il IV il periodo 300 a. C. fino a 500 dell'E. v., i tre seguenti i periodi 500-1500 (prima l'Occidente e poi l'Oriente); al XVI Secolo è dedicato il Cap. VIII, al XVII il IX, ai due seguenti il X. Se si prescinde dai Cap. III e IV, che concernono esclusivamente la scienza greca, la materia svolta negli altri Capitoli è ripartita in paragrafi, ognuno dei quali tratta di un popolo speciale. Di tutti i Capitoli quello che ci sembra meno riuscito è l'ultimo; affrettiamoci a riconoscere che le difficoltà per scriverlo erano enormi, a cagione dello sviluppo che ebbe la matematica in questi due ultimi secoli e dalla mancanza di storie speciali delle varie discipline: ma se l'autore si fosse limitato a parlare dei corifei del movimento matematico e soltanto delle principali branche delle matematiche, sarebbe meglio riuscito a dare un'idea dello sviluppo della matematica nel secolo di Lagrange e nel successivo; avendo egli sempre in vista una scolaresca, poteva escludere le parti sublimi della matematica, assumendo come confine alle sue considerazioni il calcolo infinitesimale: l'esposizione sarebbe così riuscita meno farragginosa e più perspicua.

Nella scelta degli speciali soggetti trattati nel II Vol., come è ben naturale, si rispecchiano le preferenze dell'autore. I più importanti agli occhi nostri sono i primi quattro Capitoli i quali appartengono tutti all'aritmetica; crediamo anzi che non esista alcun'altra opera che faccia conoscere con pari larghezza i vari sistemi di numerazione e gli artifici (dottrinali e meccanici) per effettuare le operazioni aritmetiche giungendo sino a far note le moderne generalizzazioni del concetto di numero. Meno completa è l'esposizione della geometria fatta nel Cap. V, in cui ad es. può lamentarsi di non trovare rilevato lo strano fatto che bisogna

Digitized by Google

giungere sino a Legendre, prima di trovare il concetto di minima distanza fra due rette sghembe; va notato che l'autore risale al concetto primitivo della geometria parlando ivi anche del problema della misura della terra. Nel Cap. seguente si riabbandona la geometria per toccare un po' rapidamente i vari soggetti costituenti oggi l'algebra. Nel Cap. VIII sotto il titolo « problemi elementari » si trovano questioni tratte da opere destinate alle ricreazioni matematiche, oltre a buon numero di problemi commerciali i quali offrono l'occasione all'autore di porgere informazioni curiose su certi usi degli antichi commercianti. Si ritorna poi nel campo teorico, giacchè il Cap. VIII è tutto consacrato alla trigonometria mentre il successivo, meglio che alla matematica vera e propria, concerne la metereologia. Chiude l'opera un Capitolo dedicato al calcolo infinitesimale. La bibliografia è ricchissima e tutta l'opera è scritta con la cura più scrupolosa; ma data l'ampiezza del campo percorso qualche piccola inesattezza era inevitabile; ci sia lecito riferirne alcune che rilevammo nel II volume affinchè l'autore, se crede, ne tenga conto in prossime edizioni, che certamente non mancheranno alla sua eruditissima [1] e coscienziosa opera.

P. 323. È ivi riferita la distinzione fatta da Descartes delle curve piane in geometriche e meccaniche; ma non sappiamo donde l'autore abbia tratto il criterio per distinguere le une dalle altre che egli esprime come segue: « noi possiamo definire le prime come quelle curve in cui dy/dx è una funzione algebrica e le seconde come quelle in cui essa è una funzione trascendente »; l'esempio della curva elastica addotto poco dopo (p. 328) basta a manifestare l'inammissibilità di tale definizione.

P. 329. La spirale d'Archimede è, al solito, definita mediante l'equazione polare $r = a\theta$; ma a questa è poi aggiunta come equivalente l'equazione $\tan\theta = \varphi$, di cui ci sfugge il significato.

P. 372. Dopo le esaurienti ricerche di I. Del Lungo non è più il caso di attribuire l'invenzione degli occhiali a Savino degli Armati.

P. 450. É ivi esposto un calcolo che ci sembra superfluo per mostrare che se nell'equazione

$$x^2 + px + q = 0$$

si pone $x = u + z$, si ottiene l'equazione

$$-p(u+z) - (u+z)^2 - q = 0.$$

P. 467. Il Woepcke è un orientalista *tedesco*, che visse lungamente a Parigi.

P. 530. Parlando di probabilità ci sembra sarebbe stato giustizia far cenno del metodo dei minimi quadrati una delle scoperte contese fra Legendre e Gauss.

---

[1] Che questo epiteto è ben meritato è provato da nomi quali Ciacchi (p. 216), Casati (p. 216), G. B. di S. Francesco (p. 223), Lecchi (p. 415), ecc. che anche a noi italiani suggeriscono la domanda di Don Abbondio: Carneade, chi è costui?

Digitized by Google

P. 626. L'autore dice che la formula

$$\operatorname{sen}(u+1)\varphi = \operatorname{sen} u\varphi + \operatorname{sen} u\varphi - \operatorname{sen}(u-1)\varphi - \frac{\operatorname{sen} u\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}$$

è giusta tranne che nell'ultimo termine; ci sembra che egli non sia nel vero dal momento che si ha

$$\operatorname{sen}(u+1)\varphi = 2\operatorname{sen} u\varphi \cos\varphi - \operatorname{sen}(u-1)\varphi.$$

P. 303 e p. 677. Parlando del *metodo di esaustione* sarebbe, in un'opera storica, necessario avvertire che il nome di questo procedimento è moderno, essendo stato proposto da G. di S. Vincenzo. Ma « de hoc satis! ».

Notiamo finendo che l'opera si chiude con una tavola delle principali date della storia della matematica, che va dall'età della pietra (50 mila anni a. C.!) al 1850.

G. L.

Marcel Grossmann - *Darstellende Geometrie für Maschineningenieure;* Springer, Berlin, 1927; pp. VIII + 236 con 260 figure.

Questo trattato, che raccomandiamo specialmente a chi s'interessa di applicazioni della Geometria Descrittiva, corrisponde alle lezioni di Geometria Descrittiva che il Grossmann ha tenuto al Politecnico di Zurigo dal 1907 in poi; esso si scosta sensibilmente dai trattati classici di questa materia, e tanto più dai trattati italiani. É un libro eminentemente pratico: non vi si cerchi l'esposizione in prevalenza teorica che di questa materia si suol fare nelle nostre scuole superiori, in omaggio ad una concezione della scienza che, anche nelle scuole per ingegneri, conduce a valorizzarne prima di tutto il contenuto ideale, al disopra delle varie possibili applicazioni; all'opposto, l'A. intende che il suo scolaro, allievo ingegnere industriale, veda sempre l'utilità pratica di quanto gli si insegna, ed in modo da riceverne incitamenti a continuare per conto proprio nella via che la scuola gli ha aperto. In complesso, e nei particolari, il libro del Grossmann è assai originale. La teoria vi è ridotta allo stretto indispensabile, ed è continuamente alternata e fusa con le applicazioni tecniche; si nota, d'altra parte, uno studio costante di presentare le costruzioni più rapide e semplici e praticamente comode. I metodi di rappresentazione esposti sono due: prima quello delle proiezioni quotate, e poi quello di Monge, secondo una via già segnata da

Digitized by Google

altri trattatisti tedeschi; la prospettiva è ridotta alla sola assonometria, la quale ha uno sviluppo notevole, per i vantaggi che essa presenta nella rappresentazione di organi isolati di macchine. Le poche nozioni generali, che occorrono, sulle linee, piane e sghembe, e sulle superficie sono stabilite per via sintetica. L'esposizione è sempre piana ed elementare, però senza cadere nell'empirismo; nella descrizione materiale delle costruzioni essa è di solito assai concisa, e lascia molto al lettore, obbligandolo a ripensare sulle figure le costruzioni eseguite. Le figure sono sempre accurate e chiare.

La disposizione della materia apparirà meglio dai titoli dei vari capitoli, che qui riportiamo: *Proiezione ortogonale*, cioè metodo dei piani quotati; *Proiezioni ortogonali associate*, cioè metodo di Monge; *Nuove proiezioni*, ossia introduzione nelle costruzioni di nuovi quadri, in varie posizioni; *Proiezione assonometrica; Curve e superficie; Cilindro e cono circolari; Superficie grafiche*, ad es. lo scafo d'una nave; *Superficie topografiche*, con applicazione ai movimenti di terra; *Coni*, in generale; *Superficie di rotazione; Iperboloide rotondo*, con applicazione alla trasmissione di moti rotatori fra assi sghembi; *Rigate di 2° grado; Rigate sghembe in generale; Propulsori* (di aeroplani, di navi); *Elica circolare; Elicoidi rigati*; *Elicoidi non rigati; Eccentrici a cuore.*

EUGENIO G. TOGLIATTI

FRANCESCO SEVERI - *Elementi di geometria.* Vol. I *per le scuole medie inferiori*, pag. I-VIII, 1-154; Vol. II *per le scuole medie superiori*, pag. I-XV, 1-211. **Edizione ridotta** - Vallecchi editore, Firenze, 1928.

Questo libro è il secondo che il prof. Severi ha scritto per la collana, da lui stesso diretta, di testi di matematica per le scuole medie italiane, edita per i tipi Vallecchi.

L'indicazione di *ridotta* che l'Autore ha voluto dare a questa nuova edizione dei suoi « *Elementi di geometria* » (scritti in un primo tempo pel Ginnasio, pel Liceo e per l'Istituto Tecnico, e dei quali ho già dato notizia in questo Bollettino (*)) non deve trarre in

(*) Annata XXIII, (1927), fasc. I e IV.

Digitized by Google

inganno; e, cioè, non devesi credere che l'autore, per soddisfare ai bisogni delle scuole nelle quali i programmi non richiedono uno sviluppo completo della geometria razionale, abbia tagliato e sfrondato di qua e di là i primi e più vasti « *Elementi* » per poi ricucirli alla meglio ed ammannirli sotto forma più modesta. Al contrario, il Severi ha fatto opera veramente nuova in quanto, pur rimanendo fedele ai concetti, prettamente originali, ai quali si era ispirato nel costruire la prima edizione, in questa seconda egli ha rielaborato la materia in modo che ad una minor mole corrisponda una maggiore semplicità di trattazione.

Nessuno degli argomenti che costituiscono quella parte della scienza geometrica che ordinariamente è chiamata elementare vien trascurato o diminuito d'importanza; e neppure vien fatto di sostituire troppo largamente l'intuizione là dove nella trattazione completa pare che la mente dello scolaro debba essere aiutata da una maggiore preparazione.

Nel volume primo i capitoli riguardanti le nozioni generali, le rette perpendicolari, i poligoni, i parallelogrammi, il cerchio, i poligoni regolari, l'equivalenza delle superficie piane poco si differenziano, salvo qualche spostamento nell'ordine, dai capitoli corrispondenti della prima edizione. Vi sono opportunamente soppresse molte dimostrazioni là dove non ripugna ricorrere, e vi si è ricorso nell'origine storica della scienza, all'immediata intuizione.

Notevole una più larga estensione del concetto di superficie piana, che nel passato si usava sempre appunto sotto la forma più generale, come cosa direttamente attinente all'intuizione. Quì il concetto è precisato sul fondamento di quello di figura convessa. Notevole altresì l'introduzione della nozione di figura finita, che pur risponde ad una primordiale intuizione. Eleganti le dimostrazioni che triangoli, figure poligonali, cerchi sono figure finite.

La teoria dell'uguaglianza è semplificata di molto, assumendosi come concetto primitivo quello di *movimento* anzichè quello di segmenti uguali. Due figure vengono allora ad essere uguali qnando si corrispondono in un movimento. Questa semplificazione non diminuisce alcuno dei pregi della costruzione logica della teoria Euclidea dell'uguaglianza qual'è stata intrapresa dall'autore nella prima edizione.

La trattazione delle parallele precede quella dei triangoli e dei poligoni, al fine di permettere di enunciare il teorema dell'angolo esterno come corollario di altri semplici teoremi. Lo spostamento della teoria delle parallele è accompagnato da un « alleggerimento didattico » consistente nell'assumere a postulato

Digitized by Google

il fatto che una perpendicolare ed un'obliqua ad una retta s'incontrano (caso particolare di quello Euclideo), anzichè l'altro (assunto a postulato nell'edizione completa) che il luogo dei punti equidistanti da una retta, da una parte di questa, è una retta. Quest'ultimo è preferibile da un punto di vista elevato, anche perchè è direttamente controllabile coll'esperienza, ma il primo consente maggiore brevità di esposizione, appunto perchè esige di più. Comunque sia, l'autore non abbandona la bella ed opportuna definizione di rette parallele come rette equidistanti. Le dimostrazioni che ne risultano sono di una sobrietà, di un'eleganza, di una semplicità inconsuete e restano bandite certe dimostrazioni per assurdo illustrate da figure altrettanto assurde, ripugnanti allo spirito degli scolari.

Ma dove s'incontrano maggiori novità di trattazione rispetto all'edizione completa si è nel volume secondo. Questo s'inizia subito con la considerazione delle classi delle frazioni approssimate per difetto e per eccesso del rapporto di due segmenti; classi perfettamente determinate dai segmenti stessi. Questa considerazione fa sboccare immediatamente nel concetto di sezione del campo dei numeri razionali e, quindi, in quello di numero reale. Così l'autore, eliminando i concetti di classi contigue di grandezze e di estremi superiore ed inferiore di una classe, introduce senza sforzo, in modo esatto, e seguendo sempre l'origine storica, il concetto di numero reale come espressione del rapporto di due grandezze.

Quest'edizione degli « *Elementi* » è scritta essenzialmente per gli alunni degli istituti magistrali; a tali alunni deve naturalmente interessare di più la sistemazione logica di quelle teorie che riflettono la materia geometrica delle scuole elementari; tra l'altre di quella della misura pratica delle linee, delle superficie e dei solidi. Il Severi, quindi, appena introdotto il concetto di numero reale come rapporto di segmenti, ne considera le approssimazioni decimali, per poi passare, dopo un cenno sulle operazioni e sulle grandezze continue in generale, alla misura delle grandezze fissando la proposizione: « il rapporto di due grandezze omogenee è uguale al quoziente delle loro misure, rispetto ad un'unità prefissata ».

Le difficoltà cui generalmente dà luogo l'introduzione del postulato della continuità vengono facilmente diminuite mostrando dapprima che esistono sempre due segmenti il cui rapporto è $\sqrt{2}$ (negli esercizi si prova addirittura che esistono due segmenti il cui rapporto è $\sqrt{q}$, ove q è un numero razionale qualunque), ed

Digitized by Google

assumendo di poi come postulato che « dato un numero reale α qualunque e scelta ad arbitrio una grandezza B, di una specie di grandezze continue, esiste sempre nella stessa specie una grandezza A tale che il rapporto $A : B$ assume il valore prefissato α. Ogni altra grandezza A' della stessa specie, per la quale sia $A' : B = \alpha$, è uguale ad A ».

Quest'ordinamento della materia permette di ricondurre la teoria delle proporzioni tra grandezze (definite, come nell'edizione completa, quali uguaglianze tra rapporti; definizione che collega la proporzione geometrica alla nozione comune di *senso di proporzione*) a quella delle proporzioni numeriche.

Le figure simili sono definite come quelle che presentano un rapporto costante fra le distanze corrispondenti. Anche qui le giuste ragioni della didattica trovano il loro riconoscimento; tale scelta di trattazione della teoria della similitudine è molto opportuna per chi, come il maestro elementare, è chiamato ad insegnare ai fanciulli i principii del disegno intuitivo e professionale.

Gli argomenti successivi e cioè lunghezza della circonferenza ed estensione del cerchio, applicazioni dell'algebra alla geometria, nozioni fondamentali di geometria solida, equivalenza dei solidi, aree e volumi dei solidi rotondi, similitudine nello spazio non presentano di massima, in quanto all'ordinamento dei concetti, sostanziali differenze dagli argomenti analoghi, quali sono trattati nell'edizione completa. Sono però da segnalarsi maggiori ricorsi all'intuizione, con conseguenti notevoli semplificazioni di alcune trattazioni che, altrimenti, esigerebbero scolaresche molto preparate. Ma questi ricorsi all'intuizione non sono mai vaghi od imprecisi. Si sa sempre con precisione quello che all'intuizione si chiede, e lo scolaro viene ad averne precisa coscienza. Ed ogni ricorso all'intuizione è, come sempre, accompagnato da considerazioni preliminari che lo giustifichino senza sforzo. Ad es si postula che « un prisma regolare di n facce laterali, circoscritto ad un cilindro, da un certo n in poi, differisce dal cilindro meno di un solido, comunque piccolo, prefissato; e la sua superficie laterale differisce da quella del cilindro meno di una superficie, comunque piccola, prefissata ». E postulati analoghi si danno nelle trattazioni sui solidi e sulle superficie del cono e della sfera. Nel caso della sfera il postulato è sapientemente scelto in modo che, pur aderendo strettamente all'intuizione, evita ogni erroneo concetto che l'alunno potrebbe, per analogia col cilindro e cono, farsi della sfera come limite di un poliedro inscritto (cosa

Digitized by Google

delicatissima, come si sa, e per cui occorrono le opportune precisazioni!). Il postulato rispecchia il fatto intuitivo che da un poliedro circoscritto ad una sfera se ne può ricavare un altro, pure circoscritto e più vicino alla sfera, segando via una parte del primo; e così continuando.

Altre semplificazioni, invece, presentano un vero carattere di novità anche rispetto alla trattazione più completa svolta nella prima edizione, e devono essere rilevate perchè portano un notevole contributo a quel rielaboramento delle teorie geometriche elementari che è stato intrapreso dal Severi.

Il teorema che le superficie dei poligoni simili stanno tra loro come i quadrati dei lati omologhi viene ridotto a corollario del teorema: « in una similitudine tra piani il rapporto di due poligoni corrispondenti è costante »; e la dimostrazione di questa proposizione si limita a mostrare in pocheparole che poligoni omologhi in una similitudine tra piani formano due insieme di grandezze proporzionali.

A base della teoria della lunghezza della circonferenza vien posto il seguente teorema di immediata dimostrazione: « scelto un segmento ε, comunque piccolo, dà un certo valore di n in poi, un poligono regolare di n lati inscritto o circoscritto ad una data circonferenza, ha i lati minori di ε ». E così analogamente, per la teoria dell'estensione del cerchio. La proposizione che « la circonferenza è il limite dei perimetri dei poligoni regolari, inscritti e circoscritti, quando cresce indefinitamente il numero dei lati », e l'analoga pel cerchio acquistano allora un'essenza quasi immediata.

Nella geometria solida i capitoli relativi alle rette e piani perpendicolari, rette e piani paralleli possono venir riuniti in uno solo, mediante la felicissima e facilissima introduzione del lemma: « se tre piani s'incontrano a due a due lungo tre rette distinte, o essi hanno un sol punto in comune nel quale concorrono quelle rette, ovvero quelle rette medesime sono a due a due parallele ». La considerazione di tale lemma permette di eliminare il teorema cosidetto delle tre perpendicolari, e di trattare in blocco e brevemente tutte le questioni concernenti relazioni di perpendicolarità e di parallelismo.

Questa edizione ridotta degli « *Elementi* » sarebbe, nell'intenzione dell'autore, destinata agli istituti magistrali; ma essa, come ho già osservato innanzi, pur presentando una trattazione ridotta, è impercettibile dal lato del rigore logico e non trascura alcun argomento della geometria elementare. Essa, quindi, può essere

Digitized by Google

adottata in qualunque scuola. Purtroppo non è affatto raro il caso che esigenze didattiche (ad es. il forte numero degli allievi che compongono una classe; la necessità di occupare molto tempo ad amalgamare in una classe alunni provenienti da istituti diversi) impongono ad un insegnante di non trattare la materia con quello sviluppo che gli sarebbe caro. Il Severi ha aiutato gli insegnanti a superare tale difficoltà fornendo, col suo nuovo libro, in modo equilibrato, quanto è necessario ad uno svolgimento conciso della geometria razionale.

I due volumi dell'edizione completa degli « *Elementi* » si chiudevano con due appendici nelle quali l'autore esaminava e giudicava i risultati della critica moderna, determinandone il valore che devono avere nel primo apprendimento della scienza. Nell'edizione presente l'autore premette al secondo volume una prefazione che sono tentato di indicare « *Le confessioni di un autore di geometria* ». Nelle dieci pagine di questa prefazione il lettore è messo al corrente del travaglio mentale che ha pervaso la costruzione delle due opere.

Il Severi è tra quelli che nella prima gioventù sono stati a contatto diretto (nella scuola e nello studio) coi critici dei fondamenti della matematica; ha vissuto i primi anni della vita di studioso nel periodo in cui erano nelle mani di tutti gli scritti di Pasch, Peano, Veronese, Cantor, Hilbert, Dedekind, e nel quale si stavano ponendo per opera di Peano e di Russel i fondamenti della logica matematica. In quel periodo sembrava che tutto quanto in fatto di fondamenti era stato scritto in antecedenza dovesse essere visto con diffidenza, se non addirittura buttato a mare. In quel tempo Poincarè nei suoi memorabili scritti filosofici doveva sostenere una lotta vivace per far riconoscere all'intuizione il diritto di entrare a testa alta nella costruzione dell'edificio matematico.

Orbene il Severi tanto nell'edizione completa, quanto in quella ridotta dei suoi « *Elementi* » ha voluto e saputo fare opera che non s'appoggiasse sull'uno piuttosto che sull'altro indirizzo critico.

Coraggiosamente è tornato alle fonti più pure dell'antichità e del principio del secolo XIX, le ha passate al vaglio della critica moderna, evitando di prendere in considerazione quei rigorismi che, per il loro eccesso, finiscono di rimanere sterili; ed ha costruito opera veramente nuova; opera per la quale gli insegnanti dell'attuale scuola italiana gli devono essere grati.

GIACINTO GUARESCHI

Digitized by Google

NOTIZIE

Addenda et corrigenda. Verso il termine del suo articolo ristampato nel precedente fascicolo del *Bollettino di Matematica*, il prof. Scorza ha segnalati i contributi dati da geometri italiani all' « Encyklopedie per mathematischen Wissenschaften » e i premi da essi di recente ottenuti all'estero. Ispirandoci allo stesso patriottico intento che animò l'autore, reputiamo conveniente completare, come segue, i dati da lui forniti:

Articoli dell'E. d. m. W.:

F. Enriques, Principii della geometria.

G. Fano, Geometria sintetica e analitica nella loro opposizione e nel loro sviluppo storico, Gruppi continui in geometria.

L. Berzolari, Teoria generale delle curve piane algebriche.

G. Rohn e G. Loria, Curve piane algebriche particolari.

G. Castelnuovo, Proprietà fondamentali delle superficie algebriche.

G. Castelnuovo e F. Enriques, Le superficie algebriche dal punto di vista delle trasformazioni birazionali.

G. Rohn e L. Berzolari, Curve gobbe e superficie sviluppabili algebriche.

C. Segre, Geometria a più dimensioni.

Nè va dimenticato che l'esposizione della Geometria numerativa in base all'articolo dello Zeuthen fu fatta nell'edizione francese di detta Enciclopedia dal compianto M. Pieri.

Premi:

R. Accademia delle Scienze di Madrid. Concorso dell'anno 1897 sul tema « Curve speciali algebriche e trascendenti »: I Premio al prof. G. Loria.

Istituto di Francia. Premio Binoux (storia e filosofia delle scienze). Anno 1907. Parzialmente conferito al prof. G. Loria. Annno 1911. Parzialmente conferito al prof. A. Favaro. Anno 1922. Conferito per intero al prof. G. Loria.

Ed aggiungasi anche un altro nome, omesso dal prof. Scorza nel citato suo articolo, quello del prof. Edgardo Ciani dell'Ateneo fiorentino, nome che è caro a tutti i cultori degli studi geometrici.

NECROLOGIO

I. L. HEIBERG. L'illustre filologo spentosi il 4 Gennaio 1928 a Kopehagen ove era nato il 27 Novembre 1854, ha diritto ad un cenno di riconoscenza in queste colonne per avere posto a disposizione dei matematici ottime edizioni dei principali geometri dell'antica Grecia. Laureatosi nel patrio Ateneo nel 1879, fu direttore di un Ginnasio nel periodo 1884-1895 e a partire dal 1896 insegnò filologia classica nell'Università di Kopehagen. La sua dissertazione di laurea si riferisce ad Archimede, delle cui opere egli diede un'edizione critica (stampata due volte) e del quale scoperse a

Digitized by Google

Costantinopoli un importante frammento. Si volse poi a Euclide, Apollonio, Sereno, Tolomeo e finalmente completò l'edizione di Erone rimasta tronca in seguito alla morte di G. Schmidt. Alla vigilia della morte pubblicò la *Sferica* di Teodosio e una importante memoria su alcuni matematici greci minori. Innumerevoli sono le note e le memorie ispirategli dallo studio degli scienziati greci; di lui si hanno poi esposizioni popolari della scienza ellèna. Questi sono i contributi da lui dati alla scienza che qui ci interessa; ma non gli unici frutti della sua ammirabile attività: basti infatti ricordare la sua edizione di Simplicio e la parte che egli ebbe nella preparazione del *Corpus medicorum Graecorum.*

G. BOUSSINESQ. Nacque a Saint-André-de-Sangonis (Nérault) il 14 Marzo 1842. Fece gli studi classici al Seminario di Montpellier e da solo si procurò le nozioni indispensabili per seguire i corsi di analisi e meccanica in quella Università. Ottenuta a 19 anni la licenza in matematica, insegnò successivamente a Adge, Vigan e Gap. Conseguita la laurea in matematica dalla Sorbona, fu destinato alla Facoltà di Scienze di Lilla, donde nel 1886 passò a Parigi; nello stesso anno entrò nella Sezione di meccanica dell'Istituto di Francia. Dal 1918 era a riposo; morì a Parigi in principio di Aprile del corrente anno.

Numerose e importanti sono le sue pubblicazioni sopra vari argomenti di fisica matematica (capillarità, idraulica, teoria meccanica del calore, ecc.); fra i filosofi il Boussinesq era noto per la spiegazione da lui data del libero arbitrio in base all'esistenza di soluzioni singolari delle equazioni differenziali.

GIORGIO GREEHNILL. Nacque il 20 Novembre 1847. Studiò nel St. John College di Cambridge, del quale divenne Follow. Passò la maggior parte della sua vita in qualità di professore di matematica nella Scuola d'artiglieria di Woolwich; nel momento del suo collocamento a riposo (1908) gli fu conferito il grado di Sir. Nel 1888 fu eletto F. R. S. e dalla stessa Società Reale ottenne una delle sue periodiche medaglie; altra medaglia (quella che porta il nome di Morgan) gli fu conferita nel 1902 dalla Società Matematica di Londra. Fu membro corrispondente dell'Accademia delle Scienze di Parigi e membro straniero di quella dei Lincei. Morì il 10 Febbraio 1927. Oltre un grande numero di note e memorie egli scrisse alcuni volumi di cui giova qui ricordare i titoli: *Differential and integral calculus with applications* (1885); *Applications of the elliptic functions* (1892; tradotto in francese); *Hydrostatics* (1894); *Notes on dynamics* (1908); *The dynamics of mechanical flight* (1912); *Gyroscopic theory* (1914). Molti interessanti particolari biografici che lo concernono si traggono da un articolo inserito nel N. 200 della « Mathematical Gazette » (Aprile 1929).

Finito di stampare il 18 settembre 1929 (VII)

ALBERTO CONTI, Direttore responsabile

Tip. Paolo Cuppini - Castiglione 68° - Bologna - Telef. 14-07

Digitized by Google

Sezione storico-bibliografica

PUBBLICATA PER CURA

DI

GINO LORIA

SOMMARIO del Fasc. 4°: Recensioni. U. Cassina. Calcolo numerico, con numerosi esempi e note storiche originali. (*G. L.*) L. Poletti. La serie dei numeri primi entro i primi 100000 numeri oltre 100 milioni e la serie dei numeri primi fra 14285717-14299991. (*N. G. W. H. Beeger*) — C. Burali-Forti e R. Marcolongo. Trasformazioni lineari. (*B. Finzi*) — H. Lebesgue. Leçons sur l'intègration et la recherche des fonctions primitives professées au Collège de France. (*G. L.*) — F. Giudice. Matematica complementare. (*Vitale Zani*) — H. Liebmann. Nichtenklidische Geometrie. (*G. L.*) — R. Mehmke. Leit faden zun graphischechen Rechnen. (*G. L.*) — José A. Sanchez Perez. Las matemàticas en la Biblioteca del Escorial. Memoria premiada. (*G. L.*) — C. Burali-Forti e R. Marcolongo. Elementi di trigonometria, ad uso degli istituti medi superiori e industriali. (*A. Natucci*). Dionisio Gambioli. Breve Sommario della Storia delle Matematiche. (*A. Natucci*) — Per la storia e la filosofia delle matematiche. Collezione diretta da Federico Enriques. - N. 5 Riccardo Dedekind. Essenza e significato dei numeri. Continuità e numeri irrazionali. (*A. Natucci*) — **Notizie.** Un nuovo documento sull'aritmetica degli Egiziani. - Concorso a premi. — **Necrologio.** A. V. Bäcklund.

RECENSIONI

U. Cassina - *Calcolo numerico, con numerosi esempi e note storiche originali.* 8°, p. XVII-451 (Prezzo L. 80). Bologna, Casa Editrice Zanichelli.

L'aritmetica pratica non fu trascurata dagli antichi, che anzi le imposero il nome speciale di *logistica*; ma nessuna esposizione metodica ce ne hanno tramandata, dimodochè per rendersi conto come essi eseguivano calcoli numerici non vi è che spiare le procedure usate dagli astronomi greci. Questo disprezzo per una branca la cui utilità pratica non può essere revocata in dubbio non si ritrova più fra gli scrittori del Rinascimento e tutti coloro che ebbero tra mano la *Summa* di Luca Pacioli ben sanno che il celebre monaco si è dilungato a esporre parecchi espedienti da usarsi per eseguire con sicurezza e rapidità le quattro operazioni dell'aritmetica. Ma si trattava sempre di abbreviazioni di poco conto, la cui insufficienza riuscì palese nel corso dei calcoli di corde degli archi di un cerchio, attorno a cui tanto tempo e tanta fatica spesero gli astronomi del Sec. XVI. Un vero e grande progresso nell'aritmetica pratica si ebbe con l'invenzione dei logaritmi, che il Napier fece conoscere nel 1614; avendo subito atti-

Digitized by Google

rata l'attenzione dei competenti, non tardò a ricevere perfezionamenti di notevole valore. I problemi offerti dal calcolo numerico aumentarono di numero e d'importanza quando si dovette estenderne la portata alle equazioni numeriche e al calcolo dei valori delle funzioni più elevate delle trigonometriche; e i nuovi problemi apparvero così interessanti che non sdegnarono di occuparsene molti insigni analisti: così si costituì un corpo di dottrina degno dell'attenzione dei teorici quanto dei pratici. Nessuna meraviglia pertanto se la letteratura matematica si arricchì di molte pregevoli esposizioni di esso; fra esse prende un posto cospicuo quella che annunciamo, la quale si differenzia dalle precedenti per due motivi principali, e cioè: perchè in essa si trovano esposti, svolti e applicati i metodi ideati dal prof. Peano e perchè l'autore, arrestandosi sopra esempi bene scelti e di grande interesse e con opportune notizie storiche ha saputo rendere attraente una materia che riesce generalmente arida. Un'analisi del bel volume non essendoci consentita dallo spazio di cui disponiamo, ci è forza limitarci a dare un quadro schematico delle materie svolte:

Cap. I. *Numerazione.* Cap. II. *Operazioni sui numeri interi* (Addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, prove delle operazioni, uso di tavole numeriche, elevamento a potenza ed estrazione di radice). Cap. III. *Operazioni sui numeri approssimati* (Intervalli continui e numeri approssimati, rappresentazione decimale dei numeri reali, moltiplicazione graduale, divisione graduale, radice quadrata graduale, complementi sulle operazioni graduali, esercizi vari, calcolo elementare dei logaritmi decimali, calcolo numerico e scienze sperimentali, problemi sul calendario). Cap. IV. *Prodotti decimali* (Proprietà generali ed esempi, uso dei prodotti decimali nel calcolo dei loganitmi e per quello delle radici). Cap. V. *Uso delle serie* (Estrazione di radici d'indice qualunque; calcolo di esponenziali, calcolo di logaritmi, notizia storica sui logaritmi, calcolo di seni, coseni e π). Cap. VI. *Risoluzione delle equazioni numeriche* (Risoluzione graduale delle equazioni numeriche, applicazioni varie, risoluzione delle equazioni numeriche con il metodo delle corde e delle tangenti, risoluzione di alcuni problemi trascendenti, esercizi vari).

Emerge da quanto precede che ormai l'Italia, anche riguardo al calcolo numerico, si è emancipata dalla necessità di ricorrere ad opere straniere; anche per tale motivo la comparsa dell'opera del prof. Cassina va salutata con plauso.

G. L.

Digitized by Google

L. Poletti - *La serie dei numeri primi entro i primi 100000 numeri oltre 100 milioni e la serie dei numeri primi fra 14285717 - 14299991* (Rendiconti del R. Istituto Lombardo, Vol. LXI, 1928).

Le serie dei numeri primi appartenenti alle due forme quadratiche $(n^2 + n - 1)$ *e* $(n^2 + n + 1)$. (Mem. della R. Accademia dei Lincei, Ser. VI, Vol. III, 1929).

Le serie dei numeri primi appartenenti alle due forme quadratiche $(2n^2 + 2n - 1)$ *e* $(2n^2 + 2n + 1)$ *entro 250 milioni* (presentata al Congresso internazionale dei matematici di Bologna, e pubblicata nei Rendiconti del R. Istituto Lombardo, Vol. LXII, 1929) - VII.

La grande table de D. N. Lehmer publiée en 1914, sous le titre « Liste of Prime Numbers » contient tous les nombres premiers, plus petits que dix milions.

L. Euler et surtout C. F. Gauss ont donné des méthodes pour décomposer des grands nombres en leurs facteurs premiers, ou, ce qui revient au même, pour reconnaitre si un grand nombre est premier.

Ces méthodes sont améliorées par Lawrence (Quart. Journ. Vol. 38, pag. 285) en 1896 et puis par M. Kraitchik en 1925 (Théorie des nombres I et II, et Recherches sur la théorie des nombres. Gauthier-Villars, Paris). Plusieurs mathématiciens, Euler, W. Looff, F. Landry, E. Lucas, P. Seelhoff, Pepin, Powers, P. Poulet, Kraitchik, D. N. et D. H. Lehmer, Cunningham et d'autres ont decomposé des grands nombres ou reconnu des nombres premiers. D'autres, Cunningham, E. Lebon, M. Kraitchik, Morehead, W. B. Davis, L. Poletti ont calculé des listes de nombres premiers entre certains limites ou de certaines formes. Par suite de tous ces travaux on connait aujourd'hui plusieurs milliers de nombres *plus grands que dix milions.*

La table la plus extensive est celle de J. Ph. Kulik qui s'etend a cent millions, mais qui n'existe qu'en manuscrit dans la bibliotheque de Vienne, depuis 1867. Malheureusement D. N. Lehmer a constaté en 1913 qu'un des huit volumes a disparu! Du reste la table contient beaucoup de fautes (plus de 200 dans la partie au dessous de dix millions selon Lehmer) de sorte qu'elle ne peut pas être considerée comme definitive.

Digitized by Google

Les tables de CUNNINGHAM, qu' il a calculé depuis trente ans, sont publiées en dix volumes chez Fr. Hodgson, London.

E. LEBON a commencé une table pour la décomposition de tous les nombres plus petits que cent millions, mais il ne l' a pas fini á cause de son décès en 1922. La première partie est paru chez Gauthier-Villars à Paris.

En Italie, c' est M. L. POLETTI qui a entrepris depuis plusieurs années de grands recherches sur le calcul des tables de nombres premiers. En 1920 il publia un volume sous le titre « Tavole di numeri primi » qui contient plusieurs tables de tous les nombres premiers entre certaines limites: p. e. entre un milliard et un milliard cent mille, (Manuali Hoepli, Milano). D' autres grandes tables, calcululées par lui, ont paru dans les « Rendiconti del R. Istituto Lombardo » en 1928 et 1929 et dans les « Atti della R. Accademia Nazionale dei Lincei ».

Plus tôt il avait publié des listes pour la construction des tables de dècomposition des nombres intitulées « Tavola Italiana per la scomposizione in divisori primi » (C. Cavanna, Pontremoli).

Il est le premier qui a etudiè et calculé les nombres premiers représentés par des formes quadratiques et en a tiré des presumés theorèmes qu' on n' a pas encore pu démontrer.

Amsterdam

N. G. W. H. BEEGER

C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO - *Trasformazioni lineari.* Primo volume di *Analisi vettoriale generale.* Bologna, Casa editrice Zanichelli, 1929, pagg. 271 + VIII.

Appare in lingua italiana una nuova edizione interamente rifatta del primo volume dell' « Analyse vectorielle générale » (1). L'opera tratta delle trasformazioni lineari, e vuol dare i fondamenti logici, concettuali, algoritmici dei metodi che, in volumi successivi, troveranno applicazioni in geometria differenziale, in teoria dell'elasticità, in idrodinamica, in teoria dell'elettricità e del magnetismo. Canone fondamentale del volume in esame e di quelli che lo seguiranno è il seguente: « trattazione assoluta di

(1) Pavia, Mattei, 1912.

Digitized by Google

tutte le questioni fisico-meccaniche-geometriche, indipendentemente da qualsiasi sistema di coordinate » (1). La rigorosa e sistematica realizzazione di tal programma soddisfa profondamente il senso estetico dominante ogni ricerca matematica, e permette, assai spesso, una notevolissima semplicità concettuale e formale, proveniente dall'aver bandito ogni ente di riferimento estraneo. Ho detto assai spesso e non sempre, perchè la introduzione di alcuni concetti (come del resto la definizione stessa di vettore) indipendentemente da ogni sistema di riferimento, non è delle più naturali; ad esempio, non eccessivamente spontanea mi sembra la definizione di gradiente di un' omografia quale vettore dell' iperomografia derivata dell'omografia rispetto ad un punto; definizione questa che, del resto, sostituisce assai felicemente la originaria più complicata definizione (2). Credo che se gli autori avessero voluto talvolta (rare volte, in verità) abbandonare la rigida applicazione del loro canone fondamentale, non avrebbero per ciò ridotto i metodi vettoriali a semplici tachigrafi dei metodi cartesiani, e avrebbero reso forse la loro opera di più immediata comprensione. Sarebbe stato così possibile rivolgersi ad un pubblico più ampio del pubblico strettamente matematico. E ciò sarebbe stato bene, perchè è facile immaginare quali profondi benefizi recherebbe l'uso dei metodi omografici all' ingegnere e al fisico, abituati ormai a pensare e ad operare vettorialmente. Tali benefizi non si esplicherebbero soltanto nello studio delle più generali questioni di filosofia naturale, ma altresì nella effettiva risoluzione di problemi concreti. Certamente un metodo, per quanto potente esso sia, non può arrogarsi il diritto di essere sempre il più adatto. Così se in un problema entreranno direzioni o superficie privilegiate, sarà opportuno combinare i metodi vettoriali con i metodi cartesiani e talvolta anche con i metodi del calcolo differenziale assoluto. Però la generalità del metodo omografico e i brillanti risultati che già con esso si ottennero, sono sicura garanzia delle conquiste che un' ampia diffusione di esso porterà nel campo della

---

(1) Non si voglion dunque (come nel calcolo differenziale assoluto) stabilire risultati validi in un qualunque sistema di coordinate di una data metrica, ma, sia pure limitatamente alla metrica euclidea, si vuol prescindere da ogni sistema di riferimento.

(2) « Analyse vectorielle générale », Pavia, Mattei, 1912, pag. 70, formula (3).

Digitized by Google

geometria, della meccanica, della fisica classica, della fisica atomica (1), e nei domini della scienza applicata.

L'opera si inizia con un'*introduzione* logicamente assai efficace ma, forse volutamente, così arida da costituire l'ostacolo più grave per i lettori non assolutamente matematici. Dopo un'acuta sintesi dei concetti di uguaglianza, di operatore, di operazione, si studiano in particolare i sistemi e gli operatori lineari. Per essi si stabiliscono i concetti di funzione, limite, differenziale, derivata, integrale.

Il *primo capitolo* è dedicato alle omografie vettoriali, cioè alle trasformazioni lineari tra vettori dello spazio totale e vettori. In un primo paragrafo ci si occupa delle generalità sulle omografie proprie e degeneri, degli invarianti relativi, delle definizioni di coniugata, dilatazione, vettore di un'omografia. Alla fine di questo paragrafo, come del resto alla fine di ogni altro, sono posti esercizi utilissimi, contenenti spesso preziosi complementi al testo. Nel secondo paragrafo si studiano le omografie assiali, le dilatazioni, le diadi, e si riduce un'omografia generale alla somma di una dilatazione e un'omografia assiale, oppure alla somma di tre diadi. Tre paragrafi successivi sono dedicati rispettivamente all'operatore R, ai prodotti e potenze di omografie, alle isomerie e similitudini vettoriali. L'ultimo paragrafo compare per la prima volta nell'edizione italiana e tratta delle iperomografie: iperomografia è ogni operatore lineare tra vettori e omografie, o, se si vuole, tra vettori e coppie di vettori. Alle iperomografie si possono applicare, oltre agli ordinari operatori che si applicano alle omografie, anche gli speciali notevoli operatori k, k' e l'operatore v che definisce il vettore dell'iperomografia. Introdurre sistematicamente le iperomografie in un trattato su le trasformazioni lineari mi sembra idea felicissima. L'argomento si inquadra magnificamente nell'esposizione e permette di raggiungere una notevole semplicità nella trattazione di molte questioni. Ma v'ha di più: per il matematico avido di generalità è reso manifesto che, come si può svolgere la teoria dei tensori di ordine n, così si può, altrettanto agevolmente, svolgere la teoria delle omografie di ordine qualsiasi. Il primo capitolo termina con due note: una sulle omografie e iperomografie nel piano, l'altra su la traduzione cartesiana delle considerazioni svolte. Quest'ultima nota è assai opportuna. Peccato

---

(1) Cfr. l'accenno di T. Boggio: « Omografie e differenziali relativi ad uno spazio curvo », Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, vol. VII, pag. 811.

Digitized by Google

che essa sia troppo succinta e informata a fini polemici più che a fini didattici ed espositivi.

Nel *secondo capitolo* si considerano punti, vettori, omografie funzioni di punti, e si tratta dei relativi operatori differenziali. Derivata di un ente h funzione di P è « l'operatore che applicato a un qualunque differenziale δP di P produce il corrispondente differenziale δh di h ». Derivata di un punto o di un vettore è dunque un'omografia; derivata di un'omografia è un'iperomografia. L'operatore Leibnitziano $\frac{d}{dP}$ permette di esprimere in forma autonoma gli operatori differenziali di primo ordine div, rot, grad, Rot, se opportunamente associato a gli ordinari operatori I_1, V, e agli operatori k, v per le iperomografie. Per esprimere in modo naturale gli operatori differenziali di secondo ordine Δ e Δ' è opportuno ricorrere invece all'operatore $\frac{d^2}{dP^2}$, operatore che applicato ad una omografia definisce un'omografia di terzo ordine, applicato ad un vettore definisce un'iperomografia. I primi tre paragrafi del secondo capitolo sono dedicati appunto all'operatore Leibnitziano e agli operatori di primo e di secondo ordine. I due paragrafi successivi sono riserbati ai prodotti funzionali degli operatori differenziali del primo e del secondo ordine e alle funzioni. Due note sono aggiunte al capitolo: in una sono date le forme cartesiane degli operatori differenziali, nell'altra si parla degli operatori differenziali superficiali. Quest'ultima è particolarmente interessante. Se n é il vettore unitario normale in un punto P di una superficie σ, se μ è un'omografia d'ordine qualsiasi, gli autori definiscono la corrispondente omografia in superficie così: $\mu_\sigma = \mu - \mu H(n, n)$. Applicando dunque μ_σ ad un vettore si ottiene lo stesso risultato che applicando μ alla proiezione ortogonale del vettore sul piano tangente a σ in P. Osserviamo che l'omografia μ_σ — come é stata definita — è un operatore tra vettori dello spazio totale; essa non muta dunque, in generale, vettori tangenti a σ in vettori tangenti a σ. Una volta però definito μ_σ nel modo detto, si deducono logicamente le definizioni dei vari operatori differenziali superficiali.

Il *terzo capitolo* è dedicato agli integrali e alle equazioni differenziali: esso consta di tre paragrafi. Nel primo si stabiliscono formule fondamentali per la trasformazione di integrali estesi ad un campo in integrali estesi al contorno. Nel secondo, dimostrati alcuni teoremi sui differenziali, se ne fa applicazione ai campi vettoriali. Nell'ultimo ci si occupa dell'integrazione di alcune notevoli equazioni differenziali.

Digitized by Google

L'opera nel suo complesso è organica, densa di pensiero e accuratissima nei dettagli. Ottimo fondamento ai volumi della collezione a cui sarà riserbato il compito di mettere in evidenza la potenza e l'eleganza dei metodi vettoriali in questioni geometriche e fisico-matematiche.

B. FINZI

H. LEBESGUE - *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives professées au Collège de France.* II éd. Paris, Gautier-Villars 1928, p. XIII-342.

L'autore non ha bisogno di presentazione; egli ha legato il proprio nome a una metamorfosi del concetto d'integrale che ha preso posto stabile nella scienza; l'opera è pur nota essendone quella che annunciamo la II ed. Ma nell'intervallo di tempo interposto fra l'una (1903) e l'altra le idee dell'autore hanno fatto molta strada e il volume che annunciamo dà notizia degli sviluppi che esse hanno ricevuto specialmente per parte del Denjoy. Delle modificazioni subite dall'opera primitiva parla lungamente la bellissima prefazione, che saremmo tentati di riprodurre ove lo spazio, inflessibile tiranno, non ce lo vietasse. Esse possono, almeno in parte, dedursi dal paragone dell'indice della prima edizione col seguente della nuova:

I. L'integrale prima di Riemann. II. Definizione d'integrale data da Riemann. III. Definizione geometrica dell'integrale. IV. Le funzioni a variazione limitata. V. La ricerca delle funzioni primitive. VI. L'integrazione definitiva con l'ajuto delle funzioni primitive. VII. L'integrale definito delle funzioni sommabili. VIII. L'integrale indefinito delle funzioni sommabili. IX. La ricerca delle funzioni primitive. Esistenza delle derivate. X. La totalizzazione. XI. L'integrale di Stieljes. *Nota;* Sui numeri transfiniti.

G. L.

E. PICARD - *Leçons sur quelques équations fonctionelles avec des applications à divers problèmes d'analyse et de*

Digitized by Google

physique mathématique, redigées par E. Blanc. Paris, Gauthier-Villars 1928. 8° gr. p. 187 (Prezzo fr. 55).

L'illustre matematico francese avendo rinunciato a pubblicare un IV volume del suo *Traité d'Analyse* fu pregato di pubblicare almeno i corsi da lui tenuti da circa un ventennio alla Sorbona. Quello che egli tenne nel 1908 ha già visto la luce; esso si riattacca più o meno direttamente, al presente volume il quale riproduce le lezioni fatte nel 1911 e ripetute con alcuni complementi nel 1927. Come dice il titolo esso tratta alcuni tipi semplici di equazioni funzionali, essendosi l'autore proposto di segnalare alcuni esempi interessanti offerti da differenti regioni delle matematiche e porgenti occasione a digressioni istruttive. Così nel Cap. I egli si occupa dell'equazione.

$$f(x+y)+f(x-y)=2\,f(x)\,f(y)$$

a cui Poisson fu condotto dal problema della composizione di due forze eguali e ciò offre all'autore l'occasione di parlare della geometria non-euclidea. Nel Cap. II l'autore sceglie il punto di vista delle funzioni analitiche; la conoscenza di un'equazione funzionale soddisfatta da una siffatta funzione può permetterne il prolungamento e dimostrarne l'uniformità nei casi in cui ha luogo; ad esempio in tal modo si dimostra l'uniformità della funzione inversa dell'integrale ellettico di I specie. Nel II Cap. l'autore, dalle equazioni a differenze finite è condotto a trattare delle funzioni biperiodiche di I e II specie e delle trascendenti che portano il suo nome. Già nel Cap. II egli si è occupato dell'iterazione; ora questo problema interviene più fattivamente nel Cap. IV a proposito dell'equazione

$$f[\theta(x)]=f(x)+1$$

incontrata da Abel; l'autore senza esaurire le relative questioni, rinvia per più complete informazioni sull'argomento ai lavori di Fatou e Julia. L'ultima parte di detto Cap. concerne l'equazione a derivate parziali

$$\Delta V=kV$$

e l'equazione di Fredholm.

Una lode va rivolta al sig Blanc per la cura spiegata nel redigere queste interessanti lezioni. G. L.

Digitized by Google

F. Giudice - *Matematica complementare.* Ed. Hoepli, Milano Pag. 405 (L. 22,50).

Il libro, diviso in quattro parti, tratta di questioni geometriche nella prima metà e di questioni prevalentemente algebriche nella seconda.

Il primo capitolo è dedicato ai metodi di risoluzione dei problemi geometrici. I vari procedimenti costruttivi sono raggruppati in base ai metodi di risoluzione e alle corrispondenze applicate e sono illustrati da scelti esempi. L'autore non si occupa dei metodi che si valgono delle corrispondenze proiettive; ma sviluppa estesamente l'inversione puntuale, di cui vien fatta sistematica applicazione nel secondo capitolo, e l'inversione ciclica o di Laguerre non ancora ampiamente esposta in testi italiani. I classici problemi di Castiglione, di Malfatti, di Alhazen con altri di carattere elementare, alcuni dei quali, a vero dire, non indispensabili a chiarire i metodi risolutivi esposti, pongono fine alla prima parte.

Il secondo capitolo s'inizia con l'esame delle costruzioni eseguibili con la sola riga, con riga e cerchio di dato centro e con riga a due orli paralleli. Tratta quindi estesamente delle costruzioni col compasso e termina con semplici considerazioni atte a stabilire come con gli strumenti di Euclide possano costruirsi tutti i punti le cui coordinate cartesiane si deducano dalle coordinate dei punti dati con operazioni razionali e successive estrazioni di radici quadrate.

Formano materia della terza parte le delicate questioni sulla continuità, alcune considerazioni sugli aggregati, i numeri reali (algebrici e trascendenti), le espressioni numeriche illimitate e alcune nozioni sulla teoria dei numeri. Delle espressioni numeriche illimitate sono ricordate i numeri decimali non periodici, le frazioni continue, per le quali è data, in modo semplice e completo, la dimostrazione del teorema di Lagrange sugl'irrazionali quadratici, e le serie. Della teoria dei numeri vi sono le proprietà della funzione $\varphi(n)$ di Gauss, il teorema di Fermat e le proprietà fondamentali delle congruenze binomie di modulo primo.

Nell'ultimo capitolo è posto in evidenza il contributo delle equivalenze alla risoluzione delle equazioni, è detto delle trasformazioni delle medesime, delle equazioni normali, di alcune proprietà della risolvente di Galois, della irriducibilità delle funzioni. In quest'ultimo argomento sono date in modo completo e alle volte originale, le dimostrazioni di notevoli teoremi, ma si sorvola

Digitized by Google

sulle nozioni più comuni; così, per esempio, non vi è cenno del lemma di Gauss e delle dimostrazioni dell'irriducibilità delle equazioni della duplicazione del tubo e della trisezione dell'angolo. Dopo alcune pagine, dedicate alle dimostrazioni dell'irrazionalità di e e π, in cui sono applicate le proprietà ricordate delle frazioni continue, si passa alla trattazione del classico e attraente problema della circonferenza in parti eguali. Tale argomento dà all'autore modo di applicare le nozioni di aritmetica, algebra e geometria precedentemente esposte e l'opera acquista carattere di insieme e di armonia.

I risultati di varie ricerche originali, quali per esempio una elegante risoluzione del problema di Castiglione, alcuni rilievi sulle serie e sulla teoria dei numeri, una semplice dimostrazione del teorema di Petersen sulle equazioni risolubili per radicali quadratici, ecc. conferiscono al testo un pregio indiscutibile.

Il libro, che può interessare chiunque si occupi di matematica, è particolarmente prezioso per coloro che partecipano agli esami di Stato per l'ammissione all'insegnamento nelle scuole medie.

VITALE ZANI

H. LIEBMANN - *Nichteuklidische Geometrie.* Mit 40 Figuren. III neubarbeitete Auflage. Berlin und Leipzig, 1923. W. de Gruyter. 8° p. 150 (Prezzo L. 15).

Delle due prime edizioni dell'opera presente venne reso conto nel *Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche* (T VIII, 1905, p. 102 e T. XVI, 1914 p. 54); allora essa faceva parte della Sammlung Schub·rt, ora non più, per ragioni editoriali che a noi sfuggono e che d'altronde c' interessano mediocremente. Ciò che importa è che l'autore, incoraggiato dal favore del pubblico, ha fatto del suo meglio per conservarselo, portando la sua opera al livello delle nostre odierne cognizioni. Ci basti notare che già nella II ed. egli aveva toccato dei rapporti esistenti fra la geometria non-euclidea e la teoria della relatività; nella III dà maggiore sviluppo alle relative considerazioni, esponendole anzi sotto forma dialogata. Per agevolare ai lettori il paragone fra la nuova e le precedenti edizioni riferiamo anche per essa (come facemmo per

Digitized by Google

le altre) l'indice dei capitoli. I. Il postulato delle parallele ed i fondamenti della geometria. II, Geometria iperbolica elementare. III. Misurazioni. IV. Geometria analitica. V. Geometria sferico-ellittica. VI. Meccanica e relatività speciale. G. L.

R. Mehmke - *Leitfaden zun graphischen Rechnen* II, vermelute und verbessante Auflage. Mit 144 Figuren im Text. 8° p. VIII + 183. Leipzig und Wien, F. Deuticke.

Le origini del calcolo grafico si trovano nelle prime pagine del *La géométrie* di Descartes, nelle quali il grande geometra insegna ad eseguire sopra i segmenti rettilinei le prime operazioni aritmetiche. Col progredire, della matematica e con l'accrescersi delle esigenze della tecnica quella nuova diramazione della matematica andò gradatamente ampliandosi, ed oggi ha raggiunto tale estensione da toccare le equazioni differenziali. Non essendo essa compresa nel programma che viene di consueto svolto nelle nostre scuole superiori, non ha trovato presso di noi cultori assidui quanto ne annovera ad di là delle Alpi: ragione di più per segnalare ai nostri lettori il volume di uno fra coloro che con maggiore impegno e maggiore successo si è occupato della materia. A lui in particolare si deve l'applicazione dei logaritmi che si legge nella seconda Parte della prima Sezione del suo libro; mentre dalla prima Parte si apprendono alcuni metodi per eseguire le ordinarie operazioni aritmetiche e per risolvere equazioni algebriche, isolate o riunite in sistemi, nei quali l'invenzione di Nepero non è invocata.

Un'analoga ripartizione è adottata nella seconda Sezione la quale è di pertinenza del calcolo infinitesimale.

L'autore, che nei primordi della sua carriera scientifica appartenne alla schiera dei matematici puri, vivendo, finchè rimase nel servizio attivo, in un grande Politecnico, si orientò verso le applicazioni, ma sempre conservò l'abito del ragionamento rigoroso, offrendo molteplici conferme del vantaggio che la tecnica può trarre dalle concezioni più astratte e dai metodi più raffinati della moderna analisi. Il suo esempio merita di essere seguito e noi auguriamo lo sia in larga scala.

G. L.

Digitized by Google

JOSE A. SANCHEZ PEREZ - *Las matemàticas en la Biblioteca del Escorial. Memoria premiada* (Memorias de la Real Academia de Ciencias exactas, fisicas y naturale de Madrid, Ser. 2, T. VII, 1929) p. 365.

Gli è alla munificenza di Filippo II che deve la vita il Monastero dell'Escuriale, parte integrale del quale è la famosa biblioteca, di cui, per volere stesso del fondatore, una parte importante era assegnata alla matematica. I sovrani di Spagna continuarono nelle direttive del figlio di Carlo V, sovvenendo largamente quel grande Istituto culturale, ma un destino avverso impedì che i risultati fossero pari agli sforzi finanziari compiuti; prima (1671) un terribile incendio distrusse più di quattromila mss. ivi conservati e un grande numero di opere stampate; poi (1809) gli eserciti napoleonici fecero scomparire cimeli di inestimabile valore. Ciò non ostante quella biblioteca conserva una notevole importanza. L'opera che annunciamo dà notizia di quanto essa contiene di relativo alle scienze esatte. Crescono l'attrattiva di essa le numerose illustrazioni, ove sono riprodotti i frontispizi e alcune pagine delle più preziose edizioni di cui va orgogliosa detta Biblioteca. Perciò, con la presente pubblicazione l'autore ha aumentate le sue note benemerenze riguardo alla storia delle matematiche.

G. L.

CESARE BURALI-FORTI e ROBERTO MARCOLONGO - *Elementi di trigonometria ad uso degli istituti medi superiori e industriali.* In 8° pag. XI-162. L. 8,50. Casa Ed. Dante Alighieri.

Nella collezione di testi di matematica ad uso delle scuole medie e magistrali dirètta dai chiarissimi professori *R. Marcolongo* e *O. Nicoletti*, edita dalla Casa Editrice Dante Alighieri, con la quale si è fusa la Casa Perrella, sono stati pubblicati quest'anno gli Elementi di Trigonometria dei prof. *Burali-Forti* e *Marcolongo*.

Il volumetto è diviso in 3 parti o capitoli e corredato di una interessante raccolta di esercizi.

Il 1° cap. contiene la parte essenziale della trigonometria piana, cioè, dopo un breve cenno sulle funzioni circolari, la riso-

Digitized by Google

luzione dei triangoli rettangoli e obliquangoli. Il trattar subito della risoluzione dei triangoli, senza svolgere prima la teoria delle funzioni circolari (metodo tenuto in parte anche dal compianto prof. *Leoncini* nella sua trigonometria) presenta l'evidente vantaggio di interessare subito l'alunno con le pratiche applicazioni di questa parte delle matematiche. A tal uopo le relazioni fra elementi del triangolo rettangolo vengono dedotte dalla definizione stessa delle funzioni, e i noti teoremi sul triangolo obliquangolo sono dedotti con semplici dimostrazioni geometriche, senza ricorso alla teoria delle funzioni goniometriche.

Questa trova il suo luogo nel capitolo 2° e trae profitto dell'uso dei vettori. Premessa la definizione per astrazione di vettore e i cenni necessarî sui principî del calcolo vettoriale; gli A. trattano delle rotazioni, e quindi definiscono come coseno e seno di un angolo di φ radianti, le proiezioni su due assi ortogonali, sui quali sono fissati in precedenza i vettori unitarî a e b, di un vettore unitario $P-0$ che forma col 1° asse un angolo di $\varphi^{rad.}$ In simboli:

$$\cos\varphi = (P-0)\times a \quad , \quad \operatorname{sen}\varphi = (P-0)\times b.$$

La tangente e la cotangente di φ vengono definite come rapporti del seno al coseno e viceversa. Questa trattazione, che può stancare un po' il principiante per il simbolismo insolito e forse anche sovrabbondante, presenta il vantaggio di poter dare, ad esempio, una dimostrazione unica generale per le formule di addizione.

Il cap. 3° è dedicato alle principali nozioni di trigonometria sferica. Anche qui il teorema fondamentale:

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos\alpha$$

è dimostrato in modo semplice ed elegante con considerazioni vettoriali.

Avremmo preferito che in principio anche la tg e la ctg di un angolo fossero definite geometricamente in base alla fig. 2ª (pag. 4-5) per uniformità di metodo, dimostrando poi le note relazioni:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi} \quad , \quad \operatorname{cotg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}.$$

Così pure il segno del coseno, invece di stabilirlo per convenzione positivo per archi minori di $\pi/2$ e negativo per archi

Digitized by Google

compresi fra $\pi/2$ e π, ci sarebbe parso più conveniente dedurlo dal segno delle distanze sul diametro orizzontale.

La trattazione tutta del libro assai stringata, ma formalmente inappuntabile, ha bisogno di un'opera valida di spiegazione e commento per essere bene assimilata dagli alunni, ma appunto perchè fa riflettere e studiare è da augurare che il libro si diffonda nelle nostre scuole.

Esso presenta anche il notevole pregio di presentare i principî della teoria dei vettori, che sono di uso continuo in meccanica e più in generale in fisica. A. NATUCCI

DIONISIO GAMBIOLI - *Breve sommario della Storia delle Matematiche,* colle due appendici sui matematici italiani e sui tre celebri problemi geometrici dell'antichità. Ad uso delle Scuole secondarie. 2ª edizione: pag. 236 in 8°. Remo Sandron ed. Palermo, 1929. L. 12.

Con la riforma scolastica del 1923 un nuovo spirito ha permeato l'insegnamento della storia, il quale dalla pura esposizione dei fatti esteriori più notevoli nella vita dei popoli (guerre, conquiste, cambiamento di dinastie e di forme di regime) è passato ad abbracciare anche le linee essenziali del loro sviluppo culturale, il sorgere e lo svilupparsi dei grandi problemi filosofici e scientifici, il divenire dell'umana civiltà.

E se soltanto per i licei scientifici vediamo un programma esplicito di storia della scienza, ciò non toglie che anche nelle altre scuole o l'insegnante di storia e filosofia o quello di matematica e fisica, non debbano dare, al momento opportuno, le notizie necessarie sullo sviluppo del pensiero scientifico. Ad aiutare l'insegnante in questo utile complemento del suo insegnamento e, meglio ancora, a fornire ai giovani che desiderino completare e inquadrare in una visione sintetica le notizie apprese a scuola, non mancano ormai in Italia buoni trattatelli, che sono ben adatti allo scopo.

Ma meglio che ad alcuni testi scolastici preparati in fretta, dopo la riforma, da illustri cultori degli studi storici insufficientemente preparati nella parte scientifica, e che perciò presentano errori e manchevolezze già rilevati da altri (1), giova ricorrere a

(1) Vedi A. AGOSTINI in *Periodico di Matematiche,* Serie IV^a, vol. V pag. 281 e seg.

Digitized by Google

operette scritte da cultori di Storia della Scienza, dalle quale si è sicuri di attingere notizie precise e concetti essenziali sullo sviluppo del pensiero scientifico.

Ricordiamo volontieri al riguardo il libro di GINO LORIA « *Pagine di Storia della Scienza* » (G. B. Paravia, L. 9,50), e quello di L. HEIBERG tradotto da Gino Castelnuovo « *Matematiche, Scienze naturali e Medicina nell'antichità classica* » (A. Stock. L. 12,50) (1).

Per ciò che concerne in particolare la Storia delle matematiche utilissimo è il breve Sommario del Gambioli che è stato ripubblicato in 2ª edizione dal Sandron in forma elegante (2).

Quest'operetta si compone di 5 capitoli che trattano: il 1° della Matematica sotto l'influenza greca; il 2° della Matematica nel medio-evo; il 3° della Matematica del Rinascimento; il 4° della Introduzione dell'Analisi moderna; il 5° della Matematica del secolo XIX.

Dopo aver dato così uno sguardo sintetico allo sviluppo dei principali rami delle discipline matematiche dai tempi più antichi ai nostri giorni, sufficiente per la cultura di ogni buon allievo di scuole medie, il Gambioli completa il libro con due utili appendici, una sui matematici italiani accennati appena o non nominati nel testo e pur meritevoli di menzione (e in questa ci piace rilevare l'affettuoso ricordo dei grandi matematici recentemente rapiti alla scienza: Dini, Segre, Bagnera, Bianchi), l'altra sui tre classici problemi tramandatici dall'antichità: trisezione dell'angolo, duplicazione del cubo, quadratura del circolo. La seconda si chiude con una dimostrazione della trascendenza dei numeri e e π.

La seconda edizione oltre che accresciuta in sobria misura di notizie relative ai tempi più recenti, è anche tipograficamente più corretta della prima. Qualche menda qua e là permane, come lo strano equivoco di chiamare *contadino* (invece che abitante dei Paesi Bassi) Adriano Romano (p. 72 nuova edizione e 85 della 1ª edizione).

Non sappiamo poi quanto sia esatto attribuire (col Rouse-Ball) al 4° secolo d. c. Diofanto, che ora si ritiene comunemente vissuto nel 3° secolo.

Ma queste lievi inesattezze non tolgono pregio all'opera, nè menomano la sua generale precisione. A. NATUCCI

---

(1) Del primo vedasi una mia recensione in questo Bollettino, Anno XXII, fasc. I (marzo 1926); del secondo una mia recensione in Rivista di Fisica Matematica e Scienze naturali. Serie II, vol. II. Napoli, 1928.

(2) La 1ª edizione è del 1902, edita dallo Zanichelli di Bologna.

Digitized by Google

Per la storia e la filosofia delle matematiche. Collezione diretta da Federigo Enriques, promossa dall'Istituto nazionale per la storia delle Scienze fisiche e matematiche.

(N. 5.) Riccardo Dedekind - *Essenza e significato dei numeri. Continuità e numeri irrazionali.* Traduzione dal tedesco e note storico-critiche di Oscar Zariski. Casa Editrice Alberto Stock. Roma MCMXXVI. — L. 22.

I trattati scientifici, specie i manuali dedicati alle scuole medie, se pure ricordano talvolta il nome di chi ha dimostrato un teorema o scoperto una data legge fisica o naturale, non ci danno che una pallida idea dell'indagine scientifica, nè ci illuminano affatto sui metodi euristici che hanno condotto alla scoperta di una verità.

Se allora, spinti da nobile curiosità, ci diamo a rileggere le memorie originali, ci si apre dinnanzi alla mente come un mondo nuovo, e le aride proposizioni del testo scolastico ci si illuminano di nuova luce, accompagnate da una traccia del lavorio intellettuale che ha servito a ritrovarle. Così e soltanto così, la ricerca scientifica assume tutta la sua importanza.

La coscienza, ben viva attualmente, dell'importanza gnoseologica delle ricerche storiche, anche nel campo della scienza, ha condotto, da un lato, a indagini sulle origini delle più importanti teorie, dall'altro ha spinto a riesumare e a rendere accessibili al pubblico degli studiosi le memorie originali dei sommi scienziati, quelli che ben possono chiamarsi i classici della scienza.

Accanto alle collezioni straniere ben note:

Les maîtres de la pensée scientifique (Gauthier-Villars, Paris);

Les classiques de la Science (Armand Collin, Paris);

Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften (Engelmann, Lipsia);

Open court classics of Science and Philosophy (Chicago-London); è sorta da qualche anno, per cura del prof. *Enriques*, una collezione italiana che, per serietà d'intenti e valore delle sue pubblicazioni, ben potrà competere con le ricordate collezioni straniere.

I volumi finora pubblicati sono:

N. 1 - *Gli Elementi* di *Euclide* e la critica antica e moderna.

Digitized by Google

Vol. I, libri I-IV, editi da F. Enriques col concorso di diversi collaboratori (1);

N. 2 - *Heiberg*: Matematiche, scienze naturali e medicina nall'antichità classica. Traduzione di Gino Castelnuovo con note di F. Enriques (2);

N. 3 - *I. Newton*: I principi di filosofia naturale. Teoria della gravitazione. Traduzione e note sullo sviluppo dei concetti della meccanica per cura di F. Enriques e U. Forti (3);

N. 4 - *E. Rufini*: Il metodo di Archimede e le origini dell'analisi infinitesimale nell'antica Grecia (4);

N. 6 - *A. C. Clairaut*: Teoria della forma della terra dedotta dai principi dell'idrostatica. Traduzione e note di *M. Lombardini*, seguite da una nota di *F. Enriques:* Il problema della forma della terra nell'antica Grecia.

Il 5° volume, del quale vogliamo brevemente parlare, contiene le note operette del *Dedekind:* « Was sind und was sollen die Zahlen », « Stetigkeit und irrationale Zahlen ».

La prima, conforme al criterio dell'A. di considerare l'aritmetica come una parte della logica, e i numeri quali libere creazioni dello spirito umano, vuol stabilire tutta la scienza dei numeri sul concetto di corrispondenza fra gruppi di oggetti.

Servendosi di questo concetto l'A. dimostra la validità logica del metodo di induzione, e prova che la definizione induttiva (o per ricorrenza) è completa e scevra da contradizioni.

La seconda conduce al concetto di numero irrazionale pure in modo del tutto aritmetico, senza l'intervento delle grandezze misurabili, e introduce i nuovi enti mediante le sezioni nel campo dei numeri razionali.

Dell'uno e dell'altro scritto ho avuto occasione di occuparmi a lungo nel mio libro « *Il concetto di numero e le sue estensioni* » (5), al quale rimando il lettore desideroso di maggiori schiarimenti.

Qui è bene aggiungere che il libro è corredato in fine di

---

(1) Vedasi recensione di G. L. in questo Bollettino, Anno XXI, n. I-II, aprile 1925, e mia in Rivista di Fisica, Matematica e Scienze, Anno I - Serie II - n. 5, Napoli, 1927.

(2) Vedasi una mia recensione nella cit. Rivista, vol. II, 1928.

(3) Vedasi la mia recensione nella cit. Rivista, Anno I, n. 5 (1927).

(4) Vedasi la mia recensione sempre nella cit. Rivista, Anno I, n. 6, e quella di G. Tacchella in questo Bollettino, Anno XXIII, n. II-III, settembre 1927.

(5) Fratelli Bocca ed. Torino, p. 476 - L. 40. Vedansi i Cap. 8° e 16°.

Digitized by Google

importanti note che ricollegano gli scritti del *Dedekind* con le vedute moderne sulla teoria degli insiemi e sui fondamenti dell'aritmetica.

Tali note portano i seguenti titoli: Sul concetto d'insieme; Il finito e l'infinito; Sul principio d'induzione completa; Sui postulati dell'aritmetica; Sul principio dell'invarianza del numero; Il numero ordinale e le sue estensioni; Le operazioni fondamentali sui numeri ordinali; Il numero cardinale e le sue estensioni; Gli irrazionali nella matematica greca; Il principio della continuità nel suo sviluppo storico; Le teorie di Dedekind, Cantor-Méray e di Weierstrass; Il postulato di Cantor sotto la forma ordinale e le proprietà ordiuali caratteristiche del continuo lineare.

A. Natucci

NOTIZIE

Un nuovo documento sull'aritmetica degli Egiziani. A. Eisenlohr, il primo editore del noto papiro Rhind del British Museum, ha fatto cenno di una striscia di cuoio con iscrizioni matematiche esistente nello stesso Istituto, ma che non era stato possibile svolgere. Ricorrendo a nuovi processi chimici, lo svolgimento fu possibile e S. R. K. Glanville ha dato notizie di quanto sta scritto sopra quella striscia, nell'articolo *The mathematical leather-roll in the British Museum* (Journ. of Egypt. Arch., Vol. XIII, 1927). Vi si trovano conferme di quanto conoscevasi intorno ai calcoli aritmetici con frazioni fondamentali, ma nulla che esiga radicali modificazioni a quanto sapevavi sull'argomento.

Concorso a premi. La Società « Mathesis » conferirà due premi di L 1000 ciascuno agli autori di lavori sopra uno dei seguenti temi: I. Illustrare i progressi portati alla geometria elementare dai matematici francesi della fine del Secolo XVIII o del principio del XIX. II. Saggio storico-critico sul principio dei lavori o delle velocità virtuali, da Archimede a Lagrange. III. La teoria delle coniche nell'antichità.

Le memorie dei concorrenti dovranno essere inviate al prof. F. Enriques, presidente della « Mathesis », entro il 1° Marzo 1930. Il concorso verrà giudicato dal Consiglio scientifico dell'Istituto nazionale per la Storia delle Sienze.

Digitized by Google

NECROLOGIO

A. V. BÄCKLUND. Nacque a Kirchsmiel l'11 Gennaio 1845, compiè a Hälsingborg, ove la sua famiglia erasi trasferita nel 1854, gli studi secondari; nel 1861 s'inscrisse all'Università di Lund e si cattivò la stima dei propri maestri che, in data 27 Febbraio 1864, lo nominarono assistente a quell'Osservatorio astronomico. La laurea dottorale gli fu conferita in data 29 Maggio 1868, in seguito a presentazione di un lavoro di astronomia, l'unico che di lui si conosca su tale materia. Ottenne subito la libera docenza in astronomia, titolo che mutò l'anno seguente nell'analogo relativo alla geometria. Avendo ottenuto dal governo una borsa di studi, dal 1874 intraprese un viaggio all'estero (Lipsia e Erlangen). Nel 1878 fu chiamato all'Università di Lund in qualità di professore di meccanica e fisica matematica, cattedra che nel 1900 mutò in quella di fisica. Nel 1910 fu collocato a riposo, morì il 23 Febbraio 1922. In gioventù si consacrò di preferenza alla geometria nell'indirizzo cremoniano e pubblicò buon numero di lavori di geometria numerativa che, essendo scritti in svedese, conseguirono nessuna notorietà in Europa; il periodo 1873-1883 è quello della sua massima operosità e i lavori sulla geometria differenziale e la teoria delle equazioni a derivate parziali sono ben noti a tutti. Nell'ultimo periodo della sua esistenza si dedicò alla fisica col proposito non raggiunto di ricondurla alla meccanica. Per maggiori particolari rinviamo a un articolo di C. W. Oseen nel T. 38 del Jahresber, der Deutschen Math. Ver.

Digitized by Google

INDICE DEI NOMI

Abel LIV.
Alberti L. B. XXIII.
d'Alembert LIII.
Alhazen LXXXII.
Amerio XIII.
Andres XXIII.
Apollonio XIX, XXXV, XXXVI, XXXVII, LXXII.
Archibald XXIII.
Archimede XXXVI, XXXVII, LXIII, LXXI, XC, XCI.
degli Armati LXIII.
Avogadro XXIII.

Bäcklund XCII.
Bagnera XLVIII, LXXXVIII.
Baldus XVIII, XX.
Ball Rouse LXXXVIII.
Bauer XI-XII.
Beccari XXIII.
Bedarida I.
Beeger LXXVI.
Benedetti XXXVI.
Bernoulli D. LIII.
Bertrand XLVII.
Bernstein LVI, LVII.
Bessel LVI, LX.
Berzolari LXXI.
Bianchi I-VI, XLV, LXXXVIII.
Blenorhach XI, XII, XVIII, XX.
Binet XXIX,
Blaserna XXIII.
Böschenstein XXXV.
Boggio LXXVIII.
du Bois-Reymond LIII, LV, LVIII.
Bolyai XX.
Bombelli XXXVI.
Borel XLI-XLII.
Bortolotti XXIII.
Bouligand XLI.
Boussinesq LXXII.
Bromwich LIX.
Burali-Forti XVIII, LXXVI, LXXX, LXXXV, LXXXVII.
Brunacci LIV.
Brunet XLIX.
Burja L.
Burnengo XXII.

Cajori XXIII.
Canizzaro XXIII.
Cantor G. LIV, LXX, XCI.
Cardano XXXV.
Carlo V. LXXXV.
Casati LXIII.
Cassina LXXIII-LXXIV.
Castelnuovo Guido LXXXVIII.
Castelnuovo Gino LXXI.
Castiglione LXXXII.
Cattaneo XVII, XVIII.
Cauchy LIII.
Celoria XXIII.
Cerni LIX.
Cesàro LV.
Chaudny LIII.
Chiappello XXV.

Digitized by Google

Child XXXIX.
Ciacchi LXIII.
Ciamician XXIII.
Ciani XXXI-XXXII.
Clairaut XC.
Copernico XLVI-XLVII.
Cunningham LXXV, LXXVI.
Czuber XLVII.

Dalton XII, XIII, XIV.
Darbonx XL.
Dati XXIII.
Dawis LXXV.
Debeaune XXXVI.
Dedekind LXX, LXXXIX, XCI.
Delpino XXIII.
Denjey LIV.
Denza XXIII.
Desargues XXXVI.
Descartes XXXVI, LXIII, LXXXIV.
Dini LI, LIII, LVII, LXXXVIII.
Diofanto XXIII, XXXV, LXXXVIII.
Dirichlet I, II, III, V, IX, XXXIII, LIII, LVII.
Dirksen XXXIV.
Dolezval XLVII.
Dannington XLVI.

Enestrom XXIII.
Enriques XXIII, LXXI, LXXXIX, XC, XCI.
Erone XXXVI, LXXII.
Euclide XI, XX, XXIII, XXXV.
Eulero XXV, XXVIII, XXXVI, LIII, LIV, LV, LVI, LXXV,
Evans IX.

Fano LXXI.
Fantappiè VII.
Fatou LIV, LVIII, LXXXI.
Favaro XXIII, LXXI.
Fejér LIII, LV, LVII, LVIII, LX.
Fermat XXXVI, XXXVII, LXXXIII.
Ferraris XXIII.
Filippo II. LXXXV.
Finzi LXXX.
Fischer LVII, LX.
Fladt IX, XI.
Forti XXIV.
Fourier XXXVIII, XLI, LX.
Fréchet IX, LV.
Fredholm VIII, LXXXI.
Frobenius LVIII, LIX.
Fubini I, XLII.

Galileo XXIII.
Galois XXXIII, LXXXII.
Galvani XXIII.
Gambioli LXXXVII, LXXXVIII.
Gauss C. F. XI, XX, XLVI, LV, LVIII, LXIII.
Gauss G. T. XLVI.
Gauss G. XLVI.
Gay-Lussac XII-XIV.
Gerling XI.
Giannini XLVI.
Giudice LXXXII-LXXXIII.
G. L. vedi Loria.
Glanville XCI.
Govi XXIII.
Graefe XII.
Grammaticus XXXV.
Grassi XII-XIV.
Green XXXVIII.
Greenhill LXXII.
Grossmann LXIV-LXV.
Guareschi XXIII, LXX.

Hadamard IX.
Hahn LIX.
Hamilton IX.
Hardy LV, LX.
Haussdorff LVI.
Hausner XVIII, XIX.
Heath XXXVII.
Heiberg LXXI, LXXXVIII, XC.
Heine LIV.
Hermite II, III.
Hilber X, LXXI.
Hiller XLVI.
la Hire XXXVI.
Hobson LII.
Hölder LIV.
Hoheisel XIX, XXI.

Digitized by Google

de l'Hopital XXXVI.
Hoppe XLVIII.
Humbert V.
Huygens XI.

Jackson LVII.
Jordan LVII.
Jolliffe LIV.
Julia XL-XLI, LXXXI.
Junker XVIII, XIX.

Kampe XIX, XX.
Keplero XXXVII.
Kliem XXXV, XXXVII.
Knopp XX.
Köbel XXXV.
Kolmegoroff LIV, LVII, LVIII.
Kraitchick LXXV.
Kulik LXXV.

Lagrange LIV.
Laguerre LXXXII.
Landry LXXV.
Lebesgue LII, LIII, LIV, LV, LVI, LVII, LVIII, LX, LXXX.
Lebon LXXV, LXXVI.
Lehmer D. H. LXXV.
Lehmer D. N. LXXV.
Leoncini LXXXVI.
Lecat LII.
Lecchi LXIII.
Legendre LXIII.
Léggio XIV-XVII.
Leibniz XXXIX, XLIII-XLIV.
Lejeune-Dirichlet vedi Dirichlet.
Lessona XXIII.
Liebmann LXXXIII-LXXXIV.
Lipschitz LVII, LIX.
Littlewood LV.
Lobacefsky XX.
Lombardini Maria XC.
de Lorenzo XXIII.
Loof LXXV.
Loria XII, XXIII, XXV, XXXIII, XXXVII, XXXVIII, XXXIX, XL, XLI, XLII, XLIII, XLIX, LXI, LXIV, LXXI, LXXIV, LXXX, LXXXI, LXXXIV, LXXXV, LXXXVIII, XC.
Lucas LXXV.
Luciani XXIII.
del Lungo LXIII.
Lusin LIV, LVIII.

Magalotti XXIII.
Mambriani LXXX.
Mangoldt XXIII.
Marcolongo LXXVI-LXXX, LXXXV-LXXXVII.
Matteucci XXIII, XXIV.
Mayer XXXVI.
Mehmke LXXXIV
Melloni XXIII.
Méray XCI.
Mittag-Leffler XLVI.
Möbius XXXVI.
de Moivre XXXVI.
Moreau XXIX.
Morchead LXXV.
Mosso XXIII.
Mossetti XXIV.
Muhammed ibn Musa XXXV.

Napier LXXIII.
Natucci XIV, XVII, XVIII, LXXXVII, LXXXVIII, XCI.
Neumann XXXIII, XXXIV.
Newton XXXVII, XXXIX, XC.
Nicomaco XXXV.
Novara XLVI, XLVII.

Ossen XCII.

Pacinotti XXIII.
Pacioli LXXIII.
de Paolis X.
Parseval LVI, LVII, LX.
Pascal XXXVI, XXXVII.
Pasch LXX.
Peano LXX, LXXIV.
Pell III.
Pérès IX.
Perez LXXXV.
Pepin LXXV.

Digitized by Google

Picard II, III, XXXII-XXXIII, LXXX-LXXXI.
Pieri LXXI.
Pitagora X, XXXVI.
Plimpton XXXVII.
Poincaré IV, XXXIII.
Poisson LIII, LVIII, LXIX.
Poletti LXXV-LXXVI.
Polya LVI,
Poncelet XXXVI.
Poulet LXXV.
Powers LXXV.
Pringsheim LVII, LIX.

Ramanujan XXV.
Redi XXIII.
Regiomontano XLVI, XLVII.
Rey Pastor XLV.
Reye XXXI.
Riemann XXXVIII, LIII, LIV, LVI, LVII,
Riese XXXV.
Riesz LVI, LVII, LX.
Righi XXIII.
Rohn LXXI.
Romano Adriano LXXXVIII.
Rosati XXXII.
Rudolff XXXIII.
Rufini XC.

von Sanden XLII.
di S. Francesco LXIII.
di S. Vincenzo LXIV.
Schiaparelli XXIII.
Schmidt LXXII.
Schooten XXXVI.
Scorza LXXI.
Schwering XXIX.
Secchi XXIII.
Seelhoff LXXV.
Segre LXXI, LXXXVIII.
Selivestroff LIV.
Severi XLVIII, LXV-LXX.
Sibirani LX.
Simplicio LXXII.
Slaught XLIV.
Smith XXIII, LXXI-LXXIV.
Spallanzani XXIII.
Steiner XXXIV.
Steinhaus LIII, LVIII.
Stieltjes XLI.
Stifel XXXV.
Stoppani XXIII.
Szaz LVII.
Sziden LVII.

Tacchella XC.
Tannery XLVII.
Tchebycheff LV.
Teodosio XXXVI, LXXII.
Timpanaro XXIII.
Togliatti LXV.
Tolomeo XXXVI, LXXII.
Tonelli LX-L.
de Toni XXIII.
Torricelli XXIII, XXXVII.

de la Vallée Poussin LV, LVII, LVIII, LX.
Veronese LXX.
Viota XXXVI, XXXIX.
da Vinci Leonardo XXIII.
Vitali LX.
Vivanti IX, XXI-XXII, XLII.
Viviani XLIX-LI.
Voigt XXXIV.
Volta XII-XIV, XXIII.
Volterra VII-IX, XXXVIII.

Webster XXXVII-XXXVIII.
Wielcitner XXXIV-XXXIX.
Willers XVIII-XIX.
Witting XVIII-XIX.
Woepcke LXIII.

Young LV, LVI, LVII, LIX.

Zamboni XXIII.
Zani LXXXIII.
Zarinski LXXXIX.
Zeuthen LXXI.

Finito di stampare il 2 Dicembre 1929 (VIII)

ALBERTO CONTI, Direttore responsabile

Tip. Paolo Cuppini - Castiglione 6bis - Bologna - Telef. 14-07

Digitized by Google

Digitized by Google

HOME USE
CIRCULATION DEPARTMENT
MAIN LIBRARY

This book is due on the last date stamped below.
1-month loans may be renewed by calling 642-3405.
6-month loans may be recharged by bringing books to Circulation Desk.
Renewals and recharges may be made 4 days prior to due date.
ALL BOOKS ARE SUBJECT TO RECALL 7 DAYS AFTER DATE CHECKED OUT.

SEP 12 1975 3 5
CIRC. DIR. MAR 26 '75

LD21—A-40m-12,'74
(S2700L)

General Library
University of California
Berkeley

Digitized by Google

YDC66630

997136

THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY

Digitized by Google

Digitized by Google